METODI NON STANDARD IN TEORIA DELLA MISURA.

P A R T E II

PREMESSA.

Gli insiemi $*$-finiti sono "in generale" insiemi infiniti, ma possiedono quasi tutte le proprietà formali degli insiemi finiti. Essi si sono rivelati utili per approssimare fenomeni discreti e finiti, ma che, essendo "grandi", per loro natura avrebbero bisogno di metodi continui. Esempi di questi sono il processo infinitesimale di Poisson (Loeb [30]), la costruzione di Anderson del moto Browniano [9][10], le equazioni alle differenze infinitesime nei processi stocastici, studiate da Keisler [28][29] e molti altri modelli in economia [33] a cominciare da Brown e Robinson [19][20] fino alla dimostrazione della Congettura di Edgworth da parte di Anderson [13].

La chiave di molti dei sopraelencati risultati è il Teorema di Loeb [30] che noi illustreremo e discuteremo nel paragrafo 2.2.. Nel paragrafo 2.1. vogliamo dare un esempio di come si possano usare insiemi $*$-finiti per costruire misure invarianti.

2.0. Superstrutture sopra un insieme S (riesaminate).

Ora definiamo meglio di quanto non abbiamo fatto prima il concetto di superstruttura sopra un insieme S. Si definisca per ricorrenza

$$V_o(S) = S \ , \ V_{n+1}(S) = V_n(S) \cup \mathcal{P}(V_n(S))$$

$$V(S) = \bigcup_{n\in N} V_n(S)$$

Si assume che $\emptyset \notin S$ e che ogni $x \in S$ sia disgiunto da $V(S)$.
Per formula limitata si intende una formula del primo ordine dove i quantificatori sono del tipo $(\forall v \in x)$, $(\exists v \in x)$ con x variabile o costante.
Assumeremo che:

(i) ${}^*S$ sia una estensione propria di S.

(ii) $*$ è una applicazione di $V(S)$ in $V({}^*S)$ che è l'identità su S e preserva la verità delle formule limitate (Principio di Transfer).

L'insieme ${}^{\circledast}V(S) = \bigcup_{n\in N} {}^*V_n(S)$ sarà detto l'insieme degli elementi interni o anche ampliamento non-standard di $V(S)$.

Supporremo inoltre che $S \supseteq \mathbb{R}$ e che ${}^{\circledast}V(S)$ sia un allargamento (vedi parte I°) con in più la seguente proprietà, detta principio di comprensione contabile (vedi [7] pag. 180):

(iii) Se $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia (esterna) di elementi interni $A_n \in {}^*\mathcal{J}$, allora esiste una estensione interna di tale successione $\{A_\nu : \nu \in {}^*\mathbb{N}\}$

Conviene anche ricordare il seguente principio, utile per la costruzione di insiemi interni:

PRINCIPIO DI DEFINIZIONE INTERNA (abbr. PDI):

Sia $\phi(v_1,v_2,\ldots v_n,v)$ una formula limitata e $A_1,\ldots A_n,A$ elementi interni; allora

$$\{a : a \in A\ ,\ \ \phi(A_1,\ldots A_n,a)\ \ \text{è vero}\}$$

è un insieme interno.

Infine facciamo la seguente

Osservazione 2.0.1. Se $R(x_1,\ldots x_k)$ è una relazione interna definita su ${}^*\mathbb{N}$ e se vale $R(n_1,\ldots n_k)$ per ogni $n_i \in \mathbb{N}$, allora esiste un $\omega \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ tale che $R(x_1,\ldots x_k)$ vale per ogni $x_i \in {}^*\mathbb{N}$, $x_i \leq \omega$, $i = 1,\ldots k$.

Per verificare ciò si consideri l'insieme interno (per il PDI) A definito da:

$$A = \{x : x \in {}^*N \ \& \ (\forall v_1 \ldots v_n \in {}^*\mathbf{N})[\bigwedge_{i=1}^{n} v_i \leq x \to R(v_1 \ldots v_n)]\}$$

Se $B = {}^*\mathbf{N} \setminus A$ è vuoto, qualunque ω va bene. Altrimenti B ammette minimo ν che non può essere in $\mathbf{N}$; allora basta prendere $\omega = \nu - 1$.

2.1. MISURE INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI.

In un articolo uscito nell'ultimo Boll. U.M.I. [21] F. Chersi dimostra che, se $\{T_i : i \in I\}$ è una famiglia di applicazioni di X in sé a due a due permutabili, allora esiste una m.p.f.a. su X invariante per tutte le T_i.

Tale risultato è stato dimostrato con metodi standard facendo appello al teorema del punto fisso di Markov-Kakutani (vedi [23] pag. 456).

Vediamo come si può dimostrare un tale risultato secondo le idee fin qui esposte.

Trovare una massa su X invariante per tale famiglia equivale a trovarne una invariante per il semigruppo abeliano H che essa genera.

Supponiamo che X ed $\mathbf{R}$ si trovino sulla base di una superstruttura. Si consideri un suo allargamento che gode il principio di comprensione contabile. Sia F un insieme $*$-finito tale che

$$^{\sigma}H \subseteq F \subseteq {}^*H \quad , \qquad \text{dove} \qquad ^{\sigma}H = \{{}^*T : T \in H\} .$$

Se $||F|| = \eta$, si denoti $F = \{S_1, S_2, \ldots S_\eta\}$. Infine, per ogni $S \in {}^*H$ si estenda, per il principio di comprensione, la successione $\{S^n : n \in \mathbf{N}\}$ ad una successione interna $\{S^\nu : \nu \in \mathbf{N}\}$. Si consideri ora l'insieme interno (per il PDI):

$$A = \{\omega : \omega \in {}^*\mathbf{N} \ , \ \forall \nu_1 \ldots \nu_\eta \in \{0,1,\ldots \omega-1\}^\eta \left(S_1^{\nu_1} \circ S_2^{\nu_2} \circ \ldots \circ S_\eta^{\nu_\eta} \in {}^*H \right)\}$$