2.4. Rappresentazione della misura di Lebesgue.

Useremo ora il Teorema di Loeb per rappresentare la misura di Lebesgue su $[0,1]$, come è stato fatto da Anderson [9] ,[10]. Tale rappresentazione si è rivelata utile, perché è in un certo senso una rappresentazione "discreta", come preciseremo più avanti.

Sia $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, e si divida l'intervallo ${}^*[0,1]$ (dove si pensa 0 identificato con 1) con una partizione $*$-finita in ω parti

$$\{[0, \frac{1}{\omega}) \; ; \; [\frac{1}{\omega}, \frac{2}{\omega}); \; \dots \; [\frac{\nu}{\omega}, \frac{\nu+1}{\omega}); \; \dots \; [\frac{\omega-1}{\omega}, \omega)\}$$

Sia $\mathcal{B}$ l'algebra dei blocchi interni (unioni $*$-finite di tali intervalli) generata da tale partizione. Si definisca una probabilità uniforme m su $\mathcal{B}$ ponendo

$$m \, [\frac{\nu}{\omega}, \frac{\nu+1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \, .$$

Il teorema di Loeb dà una misura σ-additiva $L(m)$ definita sulla σ-algebra $L(\mathcal{B})$.

Si consideri allora

$$\mathfrak{L} = \{ X : X \subseteq [0,1] \; , \; st^{-1}(X) \in L(\mathcal{B})\}$$

Dimostriamo che:

(i) $\mathfrak{L}$ è una σ-algebra contenente i Boreliani

(ii) Definendo $\lambda(X) = L(m)(st^{-1}(X))$, si ha che λ è la misura di Lebesgue.

Diamo solo uno sketch della dimostrazione di (i) e (ii); per i dettagli vedere [9] ,[10],[11] , dove si prova che ogni misura di Radon su uno spazio compatto si può rappresentare analogamente a quanto si fa per la misura di Lebesgue.

In [27] si trova una discussione di quali siano gli spazi topologici X per cui st_X^{-1} porta Boreliani di X in insiemi che stanno in $L({}^*\mathcal{P}(X))$.

Dimostrazione di (i). Per semplicità supporremo $\omega = \eta!$, con $\eta \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

$\mathcal{L}$ è una σ-algebra poiché lo è $L(\mathcal{B})$. Basta allora vedere che $\mathcal{L}$ contiene intervalli della forma $[a,b)$. Poiché esistono successioni di numeri razionali

$$a_1 \leq a_2 \leq \ \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq a$$

$$b_1 \leq b_2 \leq \ \ldots \leq b_m \leq \ldots \leq b$$

tali che

$$[a,b) = \bigcap_{n \in N} \bigcup_{m \in N} [a_n, b_m) \qquad ,$$

è sufficiente dimostrare che, per a,b razionali, $st^{-1}[a,b) \in L(\mathcal{B})$.

Osserviamo ora che, se $\frac{m}{n} \in [0,1]$, $\frac{m}{n} = \frac{\nu}{\omega}$ con $0 \leq \nu \leq \omega$, essendo $\frac{\omega}{n} \in {}^*\mathbb{N}$. Denotiamo, per $x \in [0,1]$,

$$q(x) = \{y : y \in {}^*[0,1],\ y < x\ ,\ \ y \approx x\}$$

Sia $[a,b) \subseteq [0,1]$, con a,b razionali per cui $a = \frac{\nu_1}{\omega}$, $b = \frac{\nu_2}{\omega}$. Allora

$$st^{-1}[a,b) = \left(\left[\frac{\nu_1}{\omega}\ ,\ \frac{\nu_2}{\omega}\right) \setminus q(b)\right) \cup q(a)$$

Poiché $\left[\frac{\nu_1}{\omega}\ ,\ \frac{\nu_2}{\omega}\right) \in \mathcal{B}$, è sufficiente dimostrare che, per ogni razionale

$0 < a \leq 1$, $q(a) \in L(\mathcal{B})$.

Si prenda $k \in \mathbb{N}$ tale che $0 < \frac{1}{k} < a$ e $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $a = \frac{\nu}{\omega}$

Ne segue

$$q(a) = \bigcap_{n \geq k} \left[\frac{\nu - \frac{\omega}{n}}{\omega}, \frac{\nu}{\omega} \right)$$

per cui $q(a) \in L(\mathcal{B})$.

Per dimostrare (ii) si tiene conto del fatto che per ogni intervallo $[a,b)$ è $\lambda[a,b) = b - a$, e poi si procede in modo ovvio.

La rappresentazione sopra descritta si è rivelata utile (vedi [10] [13]) per la costruzione del moto Browniano e per una dimostrazione del tutto combinatoria della congettura di Edworth. L'utilità viene proprio dal Teorema 6 e dal fatto che, se $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ è misurabile secondo Lebesgue, allora

$°g = st \cdot {}^*g : {}^*[0,1] \to \mathbb{R}$ è $L(m)$-misurabile ed è costante sugli intervalli $\left[\frac{\nu}{\omega}, \frac{\nu+1}{\omega} \right)$.