$$A = \{x : x \in {}^*\mathbb{N} \ \& \ (\forall v_1 \dots v_n \in {}^*\mathbb{N})[\bigwedge_{i=1}^{n} v_i \leq x \to R(v_1 \dots v_n)]\}$$

Se $B = {}^*\mathbb{N} \setminus A$ è vuoto, qualunque ω va bene. Altrimenti B ammette minimo ν che non può essere in $\mathbb{N}$; allora basta prendere $\omega = \nu - 1$.

2.1. MISURE INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI.

In un articolo uscito nell'ultimo Boll. U.M.I. [21] F. Chersi dimostra che, se $\{T_i : i \in I\}$ è una famiglia di applicazioni di X in sé a due a due permutabili, allora esiste una m.p.f.a. su X invariante per tutte le T_i.

Tale risultato è stato dimostrato con metodi standard facendo appello al teorema del punto fisso di Markov-Kakutani (vedi [23] pag. 456).

Vediamo come si può dimostrare un tale risultato secondo le idee fin qui esposte.

Trovare una massa su X invariante per tale famiglia equivale a trovarne una invariante per il semigruppo abeliano H che essa genera.

Supponiamo che X ed $\mathbb{R}$ si trovino sulla base di una superstruttura. Si consideri un suo allargamento che gode il principio di comprensione contabile. Sia F un insieme $*$-finito tale che

$${}^\sigma H \subseteq F \subseteq {}^*H \quad , \qquad \text{dove} \qquad {}^\sigma H = \{{}^*T : T \in H\} .$$

Se $||F|| = \eta$, si denoti $F = \{S_1, S_2, \dots S_\eta\}$. Infine, per ogni $S \in {}^*H$ si estenda, per il principio di comprensione, la successione $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ ad una successione interna $\{S^\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$. Si consideri ora l'insieme interno (per il PDI):

$$A = \{\omega : \omega \in {}^*\mathbb{N} \ , \ \forall \nu_1 \dots \nu_\eta \in \{0,1,\dots\omega-1\}^\eta \left(S_1^{\nu_1} \circ S_2^{\nu_2} \circ \dots \circ S_\eta^{\nu_\eta} \in {}^*H\right)\}$$

Poiché (per il PT) $^*H$ è un semigruppo abeliano chiuso rispetto a prodotti di sottoinsiemi $*$-finiti, segue $\mathbb{N} \subseteq A$. Si fissi allora un $\omega \in {}^*\mathbb{N} \smallsetminus \mathbb{N}$ e $\omega \in A$; un tale ω esiste per l'osservazione 2.0.1. Per dimostrare ciò che vogliamo, sarà sufficiente provare la seguente

<u>PROPOSIZIONE</u> 6 : Sia L un funzionale lineare monotono normalizzato sullo spazio $B(X)$ delle funzioni limitate su X. Allora esiste un funzionale lineare monotono normalizzato M su $B(X)$ tale che:

(i) $\qquad M(f \circ T) = M(f) \qquad \forall\, T \in H$

(ii) $\qquad$ Se $L(f \circ T) = L(f) \qquad \forall\, T \in H$

allora $\qquad M(f) = L(f)$.

<u>Dimostrazione</u>. Si definisca M con

$$(2.1) \qquad M(f) = st\left[\omega^{-\eta} \sum_{\nu_1 \ldots \nu_\eta} {}^*L({}^*f \circ S_1^{\nu_1} \circ S_2^{\nu_2} \circ \ldots \circ S_\eta^{\nu_\eta})\right]$$

dove $\sum_{\nu_1 \ldots \nu_2}$ viene presa su tutte le possibili successioni interne $\nu_1 \ldots \nu_\eta$ con $0 \leq \nu_i < \omega$.

<u>Verifica di (i)</u>. Sia $T \in H$: allora ${}^*T = S_i$ per qualche $1 \leq i \leq \eta$, perché ${}^\sigma H \subseteq F$. Allora

$$|M(f \circ T) - M(f)| = st\left\{\omega^{-\eta}\left|\sum_{\nu_1 \ldots \nu_\eta} {}^*L\,({}^*f \circ S_i \circ S_1^{\nu_1} \circ \ldots S_\eta^{\nu_\eta}) - {}^*L({}^*f \circ S_1^{\nu_1} \circ \ldots \circ S_\eta^{\nu_\eta})\right|\right\} =$$

$$= st\left\{\omega^{-\eta}\left|\sum_{\nu_1 \ldots \nu_{i-1}\nu_{i+1} \ldots \nu_\eta} {}^*L({}^*f \circ S_1^{\nu_1} \circ \ldots \circ S_i^{\omega} \circ \ldots S_\eta^{\nu_\eta}) - {}^*L({}^*f \circ S_1^{\nu_1} \circ \ldots S_i^{0} \ldots S_\eta^{\nu_\eta})\right|\right\} \leq$$

$$\leq st\left[\omega^{-\eta} \sum_{\nu_1 \ldots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \nu_\eta} ||f|| + ||f||\right] = st\left[\omega^{-\eta} \cdot \omega^{\eta-1} \cdot 2\,||f||\right] =$$

$$= st\left[\frac{2||f||}{\omega}\right] = 0$$

dove $||f||$ è la norma di f in $B(X)$.

Verifica di (ii). Se per ogni $T \in H$ si ha $L(f \circ T) = L(f)$, allora per ogni $S \in {}^*H$ si ha ${}^*L({}^*f \circ S) = {}^*L({}^*f)$, a causa del PT. Dunque

$${}^*L({}^*f \circ S_1^{\nu_1} \circ \ldots S_\eta^{\nu_\eta}) = {}^*L({}^*f) .$$

Per cui

$$M(f) = st\left[\omega^{-\eta} \sum_{\nu_1 \ldots \nu_\eta} {}^*L({}^*f)\right] = st\left[\omega^{-\eta} \cdot \omega^{\eta} L(f)\right] = L(f)$$

(Si noti il carattere combinatorio della dimostrazione!).

Dalla Proposizione 6 si può dedurre il noto risultato sull'estensione della misura di Lebesgue su $[0,1]$ ad una m.p.f.a. invariante per traslazioni (mod. 1). Infatti sia L un funzionale che estende $\int f d\lambda$, con λ misura di Lebesgue,(vedi parte I°); il resto segue dal fatto che il gruppo delle traslazioni è abeliano.

2.2. IL TEOREMA DI LOEB.

Nella I° parte si è visto come ogni m.p.f.a. su X possa essere "sollevata" ad una m.p.f.a. sull'algebra ${}^*\mathcal{P}(X)$ attraverso il diagramma (1.8).