Abstract.

An unified exposition of fiber bundles with structure is given. Vector and principal fiber bundles result as particular cases.

Riassunto

In questa nota diamo un'esposizione unificante di fibrato con fibra strutturata, nella quale rientrano, come casi particolari, i fibrati vettoriali e principali.

0 - Fibrati topologici

Richiamiamo, innanzitutto, alcune nozioni sui fibrati topologici.

(0.1) Definizione

Dicesi "fibrato topologico (localmente banale)" ogni tripla

$$\eta \equiv (E,\pi,B),$$

dove E e B sono spazi topologici e

$$\pi : E \to B$$

è un'applicazione continua e suriettiva, i quali verificano la seguente condizione:

F.T. esistono a) un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di B,

b) uno spazio topologico F,

c) una famiglia di omeomorfismi $\{\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_{i\in I}$,

tali che α) $\forall\, i \in I$, il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times F \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\pi^1} & \\ & U_i & \end{array}$$

E è "lo spazio totale"; B è "la base; π è "la proiezione"; $\pi^{-1}(b)$ è "la fibra" su $b \in B$; F è "una fibra tipo"; ogni aperto U, tale che $\pi^{-1}(U)$ è omeomorfo a $U \times F$, è "semplice"; (U_i, Φ_i) è "una carta"; $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ è "un atlante"; se $U_i \cap U_{ji} \neq \Phi$, allora l'applicazione

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_i \to \text{Omeo } (F)$$

data da
$$\Phi_{ji}(b)(f) \equiv \pi^2(\Phi_j \circ \Phi_i^{-1})(b,f) ,$$

è "un cambiamento di carta" .

(0.2) La famiglia dei cambiamenti di carta gode delle seguenti proprietà.

<u>Proposizione</u>

Sia $\eta \equiv (E,\pi,B)$ un fibrato topologico. Sia $\{(U_i,\Phi_i)\}_{i \in I}$ un atlante ed F la relativa fibra tipo.

Allora i cambiamenti di carta

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \to \text{Omeo } (F)$$

sono applicazioni continue (la topologia di Omeo (F) è quella compatti-aperti) e valgono le seguenti proprietà(*)

a) $\Phi_{kj} \circ \Phi_{ji} = \Phi_{ki}$ su $U_i \cap U_j \cap U_k$

b) $\Phi_{ii} = id_F$ su U_i $\doteq$

La famiglia $\{U_i, \Phi_{hk})\}_{i\in I,(h,k)\in I \times I}$ si dice "il cociclo" relativo all'atlante $\{(U_i,\Phi_i)\}_{i\in I}$.

(0.3) <u>Definizione</u>

Siano $\eta \equiv (E,\pi,B)$ ed $\eta' \equiv (E',\pi',B')$ due fibrati topologici.

Dicesi " omomorfismo di η in η' ogni applicazione continua

$$H : E \to E'$$

che soddisfa alle seguenti condizioni:

a) H manda fibre in fibre, ossia esiste $h : B \to B'$ tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow[h]{} & B' \end{array}$$

(se tale h esiste è unica),

b) $\forall\, b \in B$ l'applicazione indotta

$$H_b : \pi^{-1}(b) \to \pi'^{-1}(h(b))$$

(*) Il simbolo "o" denota la composizione nello spazio funzionale, per applicazioni a valori in tale spazio.

è continua.

Si vede che $h : B \to B$ risulta continua.

Siano $\{U_i, \Phi_i\}_{i\in I}$ e $\{U'_i, \Phi'_i\}_{i\in I'}$ atlanti di η ed η' rispettivamente, Se $U_i \cap h^{-1}(U_j) \neq \emptyset$, allora l'applicazione

$$H_{ji} : U_i \cap h^{-1}(U'_j) \to C(F,F'),$$

data da
$$H_{ji}(b)(f) \equiv \pi^2(\Phi'_j \circ H \circ \Phi_i^{-1})(b,f),$$

è detta "l'espressione locale dell'omomorfismo", relativa a $U_i \cap h^{-1}(U'_j)$.

(0.4) La famiglia delle espressioni locali di un omomorfismo gode delle seguenti proprietà.

Proposizione

Siano $\eta \equiv (E,\pi,B)$ ed $\eta' \equiv (E',\pi',B')$ due fibrati topologici e siano $\{U_i,\Phi_i)\}_{i\in I}$ ed F, $\{(U'_i,\Phi'_i)\}_{i\in I'}$ ed F' due atlanti e le relative fibre tipo di η ed η' rispettivamente. Sia $H : E \to E'$ un omomorfismo.

Allora le espressioni locali

$$H_{ji} : U_i \cap h^{-1}(U'_{ij}) \to C(F,F')$$

sono applicazioni continue (la topologia di $C(F,F')$ è quella compatti-aperti) e valgono le seguenti proprietà:

a) $(\Phi'_{ij} \circ H) \circ H_{jk} = H_{ik}$ su $U_k \cap h^{-1}(U'_j \cap U'_i)$

b) $H_{ij} \circ \Phi_{jk} = H_{ik}$ su $U_j \cap U_k \cap h^{-1}(U'_i)$.