

$$\leq \text{st} \left[ \omega^{-\eta} \sum_{v_1 \dots v_{i-1} v_{i+1} v_\eta} ||f|| + ||f|| \right] = \text{st} \left[ \omega^{-\eta} \cdot \omega^{\eta-1} \cdot 2 ||f|| \right] =$$

$$= \text{st} \left[ \frac{2 ||f||}{\omega} \right] = 0$$

dove  $||f||$  è la norma di  $f$  in  $B(X)$ .

Verifica di (ii). Se per ogni  $T \in H$  si ha  $L(f \circ T) = L(f)$ , allora per ogni  $S \in {}^*H$  si ha  ${}^*L({}^*f \circ S) = {}^*L({}^*f)$ , a causa del PT. Dunque

$${}^*L({}^*f \circ S_1^{v_1} \circ \dots \circ S_n^{v_n}) = {}^*L({}^*f) .$$

Per cui

$$M(f) = \text{st} \left[ \omega^{-\eta} \sum_{v_1 \dots v_\eta} {}^*L({}^*f) \right] = \text{st} [\omega^{-\eta} \cdot \omega^\eta L(f)] = L(f)$$

(Si noti il carattere combinatorio della dimostrazione!).

Dalla Proposizione 6 si può dedurre il noto risultato sull'estensione della misura di Lebesgue su  $[0,1]$  ad una m.p.f.a. invariante per traslazioni (mod. 1). Infatti sia  $L$  un funzionale che estende  $\int f d\lambda$ , con  $\lambda$  misura di Lebesgue, (vedi parte I°); il resto segue dal fatto che il gruppo delle traslazioni è abeliano.

## 2.2. IL TEOREMA DI LOEB.

Nella I° parte si è visto come ogni m.p.f.a. su  $X$  possa essere "sollevata" ad una m.p.f.a. sull'algebra  ${}^*\mathcal{P}(X)$  attraverso il diagramma (1.8).

Partiremo ora da una situazione un po' più generale, supponendo di avere una terna  $(A, \mathcal{B}, m)$ , dove  $A$  è un insieme interno,  $\mathcal{B}$  un'algebra di sottoinsiemi interni di  $A$  e  $m: \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  è una funzione interna tale che

- (i)  $m(\emptyset) = 0$
- (ii)  $m(Y_1 \cup Y_2) = m(Y_1) + m(Y_2)$  per  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ .

Attraverso  $m$  si può definire una misura finitamente additiva  ${}^\circ m$  su  $\mathcal{B}$ , a valori in  $\overline{\mathbb{R}^+}$ , con

$${}^\circ m(Y) = \begin{cases} \text{st}(m(Y)) & \text{se } m(Y) \text{ è finito} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si indichi con  $L(\mathcal{B})$  la ~~minima~~  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi (esterni) di  $A$  contenente  $\mathcal{B}$ .

TEOREMA 4: La m.f.a.  ${}^\circ m$  si può estendere in modo unico ad una misura  $\sigma$ -additiva  $L(m)$  definita sulla  $\sigma$ -algebra  $L(\mathcal{B})$  tale che

- (i)  $L(m)(B) = m(B)$  per ogni  $B \in \mathcal{B}$
- (ii)  $L(m)(Y) = \inf \{ {}^\circ m(B) : B \in \mathcal{B}, B \supseteq Y \}$
- (iii) Se  $L(m)(Y) < +\infty \implies L(m)(Y) = \sup \{ {}^\circ m(B) : B \in \mathcal{B}, B \subseteq Y \}$

Si può visualizzare con il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{m} & \overline{\mathbb{R}^+} \\ \uparrow & \searrow {}^\circ m & \downarrow \text{st} \\ L(\mathcal{B}) & \xrightarrow{L(m)} & \overline{\mathbb{R}^+} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Se } x \text{ è infinito allora} \\ \text{st } x = +\infty) \end{array}$$

La dimostrazione fa uso del teorema di estensione di Caratheodory e della seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 7. Dato  $(A, \beta)$  con  $A$  interno e  $\beta$  collezione di sottoinsiemi interni di  $A$  e dato  $B_n \in \beta, n \in \mathbb{N}, B \in \beta, B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ , allora esiste  $k$  per cui  $B \subseteq \bigcup_{n=1}^k B_n$ .

Dimostrazione: Si definisca l'insieme interno (per il PDI)

$$E = \{v : v \in {}^*\mathbb{N}, B \subseteq \bigcup_{n=0}^{n=v} B_n\}.$$

Esso ammette minimo, che non può essere infinito poiché  $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ .

Sketch della dimostrazione del Teorema 4: Si formi con  ${}^\circ m$  la misura esterna  $\bar{m}$  nel solito modo:

$$\bar{m}(Y) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} {}^\circ m(B_n) : \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \supseteq Y, B_n \in \beta \right\}$$

La proposizione 7 serve a dimostrare che  $\bar{m}$  è contabilmente subadditiva, il che dimostra (i).

Verifichiamo (ii). Dato  $Y \in L(\beta)$  con  $L(\mu)(Y) < +\infty$  ed  $\varepsilon > 0$  esiste  $B_n \in \beta, B_0 \subseteq B, \subseteq \dots \subseteq B_n \subseteq \dots$  tale che :

$$Y \subseteq C = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \quad \text{e} \quad L(m)(C) < L(m)(Y) + \varepsilon.$$

Si estenda per il principio di comprensione la successione  $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  ad una successione interna  $\{B_\nu : \nu \in {}^*\mathbb{N}\}$ . Per l'osservazione 2.0.1 si può prendere un  $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $\lambda, 0 \leq \lambda \leq \omega$ , segue

$B_\lambda \subseteq B_{\lambda+1}$ , e inoltre  $m(B_\omega) < L(m)(Y) + \varepsilon$ . (Osservare che  $m$  è definita su  $B_\omega$  perché  $m$  è interna).

Ma essendo  $Y \subseteq C \subseteq B_\omega$ , ne segue che  $L(m)(Y) \leq L(m)(B_\omega) < L(m)(Y) + \varepsilon$ .

(iii) è simile. Nel caso che  $\nu_m$  sia una misura di probabilità, l'unicità della estensione si dimostra abbastanza facilmente (cfr. [30]). Nel caso che  $\nu_m$  sia una misura non-limitata, tale dimostrazione è stata data da Henson [26].

### 2.3. PROBABILITA' FINITAMENTE ADDITIVA o $\sigma$ -ADDITIVA?

La risposta a tale domanda sembra essere "finitamente additiva"; l'assioma di  $\sigma$ -additività, per una probabilità sembra pesante e innaturale, come de Finetti sostiene in [22]. Tra le motivazioni addotte c'è il fatto che una probabilità  $\sigma$ -additiva non può essere definita in generale per tutti gli eventi a causa del teorema di Ulam, e che non si può definire una probabilità uniforme  $\sigma$ -additiva su uno spazio numerabile.

D'altronde non si può escludere il vantaggio tecnico che si ha quando si lavora con una misura  $\sigma$ -additiva. Per ripetere le parole di Halmos ([24] pag. 187) "infinite additivity does not contradict our intuitive ideas, and the theory built on it is sufficiently far developed to assert that the assumption is justified by its success".

Il Teorema di Loeb e i risultati conseguenti ad esso (vedi [10] [11] [12] [28] [29]) sembrano dare un'alternativa alla disputa sopra ricordata. Sia  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0,1]$  una m.p.f.a.; essa, come abbiamo visto, può essere sollevata ad una funzione di insieme interna  $m = {}^*\mu : {}^*\mathcal{P}(X) \rightarrow {}^*[0,1]$  per cui  $\nu_m = st \circ m$  è una m.p.f.a. su  $\beta = {}^*\mathcal{P}(X)$ . Col teorema di Loeb si estenda  $\nu_m$  a  $L(m) : L(\beta) \rightarrow [0,1]$ . Allora  $L(m)$  è  $\sigma$ -additiva ed è una "buona" misura per lavorare tecnicamente. Dentro  $L(\beta)$  ci sono tutti gli eventi standard; infatti questi sono dentro  $\beta$ , per il fatto che

$$\beta \supseteq \{ {}^*A : A \subseteq X \}.$$