Fibrati topologici con fibra strutturata

(1.1)

Sia $\mathcal{F}$ una sottocategoria della categoria degli spazi topologici. La categoria massimale generata da $\mathcal{F}$ è la categoria $\bar{\mathcal{F}}$ così definita:

α) gli oggetti di $\bar{\mathcal{F}}$ sono le coppie $\xi \equiv (X,\{s_i\}_{i\in I})$, dove

a) X è un insieme;

b) s_i è una biiezione $s_i : X \to F_i$, con $F_i \in \mathrm{Ogg}\,\mathcal{F}$;

c) $s_j \circ s_i^{-1} : F_i \to F_j$ è un isomorfismo di $\mathcal{F}$, $\forall\, i,j \in I$;

d) se $s_k : X \to F_k$, con $F_k \in \mathrm{Ogg}\,\mathcal{F}$ è una biiezione, tale che

$s_k \circ s_i^{-1} : F_i \to F_k$, con $i \in I$, è un isomorfismo, allora $k \in I$;

β) gli omomorfismi di $\bar{\mathcal{F}}$ sono

$$\mathrm{Hom}(\xi,\xi') \equiv \{s'^{-1}_{i'} \circ f \circ s_i : X \to X' \,|\, i\in I, i'\in I',\ f \in \mathrm{Hom}(F_i, F')\}.$$

Osserviamo anche che una famiglia $\{s_i\}_{i\in I}$ che soddisfa alla proprietà a),b) e c) è estendibile in un sol modo ad una che gode anche della proprietà d).

La categoria $\bar{\mathcal{F}}$ risulta essere in modo naturale una sottocategoria della categoria degli spazi topologici. Pertanto $\mathrm{Hom}(F,F')$ risulta un un sottospazio topologico di $C(F,F')$ ed $\mathrm{Aut}(F)$ risulta un sottospazio topologico di $\mathrm{Hom}(F,F)$.

Definizione

Sia $\mathfrak{F}$ una sottocategoria della categoria degli spazi topologici. Si dice che $\mathfrak{F}$ è una "categoria di struttura" se $\mathfrak{F}$ coincide con $\bar{\mathfrak{F}}$, identificando ogni oggetto X di $\mathfrak{F}$ con la coppia $(X,\{s_i\}_{i\in I}$, dove s_i sono gli isomorfismi $X \to F_i$.

Sia ora $\mathfrak{F}$ una categoria i cui oggetti sono tutti gli spazi topologici con certe operazioni continue i quali godono di certe proprietà ed i cui morfismi sono tutte le applicazioni continue che conservano le operazioni. Allora possiamo considerare $\mathfrak{F}$, in modo naturale, come una categoria di struttura, in quanto possiamo ricostruire univocamente le operazioni, per mezzo delle biiezioni.

Sia dunque $\mathfrak{F}$ una categoria di struttura data.

(1.2) Definizione.

Si dice "fibrato topologico (localmente banale) con struttura nella categoria $\mathfrak{F}$ "ogni quaterna

$$\eta \equiv (E,\pi,B,J),$$

dove E e B sono spazi topologici,

$$\pi : E \to B$$

è un'applicazione continua e suriettiva e J è un'applicazione

$$J : B \to \mathrm{Ogg}\,\mathfrak{F}$$

(mediante la quale identifichiamo $\pi^{-1}(b)$ con $J(b)$, $\forall\, b \in B$), i quali verificano la seguente condizione:

F.T.S. esistono a) un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di B,

b) un oggetto F di $\mathfrak{F}$,

c) una famiglia di omeomorfismi $\{\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_{i\in I}$,

tali che α) $\forall\, i \in I$, il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\Phi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

β) $\forall\, i \in I$, $b \in U_i$ l'applicazione indotta

$$\Phi_{ib} : \pi^{-1}(b) \to F$$

sia un isomorfismo.

In particolare un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$ è un fibrato topologico.

Osserviamo però, che un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$ non è semplicemente un fibrato topologico, con assegnata la categoria $\mathfrak{F}$, ma l'appartenenza di ciascuna fibra alla categoria va esplicitamente specificata.
Si noti che in un fibrato topologico a fibra strutturata i cambiamenti carta hanno valori in $\mathrm{Aut}(F)$.