ta, le espressioni locali hanno valori in Hom(F,F')

$$H_{ji} : U_i \cap h^{-1}(U'_j) \to \mathrm{Hom}(F,F') .$$

3 - Ricostruzione di fibrati e di omomorfismi.

Sia $\mathfrak{F}$ una categoria di struttura.

(3.1) Possiamo ricostruire un fibrato con struttura in $\mathfrak{F}$ mediante il suo atlante.

Proposizione.

Sia B uno spazio topologico, E un insieme, $\pi : E \to B$ un'applicazione suriettiva, $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di B, F un oggetto di $\mathfrak{F}$, $\{\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_{i\in I}$ una famiglia di biiezioni, i quali soddisfano alle seguenti condizioni:

a) $\forall$ $i \in I$, il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\Phi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "\pi^1"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$

b) se $U_i \cap U_j \neq 0$, l'applicazione Φ_{ji} abbia valori in Aut(F), ossia

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(F)$$

e l'applicazione indotta

$$(U_i \cap U_j) \times F \to F$$

sia continua(*).

Allora esiste in E un'unica struttura topologica tale che $\forall\, i \in I$, Φ_i sia un omeomorfismo. Per tale topologia π è continua. Inoltre esiste un'applicazione $J : B \to \mathrm{Ogg}\, \mathfrak{F}$ tale che

$$\eta : (E,\pi,B,J)$$

sia un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$.

Dimostrazione.

L'applicazione $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F$ è un omeomorfismo per la condizione b). Pertanto esiste un'unica struttura topologica su E per cui i Φ_i siano omeomorfismi. π risulta continua perché localmente è composizione di applicazioni continue. Infine basta considerare la J determinata dalla famiglia di biiezioni $\{\Phi_{ib} : \pi^{-1}(b) \to F\}_{i\in I}$, $\forall\, b \in B$.

(3.2) Possiamo ricostruire, a meno di isomorfismi, un fibrato con struttura in $\mathfrak{F}$ mediante i suoi cambiamenti di carta.

Proposizione

Sia B uno spazio topologico, sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di B, sia F un oggetto di $\mathfrak{F}$ e, se $U_i \cap U_j \neq 0$,

(*) Se F è localmente compatto, basta supporre che Φ_{ji} sia continua.

siano

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(F)$$

delle applicazioni tali che le applicazioni indotte $(U_i \cap U_j) \times F \to F$ siano continue(*) e

a) $\Phi_{kj} \cdot \Phi_{ji} = \Phi_{ki}$

b) $\Phi_{ii} = id_F$.

Allora esiste un fibrato topologico $\eta \equiv (E,\pi,B,J)$ di fibra tipo F, con struttura in $\mathfrak{J}$, definito a meno di isomorfismi, per il quale le Φ_{ji} siano i cambiamenti di carta.

Dimostrazione

Come spazio totale basta considerare $E \equiv \bigsqcup_{i \in I} U_i \times F)/_{\sim}$, dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita da

$$(i,b,f) \sim (j,b',f') \Longleftrightarrow b = b' \ , \quad \Phi_{ji}(b)(f) = f' \ .$$

E è uno spazio topologico e π, definito da $\pi([i,b,f]) \equiv b$, è continua e suriettiva.

La famiglia di applicazioni $\{\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_{i \in I}$,

data da $\{\Phi_i : [i,b,f] \to (b,f)\}_{i \in I}$

costituisce un atlante, di cui Φ_{ji} sono i cambiamenti di carta.

Si vede infine che se η' è un fibrato che soddisfa alle condizioni richieste, allora esiste un isomorfismo $\eta \to \eta'$.

(*) Se F è localmente compatto, basta supporre che Φ_{ji} sia continua.

(3.3) Possiamo ricostruire un omomorfismo di fibrati a struttura in $\mathfrak{F}$ mediante le espressioni locali.

Proposizione

Siano $\eta \equiv (E,\pi,B,J)$ ed $\eta' \equiv (E',\pi',B',J')$ due fibrati a struttura in $\mathfrak{F}$ di fibra tipo F ed F' rispettivamente e siano $\{(U_i,\Phi_i)\}_{i\in I}$ ed $\{(U'_j,\Phi'_j)\}_{j\in I'}$ due atlanti di η ed η', rispettivamente.

Sia $h : B \to B'$ un'applicazione continua e, se $U_i \cap h^{-1}(U_j) \neq \emptyset$, siano

$$H_{ji} : U_i \cap h^{-1}(U'_j) \to C(F,F')$$

applicazioni tali che le applicazioni indotte

$$(U_i \cap h^{-1}(U'_j)) \times F \to F'$$ siano continue(*) e

a) $H_{kj} \circ \Phi_{ji} = H_{ki}$

b) $(\Phi_{kj} \circ h) \circ H_{ji} = H_{ki}$.

Allora esiste un unico omomorfismo $H : E \to E'$ sopra ad h per il quale le H_{ji} siano le espressioni locali.

Dimostrazione

L'applicazione $H : E \to E'$

data da $$H : e \to \Phi_j^{-1}(h(\pi(e))_, H_{ji}(\pi(e))(\pi^2(\Phi_i(e))) ,$$

la quale risulta indipendente dalla scelta delle carte, è un omomorfismo.

Si verifica poi che tale H è unica.

(*) Se F è localmente compatto, basta supporre che H_{ji} sia continua.