METODI NON-STANDARD IN TEORIA DELLA MISURA (*)

P A R T E I

PREMESSA.

La presentazione dei metodi e degli strumenti non-standard con cui lavoreremo sarà breve e anche poco precisa in qualche punto. Ciò è dovuto al fatto che ci preme non appesantire troppo il discorso all'inizio, per non "disgustare" coloro che non hanno familiarità con tali metodi. Daremo soltanto le principali definizioni, i principali risultati e le idee conduttrici che ci dovrebbero mettere in grado di seguire agevolmente la prima parte di tale seminario. In questa si danno i teoremi di rappresentazione non-standard di misure e funzionali lineari. In realtà, a nostro parere, questi teoremi sono più di natura descrittiva che sostanziale; essi però ci portano in un ordine di idee che ci consentirà, nella seconda parte, di dare altri risultati più profondi e che stanno cominciando ad avere successo in teoria della misura e calcolo delle probabilità. (vedi [8] [9] [10] [13] [29]).

(*) Seminario tenuto presso l'Istituto Matematico dell'Università di Lecce il 18 e 19 Maggio 1978 da Sauro TULIPANI (Università di Firenze).

0. - INTRODUZIONE.

0.1. Si consideriamo l'insieme dei numeri reali R e un insieme arbitrario X, in generale infinito, che sarà poi l'insieme sui cui sottoinsiemi sono definite le misure che considereremo. La superstruttura V di base X e $\mathbb{R}$ è la collezione degli insiemi che si possono formare da X e $\mathbb{R}$ con un numero finito di applicazioni dell'operazione insiemistica di potenza: $\mathcal{P}(Y)$ = insieme delle parti di Y. In realtà V stesso è un insieme; sono elementi di V i sottoinsiemi di X, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, collezioni finite di sottinsiemi, funzioni da X a $\mathbb{R}$, insiemi di tali funzioni etc. etc... . Inoltre V è chiuso rispetto alle operazioni di unione e di intersezione finite, prodotto cartesiano finito...; insomma V è proprio la collezione di insiemi dentro la quale possiamo trovare tutti gli oggetti matematici standard che adopereremo in tale seminario. Per ragioni tecniche si suppone X e R disgiunti e ogni individuo $X \in X \cup R$ non avente elementi in comune con V.

Si considerino degli insiemi ${}^*X, {}^*\mathbb{R}$ tali che ${}^*X \supsetneq X$ ${}^*\mathbb{R} \supsetneq R$: la superstruttura V' sopra ${}^*X$ e ${}^*\mathbb{R}$ è definita in modo analogo. Ci interessano quelle V' per cui esiste una funzione $* : V \to V'$ soddisfacente i seguenti assiomi:

1) $*$ è l'identità sugli individui, cioé sugli elementi di $X \cup \mathbb{R}$.
2) $*$ è una ϵ-immersione. Cioé $A \in B \Longleftrightarrow {}^*A \in {}^*B$ o anche ${}^*\mathcal{A} \supseteq \{{}^*A : A \in \mathcal{A}\}$ (se $A \subset X \cup \mathbb{R} \Longrightarrow {}^*A \supseteq A$)
3) $*$ non può essere l indentità. Per tutti gli $\mathcal{A}$ infiniti ${}^*\mathcal{A} \supsetneq \{{}^*A : A \in \mathcal{A}\}$
4) Il Principio di Transfer (abbr. PT).

Quest'ultimo afferma che se $\phi(v_1,\ldots v_n)$ è una proprietà espressa da una formula del primo ordine limitata, allora:

$$\phi(x_1, x_2, \dots x_n) \quad \text{vale in} \quad V \Leftrightarrow \phi({}^*x_1, {}^*x_2, \dots {}^*x_n) \quad \text{vale in} \quad V'.$$

La formula ϕ è una delle formule che si possono costruire dalle formule basilari del tipo $v \in u$, $v = u$, con un numero finito di passi adoperando congiunzioni $\wedge$, disgiunzioni $\vee$, implicazioni $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e infine i quantificatori limitati; per questi ultimi si intende che davanti ad una formula si può scrivere $(\exists v \in x) \dots$ o $(\forall v \in x) \dots$ con x costante o variabile. Daremo più avanti esempi di come si applica tale principio. Superstrutture V' e applicazioni $*$ che godono le proprietà elencate esistono e si possono "costruire" in vari modi facendo uso però in tutti dell'assioma di scelta o al massimo di qualche assioma solo un po' più debole di esso (vedi [1][2][7]).

0.2. Descrizione di ${}^*\mathbf{R}$. Siccome $\mathbf{R}$ è un campo ordinato, anche ${}^*\mathbf{R}$ lo è, per il PT. Tuttavia ${}^*\mathbf{R}$ non è (e non può essere poiché ${}^*\mathbf{R} \supsetneq \mathbf{R}$) archimedeo.

Tale proprietà infatti, non si esprime mediante una formula a cui si può applicare il PT.
Ci sono alcuni sottoinsiemi di ${}^*\mathbf{R}$ limitati superiormente che non ammettono sup. Quali siano gli insiemi limitati per cui esistono gli estremi verrà chiarito nel punto 0.4. Piuttosto qui diamo delle proprietà algebriche di ${}^*\mathbf{R}$ che si trasmettono da $\mathbf{R}$.

Indichiamo con:

$$\Theta({}^*\mathbf{R}) = \{x : x \in {}^*\mathbf{R} \quad \& \quad |x| < n \quad \text{per qualche} \quad n \in \mathbf{N}\}$$

$$\theta({}^*\mathbf{R}) = \{x : x \in {}^*\mathbf{R} \quad \& \quad |x| < \frac{1}{n+1} \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbf{N}\}$$

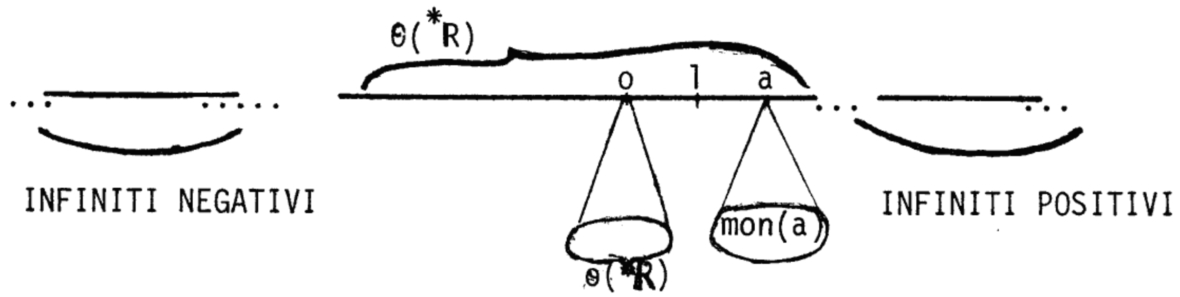
$\Theta({}^*\mathbf{R})$, insieme degli elementi finiti, è un anello ordinato.

$\theta({}^*\mathbf{R})$, insieme degli infinitesimi, è un ideale massimale in tale anello.

Inoltre $\Theta({}^*\mathbb{R})_{\big/ \theta({}^*\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}$. L'omomorfismo canonico $st : \Theta({}^*\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è molto importante per ciò che segue; esso per ogni x finito "sceglie" il numero reale che "più si avvicina" ad x. In altri termini, da $a = st(x)$ segue che $a - x$ è infinitesimo; si scrive anche $a \approx x$. Ogni $a \in \mathbb{R}$ si trova allora in una ed una sola classe laterale $a + \theta({}^*\mathbb{R})$; essa viene chiamata monade di a ($mon(a)$).

Gli elementi di ${}^*\mathbb{R} - \Theta({}^*\mathbb{R})$ sono chiamati <u>infiniti</u>.

Il seguente disegno può illustrare meglio quanto detto.



0.3. <u>Descrizione di ${}^*\mathbb{N}$</u>. Per il PT, anche qui molte proprietà si trasferiscono da $\mathbb{N}$ a ${}^*\mathbb{N}$. Questo è quello che si dice un modello dell'aritmetica peaniana al I° ordine. Non tutti i sottoinsiemi (non vuoti) di ${}^*\mathbb{N}$ ammettono minimo, altrimenti ${}^*\mathbb{N}$ coinciderebbe con $\mathbb{N}$.

Esempio:

${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ non può ammettere minimo. Se a fosse minimo di tale insieme, seguirebbe $a \neq o$, per cui $a - 1 \in {}^*\mathbb{N}$ cosicché $(a-1)+1 \in \mathbb{N}$, il che è assurdo.

Tuttavia certi sottoinsiemi descritti nel punto 0.4 lo ammettono. $\mathbb{N}$ è un segmento iniziale di ${}^*\mathbb{N}$.

Per $n \in \mathbb{N}$ vale la formula $(\forall x_o \in \mathbb{N})\ldots(\forall x_n \in \mathbb{N})\left[\bigwedge_{i=o}^{n} x_i < n \to \bigvee_{i<j} x_i = x_j\right]$;

a plicando allora il PT si ha che vale

$$(\forall x_0 \in {}^*N) \ldots (\forall x_n \in {}^*N) \left[\bigwedge_{i=1}^{n} x_i < n \rightarrow \bigvee_{i<j} x_i = x_j \right] .$$

Inoltre ${}^*N$ è cofinale con ${}^*R$; basta applicare il transfer alla formula

$$(\forall x \in R)(\exists y \in N)(x \leq y) .$$

Ciò ci dice che ${}^*R$ non è archimedeo, bensì ${}^*N$-archimedeo.

0.4. Gli insiemi interni. La $*$ si applica a tutti gli elementi di $\mathbf{V}$.

Se $\mathcal{F}$ è una collezione di insiemi infinita ed $\mathcal{F} \in W$ allora ${}^*\mathcal{F} \supsetneq \{{}^*A : A \in \mathcal{F}\}$.

Gli elementi di ${}^*\mathcal{F}$ sono detti interni, mentre gli elementi che sono immagini secondo $*$ sono detti standard. I sottoinsiemi interni di un dato insieme Y sono gli elementi di ${}^*\mathcal{P}(Y)$. Quest'ultimo insieme è un'algebra di Boole, e se Y è infinito ${}^*\mathcal{P}(Y) \subsetneq \mathcal{P}({}^*Y)$.

Inoltre $* : \mathcal{P}(Y) \rightarrow {}^*\mathcal{P}(Y)$ è un monomorfismo booleano. Per il Principio di Transfer valgono infatti le:

$${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B \quad , \quad {}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$$

$${}^*(A - B) = {}^*A \setminus {}^*B \quad , \quad {}^*\emptyset = \emptyset$$

Inoltre, se $f : A \rightarrow B$, segue ${}^*f : {}^*A \rightarrow {}^*B$; se $H(x,y)$ è una relazione ${}^*(\mathrm{Dom}\ H) = \mathrm{Dom}\ {}^*H$ ${}^*(\mathrm{Rango}\ H) = \mathrm{Rango}\ {}^*H$.

Ci sono alcuni insiemi nella superstruttura V', i quali non solo non stanno nell'immagine di $*$ (cioé sono standard), ma che non sono nemmeno interni (esempio: N, ${}^*N \setminus N$, R etc...).

Siamo interessati a considerare la collezione degli insiemi V' che sono ins emi interni. Questa collezione si chiama Ampliamento Non-standard di V. Gli insiemi interni sono importanti come dimostrano le proposizioni seguenti.

_ roposizione 1 : I sottoinsiemi non vuoti e interni di $^*\mathbb{N}$ ammettono minimo.

roposizione 2 : I sottoinsiemi non vuoti di $^*\mathbb{R}$ interni e limitati superi·ormente ammettono sup.

imostrazione di 1 (2 è simile) : Un sottoinsieme A di $^*\mathbb{N}$ è un elemento di $^*\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Allora si applichi il PT alla formula:

$$(\forall A \in \mathcal{P}(N)\ [A \neq \emptyset \to (\exists y \in A)(\forall z \in A)(y \leq z)] .$$

0.5. Gli insiemi $*$-finiti. Dato un insieme Y, hanno particolare importanza i sottoinsiemi interni di $^*Y$ che si possono mettere in corrispondenza biunivcca mediante una funzione interna, con un segmento di $^*\mathbb{N}$. Essi sono detti $*$ - initi. Si possono ovviamente descrivere anche nella seguente maniera. Sia $\mathcal{P}_f$ Y) l'insieme dei sottoinsiemi finiti di Y. Ogni insieme $*$-finito appartie e a $^*\mathcal{P}_f(Y)$. La funzione $\|\ \|: \mathcal{P}_f(Y) \to N$ che associa ad ogni elemento l.. sua cardinalità si estende ad una funzione, sempre denotata $\|\ \| : {}^*\mathcal{P}_f(Y) \to {}^*N$.

Con il PT si possono dimostrare le seguenti

Proposizione 3 : Ogni sottoinsieme interno di un insieme $*$ finito è $*$-finito.

Froposizione 4 : S: A, B sono $*$ finiti e $A \subseteq B$ allora $\|A\| \leq \|B\|$.

0.6. Allargamenti - Fra gli ampliamenti non standard di V ci interessano qu lli detti ALLARGAMENTI, che godono una ulteriore proprietà. Essi sono defini i mediante una de le condizioni equivalenti date dalla proposizione 5 che se ue. Una relazione $H(x,y)$ appartenente a V si dice concorrente se

$$\forall x_1, \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y \quad H(x_1,y) \,\&\, H(x_2,y) \ldots \&\, H(x_n,y) .$$

Si dice che essa è saturata nell'ampliamento non standard se esiste un $v \in {}^*(\text{Rango } H)$ tale che vale

$$^*H(^*x,v) \quad \text{per ogni} \quad x \in (\text{Dom } H)$$

Esempio: Sia $\mathfrak{F}$ un filtro proprio e $H(A,B)$ definita da

$$A \in \mathfrak{F} \quad \& \quad B \in \mathfrak{F} \qquad \& \qquad A \supseteq B$$

Manifestamente, H è concorrente. Che H sia saturata vuol dire che esiste un $D \in {}^*\mathfrak{F}$ tale che $^*H(^*A,D)$ per ogni $A \in \mathfrak{F}$. Ciò vuol dire che, in particolare $\bigcap \{^*A : A \in \mathfrak{F}\} \neq \emptyset$. Quest'ultima proprietà richiesta per tutti i filtri propri è un'altra proprietà che caratterizza gli allargamenti.

Proposizione 5 : Per un ampliamento non-standardsono equivalenti:

(i) Per ogni insieme Y esiste un insieme $*$-finito F tale che $^\sigma Y \subseteq F \subseteq {}^*Y$, dove $^\sigma Y = \{^*y : y \in Y\}$.

(ii) Ogni filtro $\mathfrak{F}$ è tale che $\bigcap\{^*A : A \in \mathfrak{F}\} \neq \emptyset$.

(iii) Ogni relazione H concorrente è saturata (ovviamente, Y, $\mathfrak{F}$, H) sono elementi di V).

Osservazione: La proprietà (i) è quella che, come si dice in gergo, permette di approssimare gli insiemi infiniti dal di sopra.

Essa è soprattutto utile in aree dove i problemi sono di natura discreta, ma i metcdi sono continui perché può ridurre certe dimostrazioni a dimostrazioni puram nte combinatorie (vedi parte II 2.1, prop. 6, e [10], [13], [32] § 7).

1. ULLA RAPPRESENTAZ.ONE NON-STANDARD DELLE MISURE E DEI FUNZIONALI.

hiameremo misura initamente additiva (abbr. m.f.a.) una funzione d'insie e m definita su una algebra di sottoinsiemi di un dato insieme X, a val ri nella retta reale estesa $\bar{R}^+ = \{x : x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$, tale che:

(1.1) $$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \qquad \text{se} \quad A \cap B = \emptyset$$

(1.2) $$m(\emptyset) = 0$$

Se in più $m(X) = 1$, essa si dirà misura di probabilità finitamente additiva (abbr. m.p.f.a.).

Sia dato un insieme X che pensiamo essere sulla base di una superstruttura. Si consideri un insieme F $*$-finito, $F \subseteq {}^*X$. Definiamo una funzione d'insieme

(1.3) $$c_F : {}^*\mathcal{P}(X) \to {}^*[0,1]$$

mediante

(1.4) $$c_F(Y) = \frac{||Y \cap F||}{||F||}, \qquad Y \in {}^*\mathcal{P}(X)$$

Per le proposizioni 3 e 4, $Y \cap F$ è $*$-finito e $||Y \cap F|| \leq ||F||$, per cui $c_F(Y) \in {}^*[0,1]$.

Proprietà:

(1.5) $$Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \Longrightarrow c_F(Y_1 \cup Y_2) = c_F(Y_1) + c_F(Y_2)$$

(1.6) $$c_F({}^*X) = 1$$

Se X è infinito (come sempre supporremo per non cadere in casi banali) possiamo prendere F tale che $||F|| \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$; in tal caso vale anche

(1.7) $\qquad c_F(A) \approx 0 \qquad$ se $\quad A$ è <u>finito</u>.

Mediante c_F possiamo definire una m.p.f.a. $m_F : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ attraverso il seguente diagramma:

(1.8)
$$\begin{tikzcd}
{}^*\mathcal{P}(X) \arrow[r, "c_F"] & {}^*[0,1] \arrow[d, "st"] \\
\mathcal{P}(X) \arrow[u, "*"] \arrow[r, dashed, "m_F"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Cioé, per ogni $A \subseteq X$, $m_F(A) = st\ c_F({}^*A)$.

Ricordando che $*$ è un omomorfismo booleano di $\mathcal{P}(X)$ in ${}^*\mathcal{P}(X)$, che **st** di $\theta({}^*\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$, dalle proprietà (1.5), (1.6) si ricava che m_F è una m.p.f.a. definita su $\mathcal{P}(X)$ e nulla sugli insiemi finiti qualora $||F|| \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

<u>Osservazione</u>. $c_F \circ * : \mathcal{P}(X) \to {}^*[0,1]$ è una "misura" di prob. f.a. a valori in ${}^*[0,1]$. Se lavoriamo in un allargamento non-standard, si può prendere F $*$-finito tale che $X \subseteq F \subseteq {}^*X$. In tal caso, se $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ $\quad {}^*A \cap F \neq \emptyset$; così $\quad ||{}^*A \cap F|| \neq 0$. Cioé: <u>$c_F \circ *$ si annulla solo sull'insieme vuoto.</u>

Gli insiemi di misura nulla secondo m_F vengono ad avere misura infinitesima secondo $c_F \circ *$. Una teoria quantitativa del "grado" di misura nulla di un insieme viene affrontata nella seconda parte di [26].

A questo punto enunciamo un teorema di rappresentazione che afferma che ogni m.p.f.a. definita su $\mathcal{P}(X)$, o meglio su una sottoalgebra $\mathbb{B}$ di $\mathcal{P}(X)$, e nulla sui punti, si può ottenere come descritto prima.

TEOREMA 1 : Si consideri $(X,\mathcal{B},m)$, dove X è un insieme infinito, $\mathcal{B}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{P}(X)$, $m : \mathcal{B} \to [0,1]$ è una m.p.f.a. nulla sui punti. Allora esiste un F $*$-finito, $X \subseteq F \subseteq {}^*X$, tale che $m = m_F$.

Un cenno della dimostrazione di tale teorema sarà dato più avanti, per ora discutiamolo un po'.

Osservazione 1.1. Innanzitutto si ritrova un noto risultato che dice che ogni misura definita su una sottoalgebra si può estendere ad una m.f.a. definita su tutto $\mathcal{P}(X)$. Veramente il teorema 1 è stato enunciato solo per misure di probabilità, ma un teorema analogo anche per misure a valori sulla retta estesa verrà dato più avanti.

Osservazione 1.2. Insiemi $*$-finiti diversi E,F possono dar luogo a $m_E = m_F$. Vale infatti: se E,F sono due insiemi $*$-finiti tali che $F \subseteq E$, $\frac{||F||}{||E||} \approx 1$, allora $m_F = m_E$ (più in generale basterebbe $\frac{||E \cap F||}{||E||} \approx 1$)

$$\text{Verifica : } \frac{||{}^*A \cap E||}{||E||} - \frac{||{}^*A \cap F||}{||E||} \leq \frac{||E-F||}{||E||} = \frac{||E|| - ||F||}{||E||} \approx 0$$

$$\text{Per cui } \quad c_F({}^*A) = \frac{||{}^*A \cap F||}{||F||} = \frac{||{}^*A \cap F||}{||E||} \cdot \frac{||E||}{||F||} \approx \frac{||{}^*A \cap F||}{||E||} \approx \frac{||{}^*A \cap E||}{||E||} = c_E({}^*A)$$

Osservazione 1.3. Anche l'integrale ha una rappresentazione non-standard data da:

Se f è una funzione limitata su X, cioè appartenente allo spazio di Banach delle funzioni limitate, da noi denotato $B(X)$, ed è integrale secondo m, ed F è un qualunque $*$-finito per cui $m = m_F$ allora

$$(1.9) \qquad \int f\,dm = st\left(\frac{1}{||F||} \sum_{p\in F} {}^*f(p) \right)$$

Si noti che i sottoinsiemi $*$-finiti di ${}^*R$, come è $\{{}^*f(p) : p \in F\}$, si lasciano sommare; più precisamente l'operazione di Σ definita su $\mathcal{P}_f(R)$ si estende a ${}^*\mathcal{P}_f(R)$.

La (1.9) si dimostra facilmente osservando che il funzionale a secondo membro coincide con il primo sullo spazio delle funzioni semplici. Il funzionale a secondo membro è definito su tutto $B(X)$; così si ottiene una estensione di $\int$ a tutto lo spazio.

Tale risultato, come pure il risultato ricordato nell'osservazione 1.1., è ovviamente noto ed è dimostrabile col teorema di estensione di Hahn-Banach.

In questo contesto esso sembra non far uso dell'assioma di scelta. Si ricordi invece che lavoriamo in un allargamento non-standard e che, senza l'assioma di scelta o per lo meno formulazioni un po' più deboli di esso (teorema dell'ultrafiltro), non si possono ottenere modelli non-standard.

Osservazione 1.4. La rappresentazione dell'integrale per le funzioni illimitate non è così generale come per le funzioni limitate. Sia $(X,\mathcal{B},m)$ uno spazio di misura, con $\mathcal{B}$ σ-algebra e m probabilità σ-additiva definita su $\mathcal{B}$. Se $f : X \to \bar{R}$ è una funzione non-limitata e integrabile, può non valere (1.9) per ogni F per cui $m = m_F$. Tuttavia si può scegliere opportuni F per cui la (1.9) continua a valere per tutte le funzioni integrabili.

Per ottenere una dimostrazione di quanto detto nell'osservazione 1.4., si può far riferimento ad un Teorema più generale di rappresentazione dell'integrale, fatto rispetto ad una σ-misura non in generale finita (a valori in $\overline{R^+}$).

<u>TEOREMA 2</u>: Sia $(X,\mathcal{B},m)$ uno spazio di misura, con $\mathcal{B}$ σ-algebra, m σ-additiva e zero sui punti. Allora esiste un insieme $*$-finito F, $X \subseteq F \subseteq {}^*X$, un $\omega \in {}^*N \setminus N$ tale che

$$\int f\,dm \approx \frac{1}{\omega} \sum_{p \in F} {}^*f(p) \qquad (\approx \text{ è definita in } \overline{{}^*R} = {}^*R \cup \{-\infty,+\infty\})$$

per tutte le funzioni su X misurabili e aventi valori in $\bar{R} = R \cup \{-\infty,+\infty\}$.

<u>COROLLARIO</u>: Nel caso che m sia una probabilità si può prendere $\omega = F$.

<u>Dimostrazione</u>. In tal caso infatti $1 = \int 1\,dm \approx \frac{\|F\|}{\omega}$.

Per dare uno sketch della dimostrazione del Teorema 2 enunciamo un Lemma che è la chiave di esso.

<u>LEMMA 1 :</u> Sia $(X,\mathcal{B},m)$ uno spazio di misura, come nel Teorema 1. Si indichi con S lo spazio delle funzioni positive misurabili, con S_I lo spazio delle funzioni positive integrabili ($f \in S_I \Longrightarrow \int f dm < +\infty$).

Siano $f_1, f_2, \ldots f_k \in S_I$, $f_{k+1}, \ldots f_n \in S \setminus S_I$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, $K \in \mathbf{N}$ e $G \subseteq X$, G finito.

Allora esistono un sottoinsieme finito $F \subseteq X$ tale che $G \subseteq F$ e un numero naturale $r \in \mathbf{N}$ tale che

$$\left| T_{F,r}(f_i) - \int f_i\,dm \right| < \varepsilon \qquad i = 1,\ldots k.$$

$$T_{F,r}(f_i) \geq K \qquad i = k+1,\ldots,n$$

dove
$$T_{F,r}(f) = \frac{1}{r} \sum_{x \in F} f(x)$$

Sketch della dimostrazione del Teorema 2:

Sarà sufficiente considerare le funzioni non negative; per il caso generale si tenga presente la decomposizione $f = f^{+} - f^{-}$. Si considera una relazione binaria $H(x,y)$ definita dalla congiunzione delle seguenti formule:

H1) $x = \langle f,\varepsilon,K,a \rangle \in S \times R^{+} \setminus \{0\} \times \mathbb{N} \times \mathfrak{X}$

H2) $y = (F,r) \in \mathcal{P}_f(X) \times \mathbb{N}$

H3) $a \in F$

H4) $f \in S_I \rightarrow |T_{F,r}(f) - \int f dm| < \varepsilon$

H5) $f \in S \setminus S_I \rightarrow T_{F,r}(f) \geq K$

Il Lemma 1 dimostra che $H(x,y)$ è concorrente; cioè :

dati $x_1,\ldots x_n$, esiste y tale che

$$H(x_1,y) \,\&\, H(x_2 y) \,\&\, \ldots \ldots \,\&\, H(x_n,y)$$

Allora, poiché lavoriamo in un allargamento, deve esistere un $y \in {}^*(\text{Rango } H)$ tale che vale

$$H({}^*x,y) \qquad \text{per ogni} \quad x \in \text{Dom } H.$$

Per H2) e il Principio di Transfer $y = (F,\omega)$ con $F \in {}^*\mathcal{P}_f(X)$, $\omega \in {}^*\mathbb{N}$.

Le condizioni H1) —— H5) e il Principio di Transfer danno il risultato.

Osservazioni e conclusioni.

Il Teorema 1 è stato dimostrato per la prima volta da Bernstein e Wattemberg [17], intorno al 1969, per la misura di Lebesgue su [0,1]. Essi hanno dimostrato in più che l'insieme F può essere preso in modo tale che m_F risulti una estensione invariante per traslazioni (mod. 1), ritrovando pertanto il vecchio [15] risultato di Banach. Verso il 1972 Henson [25] ha dimostrato tale teorema in forma generale seguendo una diversa linea, e inoltre il teorema di rappresentazione per gli integrali, nel caso illimitato da noi discusso nell'osservazione 1.4.

Una dimostrazione dello stesso Teorema 1 è stata data da Bonacini e Meloni [18] seguendo la linea di Bernstein - Wattemberg, ma semplificandola.

La tecnica di codesto Teorema è simile a quella sopra delineata per dimostrare il Teorema 2. Si dimostra dapprima un Lemma, analogo al Lemma 1, nel quale si considerano le funzioni semplici in luogo delle funzioni misurabili, e poi si dimostra il teorema usando una certa relazione concorrente.

Il teorema 1, insieme al teorema 2 e a molti altri teoremi di rappresentazione di forme lineari, si trova nell'articolo [35] di M. SAITO. Nella prima parte di tale articolo si trova un teorema di rappresentazione di applicazioni lineari in un contesto abbastanza generale. Da esso si ottiene un Corollario già dimostrato da Luxemburg [31], che vale la pena di ricordare.

<u>TEOREMA 3</u>: Sia K un campo topologico e X uno spazio vettoriale topologico sopra K.

Sia X' lo spazio delle forme lineari continue su X. Allora per ogni forma lineare P su X' esiste un punto $v_P \in {}^*X$ tale che

$$P(f) = {}^*f(v_P)$$

Da tale teorema si ha il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail] & X'' \arrow[d, tail] \\ & {}^*X \end{tikzcd}$$

Tale risultato fa tornare indietro ad un articolo [34] sulla rappresentazione non-standard dei funzionali sullo spazio ℓ^∞, scaturito dalla <u>sorgente più a monte e forse più rigogliosa delle idee</u> sopra esposte: Abraham ROBINSON (1918-1974)

METODI NON STANDARD IN TEORIA DELLA MISURA.

PARTE II

PREMESSA.

Gli insiemi $*$-finiti sono "in generale" insiemi infiniti, ma possiedono quasi tutte le proprietà formali degli insiemi finiti. Essi si sono rivelati utili per approssimare fenomeni discreti e finiti, ma che, essendo "grandi", per loro natura avrebbero bisogno di metodi continui. Esempi di questi sono il processo infinitesimale di Poisson (Loeb [30]), la costruzione di Anderson del moto Browniano [9][10], le equazioni alle differenze infinitesime nei processi stocastici, studiate da Keisler [28][29] e molti altri modelli in economia [33] a cominciare da Brown e Robinson [19][20] fino alla dimostrazione della Congettura di Edgworth da parte di Anderson [13].

La chiave di molti dei sopraelencati risultati è il Teorema di Loeb [30] che noi illustreremo e discuteremo nel paragrafo 2.2.. Nel paragrafo 2.1. vogliamo dare un esempio di come si possano usare insiemi $*$-finiti per costruire misure invarianti.

2.0. Superstrutture sopra un insieme S (riesaminate).

Ora definiamo meglio di quanto non abbiamo fatto prima il concetto di superstruttura sopra un insieme S. Si definisca per ricorrenza

$$V_0(S) = S \ , \ V_{n+1}(S) = V_n(S) \cup \mathcal{P}(V_n(S))$$

$$V(S) = \bigcup_{n \in N} V_n(S)$$

Si assume che $\emptyset \notin S$ e che ogni $x \in S$ sia disgiunto da $V(S)$.
Per formula limitata si intende una formula del primo ordine dove i quantificatori sono del tipo $(\forall v \in x)$, $(\exists v \in x)$ con x variabile o costante.
Assumeremo che:

(i) ${}^*S$ sia una estensione propria di S.

(ii) $*$ è una applicazione di $V(S)$ in $V({}^*S)$ che è l'identità su S e preserva la verità delle formule limitate (Principio di Transfer).

L'insieme ${}^{\circledast}V(S) = \bigcup_{n\in N} {}^*V_n(S)$ sarà detto l'insieme degli elementi interni o anche ampliamento non-standard di $V(S)$.

Supporremo inoltre che $S \supseteq \mathbb{R}$ e che ${}^{\circledast}V(S)$ sia un allargamento (vedi parte I°) con in più la seguente proprietà, detta principio di comprensione contabile (vedi [7] pag. 180):

(iii) Se $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia (esterna) di elementi interni $A_n \in {}^*\mathcal{J}$, allora esiste una estensione interna di tale successione $\{A_\nu : \nu \in {}^*\mathbb{N}\}$

Conviene anche ricordare il seguente principio, utile per la costruzione di insiemi interni:

PRINCIPIO DI DEFINIZIONE INTERNA (abbr. PDI):

Sia $\phi(v_1,v_2,\dots v_n,v)$ una formula limitata e $A_1,\dots A_n,A$ elementi interni; allora

$$\{a : a \in A \ , \ \phi(A_1,\dots A_n,a) \quad \text{è vero}\}$$

è un insieme interno.

Infine facciamo la seguente

Osservazione 2.0.1. Se $R(x_1,\dots x_k)$ è una relazione interna definita su ${}^*\mathbb{N}$ e se vale $R(n_1,\dots n_k)$ per ogni $n_i \in \mathbb{N}$, allora esiste un $\omega \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ tale che $R(x_1,\dots x_k)$ vale per ogni $x_i \in {}^*\mathbb{N}$, $x_i \leq \omega$, $i = 1,\dots k$.

Per verificare ciò si consideri l'insieme interno (per il PDI) A definito da:

$$A = \{x : x \in {}^*\mathbb{N} \;\&\; (\forall v_1 \dots v_n \in {}^*\mathbb{N})[\bigwedge_{i=1}^{n} v_i \leq x \rightarrow R(v_1 \dots v_n)]\}$$

Se $B = {}^*\mathbb{N} \setminus A$ è vuoto, qualunque ω va bene. Altrimenti B ammette minimo ν che non può essere in $\mathbb{N}$; allora basta prendere $\omega = \nu - 1$.

2.1. MISURE INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI.

In un articolo uscito nell'ultimo Boll. U.M.I. [21] F. Chersi dimostra che, se $\{T_i : i \in I\}$ è una famiglia di applicazioni di X in sé a due a due permutabili, allora esiste una m.p.f.a. su X invariante per tutte le T_i.

Tale risultato è stato dimostrato con metodi standard facendo appello al teorema del punto fisso di Markov-Kakutani (vedi [23] pag. 456).

Vediamo come si può dimostrare un tale risultato secondo le idee fin qui esposte.

Trovare una massa su X invariante per tale famiglia equivale a trovarne una invariante per il semigruppo abeliano H che essa genera.

Supponiamo che X ed $\mathbb{R}$ si trovino sulla base di una superstruttura. Si consideri un suo allargamento che gode il principio di comprensione contabile. Sia F un insieme $*$-finito tale che

$${}^\sigma H \subseteq F \subseteq {}^*H \qquad , \qquad \text{dove} \qquad {}^\sigma H = \{{}^*T : T \in H\} \ .$$

Se $||F|| = \eta$, si denoti $F = \{S_1, S_2, \dots S_\eta\}$. Infine, per ogni $S \in {}^*H$ si estenda, per il principio di comprensione, la successione $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ ad una successione interna $\{S^\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$. Si consideri ora l'insieme interno (per il PDI):

$$A = \{\omega : \omega \in {}^*\mathbb{N} \ , \ \forall \nu_1 \dots \nu_\eta \in \{0,1,\dots \omega-1\}^\eta \left(S_1^{\nu_1} \circ S_2^{\nu_2} \circ \dots \circ S_\eta^{\nu_\eta} \in {}^*H\right)\}$$

Poiché (per il PT) $^*H$ è un semigruppo abeliano chiuso rispetto a prodotti di sottoinsiemi $*$-finiti, segue $N \subseteq A$. Si fissi allora un $\omega \in {}^*N \smallsetminus N$ e $\omega \in A$; un tale ω esiste per l'osservazione 2.0.1. Per dimostrare ciò che vogliamo, sarà sufficiente provare la seguente

PROPOSIZIONE 6 : Sia L un funzionale lineare monotono normalizzato sullo spazio $B(X)$ delle funzioni limitate su X. Allora esiste un funzionale lineare monotono normalizzato M su $B(X)$ tale che:

(i) $\qquad M(f \circ T) = M(f) \qquad \forall\, T \in H$

(ii) $\qquad$ Se $L(f \circ T) = L(f) \qquad \forall\, T \in H$

allora $\qquad M(f) = L(f)$.

Dimostrazione. Si definisca M con

$$(2.1) \qquad M(f) = st\left[\omega^{-\eta} \sum_{\nu_1 \ldots \nu_\eta} {}^*L({}^*f \circ S_1^{\nu_1} \circ S_2^{\nu_2} \circ \ldots \circ S_\eta^{\nu_\eta})\right]$$

dove $\sum\limits_{\nu_1 \ldots \nu_2}$ viene presa su tutte le possibili successioni interne $\nu_1 \ldots \nu_\eta$ con $0 \leq \nu_i < \omega$.

Verifica di (i). Sia $T \in H$: allora $^*T = S_i$ per qualche $1 \leq i \leq \eta$, perché $^\sigma H \subseteq F$. Allora

$$|M(f \circ T) - M(f)| = st\left(\omega^{-\eta}\left|\sum_{\nu_1 \ldots \nu_\eta} {}^*L\,({}^*f \circ S_i \circ S_1^{\nu_1} \circ \ldots S_\eta^{\nu_\eta}) - {}^*L({}^*f \circ S_1^{\nu_1} \circ \ldots \circ S_\eta^{\nu_\eta})\right|\right) =$$

$$= st\left(\omega^{-\eta}\left|\sum_{\nu_1 \ldots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \ldots \nu_\eta} {}^*L({}^*f \circ S_1^{\nu_1} \circ \ldots \circ S_i^{\omega} \circ \ldots S_\eta^{\nu_\eta}) - {}^*L({}^*f \circ S_1^{\nu_1} \circ \ldots S_i^{0} \ldots S_\eta^{\nu_\eta})\right|\right) \leq$$

$$\lesssim st\left\{\omega^{-\eta}\sum_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}\nu_{i+1}\nu_\eta}||f|| + ||f||\right\} = st\left\{\omega^{-\eta}\cdot\omega^{\eta-1}\cdot 2\,||f||\right\} =$$

$$= st\left\{\frac{2||f||}{\omega}\right\} = 0$$

dove $||f||$ è la norma di f in $B(X)$.

Verifica di (ii). Se per ogni $T \in H$ si ha $L(f \circ T) = L(f)$, allora per ogni $S \in {}^*H$ si ha ${}^*L({}^*f \circ S) = {}^*L({}^*f)$, a causa del PT. Dunque

$${}^*L({}^*f \circ S_1^{\nu_1} \circ \ldots S_\eta^{\nu_\eta}) = {}^*L({}^*f) .$$

Per cui

$$M(f) = st\left[\omega^{-\eta}\sum_{\nu_1\ldots\nu_\eta}{}^*L({}^*f)\right] = st\left[\omega^{-\eta}\cdot\omega^{\eta}\,L(f)\right] = L(f)$$

(Si noti il carattere combinatorio della dimostrazione!).

Dalla Proposizione 6 si può dedurre il noto risultato sull'estensione della misura di Lebesgue su $[0,1]$ ad una m.p.f.a. invariante per traslazioni (mod. 1). Infatti sia L un funzionale che estende $\int f d\lambda$, con λ misura di Lebesgue,(vedi parte I°); il resto segue dal fatto che il gruppo delle traslazioni è abeliano.

2.2. IL TEOREMA DI LOEB.

Nella I° parte si è visto come ogni m.p.f.a. su X possa essere "sollevata" ad una m.p.f.a. sull'algebra ${}^*\mathcal{P}(X)$ attraverso il diagramma (1.8).

Partiremo ora da una situazione un po' più generale, supponendo di avere una terna $(A, \mathcal{B}, m)$, dove A è un insieme interno, $\mathcal{B}$ un'algebra di sottoinsiemi interni di A e $m: \mathcal{B} \to {}^*\overline{R^+}$ è una funzione interna tale che

(i) $\quad m(\emptyset) = 0$

(ii) $\quad m(Y_1 \cup Y_2) = m(Y_1) + m(Y_2) \quad$ per $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$.

Attraverso m si può definire una misura finitamente additiva $°m$ su $\mathcal{B}$, a valori in $\overline{R^+}$, con

$$°m(Y) = \begin{cases} st(m(Y)) & \text{se } m(Y) \text{ è finito} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si indichi con $L(\mathcal{B})$ la minima σ-algebra di sottoinsiemi (esterni) di A contenente $\mathcal{B}$.

<u>TEOREMA 4</u>: La m.f.a. $°m$ si può estendere in modo <u>unico</u> ad una misura σ-additiva $L(m)$ definita sulla σ-algebra $L(\mathcal{B})$ tale che

(i) $\quad L(m)(B) = m(B) \quad$ per ogni $B \in \mathcal{B}$

(ii) $\quad L(m)(Y) = \inf\{°m(B) : B \in \mathcal{B}, B \supseteq Y\}$

(iii) $\quad$ Se $L(m)(Y) < +\infty \Longrightarrow L(m)(Y) = \sup\{°m(B) : B \in \mathcal{B}, B \subseteq Y\}$

Si può visualizzare con il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "m"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "°m"] & {}^*\overline{R^+} \arrow[d, "st"] \\ L(\mathcal{B}) \arrow[r, "L(m)"] & \overline{R^+} \end{tikzcd}$$

(Se x è infinito allora $st\ x = +\infty$)

La dimostrazione fa uso del teorema di estensione di Caratheodory e della seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 7. Dato $(A, \mathcal{B})$ con A interno e $\mathcal{B}$ collezione di sottoinsiemi interni di A e dato $B_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, allora esiste k per cui $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} B_n$.

Dimostrazione: Si definisca l'insieme interno (per il PDI)

$$E = \{\nu : \nu \in {}^*\mathbb{N} \quad , \quad B \subseteq \bigcup_{n=o}^{n=\nu} B_n\}.$$

Esso ammette minimo, che non può essere infinito poiché $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Sketch della dimostrazione del Teorema 4: Si formi con $°m$ la misura esterna $\overline{m}$ nel solito modo:

$$\overline{m}(Y) = \inf\{\sum_{n=o}^{\infty} °m(B_n) : \bigcup_{n=o}^{\infty} B_n \supseteq Y \ , \ B_n \in \mathcal{B}\}$$

La proposizione 7 serve a dimostrare che $\overline{m}$ è contabilmente subadditiva, il che dimostra (i).

Verifichiamo (ii). Dato $Y \in L(\mathcal{B})$ con $L(\mu)(Y) < +\infty$ ed $\varepsilon > 0$ esiste $B_n \in \mathcal{B}$, $B_o \subseteq B, \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$ tale che :

$$Y \subseteq C = \bigcup_{n=o}^{\infty} B_n \qquad \text{e} \qquad L(m)(C) < L(m)(Y) + \varepsilon.$$

Si estenda per il principio di comprensione la successione $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ ad una successione interna $\{B_\nu : \nu \in {}^*\mathbb{N}\}$. Per l'osservazione 2.0.1 si può prendere un $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tale che, per ogni λ, $0 \lesssim \lambda \lesssim \omega$, segue $B_\lambda \subseteq B_{\lambda+1}$, e inoltre $m(B_\omega) < L(m)(Y) + \varepsilon$. (Osservare che m è definita su B_ω perché m è interna).

Ma essendo $Y \subsetneq C \subseteq B_\omega$, ne segue che $L(m)(Y) \leq L(m)(B_\omega) < L(m)(Y) + \varepsilon$.

(iii) è simile. Nel caso che $^\circ m$ sia una misura di probabilità, l'unicità della estensione si dimostra abbastanza facilmente (cfr. [30]). Nel caso che $^\circ m$ sia una misura non-limitata, tale dimostrazione è stata data da Henson [26].

2.3. PROBABILITA' FINITAMENTE ADDITIVA o σ-ADDITIVA?

La risposta a tale domanda sembra essere "finitamente additiva"; l'assioma di σ-additività, per una probabilità sembra pesante e innaturale, come de Finetti sostiene in [22].Tra le motivazioni addotte c'è il fatto che una probabilità σ-additiva non può essere definita in generale per tutti gli eventi a causa del teorema di Ulam, e che non si può definire una probabilità uniforme σ-additiva su uno spazio numerabile.
D'altronde non si può escludere il vantaggio tecnico che si ha quando si lavora con una misura σ-additiva. Per ripetere le parole di Halmos([24]) pag. 187) "infinite additivity does not contradict our intuitive ideas, and the theory built on it is <u>sufficiently far developed to assert that the assumption is justified by its success</u>".

Il Teorema di Loeb e i risultati conseguenti ad esso (vedi [10][11][12][28][29]) sembrano dare un'alternativa alla disputa sopra ricordata. Sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ una m.p.f.a.; essa, come abbiamo visto, può essere sollevata ad una funzione di insieme interna $m = {}^*\mu : {}^*\mathcal{P}(X) \to {}^*[0,1]$ per cui $^\circ m = st \circ m$ è una m.p.f.a. su $\mathcal{B} = {}^*\mathcal{P}(X)$. Col teorema di Loeb si estenda $^\circ m$ a $L(m) : L(\mathcal{B}) \to [0,1]$. Allora $L(m)$ è σ-additiva ed è una "buona" misura per lavorare tecnicamente. Dentro $L(\mathcal{B})$ ci sono tutti gli eventi standard; infatti questi sono dentro $\mathcal{B}$, per il fatto che

$\mathcal{B} \supseteq \{{}^*A : A \subseteq X\}$.

(Attenzione! $L(m) \circ *$ non è σ-additiva, in generale: infatti

$$L(m) \circ * = {}^*\mu).$$

Ma c'è di più. Seguendo tale ordine di idee, uno spazio di probabilità può essere definito come una coppia (A, μ), dove A è un insieme $*$-finito e μ è una funzione interna $\mu : A \to {}^*[0,1]$ tale che $\sum_{a\in A}\mu(a) = 1$.

Se B è un sottoinsieme interno di A, si può definire $\mu(B) = \sum_{a\in B}\mu(a)$.

Una probabilità uniforme è una μ tale che $\mu\{a\} = \dfrac{1}{||A||}$.

Così una variabile aleatoria è una funzione interna $f : A \to {}^*\mathbb{R}$. Se f è a valori finiti, il valore atteso è dato da $E(f) = st \sum_{a\in A} f(a)\cdot\mu(a)$.

Le definizioni date sopra sono giustificate dai teoremi seguenti (vedi [29] pag. 11). Si indichi con $\mathcal{B}$ l'algebra dei sottoinsieme di A, con $L(\mathcal{B})$ la minima σ-algebra contenente $\mathcal{B}$ e con $L(\mu)$ l'estensione di μ data dal Teorema di Loeb.

<u>TEOREMA 5</u> : Data $f : A \to \mathbb{R}$ sono equivalenti

(i) f è $L(\mu)$-misurabile.

(ii) Esiste una funzione interna $g : A \to {}^*\mathbb{R}$ tale che $st(g(a)) = f(a)$ per quasi tutti (risp. a $L(\mu)$ gli $a \in A$.

<u>TEOREMA 6</u> : Sia $f : A \to {}^*\mathbb{R}$ una funzione interna tale che $f(a)$ è finito e sia $°f(a) = st(f(a))$ quasi dappertutto. Allora

$$\int °f \, d\, L(m) = st \sum_{a\in A} f(a)\mu(a).$$

Per come vadano a finire le cose seguendo tale ordine di idee, si veda [14] [16] [29] .

2.4. Rappresentazione della misura di Lebesgue.

Useremo ora il Teorema di Loeb per rappresentare la misura di Lebesgue su $[0,1]$, come è stato fatto da Anderson [9] ,[10]. Tale rappresentazione si è rivelata utile, perché è in un certo senso una rappresentazione "discreta", come preciseremo più avanti.

Sia $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, e si divida l'intervallo ${}^*[0,1]$ (dove si pensa 0 identificato con 1) con una partizione $*$-finita in ω parti

$$\{[0, \frac{1}{\omega}) ; [\frac{1}{\omega}, \frac{2}{\omega}); \ldots [\frac{\nu}{\omega}, \frac{\nu+1}{\omega}); \ldots [\frac{\omega-1}{\omega}, \omega)\}$$

Sia $\mathcal{B}$ l'algebra dei blocchi interni (unioni $*$-finite di tali intervalli) generata da tale partizione. Si definisca una probabilità uniforme m su $\mathcal{B}$ ponendo

$$m [\frac{\nu}{\omega}, \frac{\nu+1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} .$$

Il teorema di Loeb dà una misura σ-additiva $L(m)$ definita sulla σ-algebra $L(\mathcal{B})$.

Si consideri allora

$$\mathfrak{L} = \{ X : X \subseteq [0,1] , st^{-1}(X) \in L(\mathcal{B})\}$$

Dimostriamo che:

(i) $\mathfrak{L}$ è una σ-algebra contenente i Boreliani

(ii) Definendo $\lambda(X) = L(m)(st^{-1}(X))$, si ha che λ è la misura di Lebesgue.

Diamo solo uno sketch della dimostrazione di (i) e (ii); per i dettagli vedere [9] ,[10],[11] , dove si prova che ogni misura di Radon su uno spazio compatto si può rappresentare analogamente a quanto si fa per la misura

di Lebesgue.
In [27] si trova una discussione di quali siano gli spazi topologici X per cui st_X^{-1} porta Boreliani di X in insiemi che stanno in $L({}^*\mathcal{P}(X))$.

Dimostrazione di (i). Per semplicità supporremo $\omega = \eta!$, con $\eta \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$.

$\mathcal{L}$ è una σ-algebra poiché lo è $L(\mathcal{B})$. Basta allora vedere che $\mathcal{L}$ contiene intervalli della forma $[a,b)$. Poiché esistono successioni di numeri razionali

$$a_1 \lesssim a_2 \lesssim \dots \lesssim a_n \lesssim \dots \lesssim a$$

$$b_1 \lesssim b_2 \lesssim \dots \lesssim b_m \lesssim \dots \lesssim b$$

tali che

$$[a,b) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} [a_n,b_m) \qquad ,$$

è sufficiente dimostrare che, per a,b razionali, $st^{-1}[a,b) \in L(\mathcal{B})$.

Osserviamo ora che, se $\frac{m}{n} \in [0,1]$, $\frac{m}{n} = \frac{\nu}{\omega}$ con $0 \lesssim \nu \lesssim \omega$, essendo $\frac{\omega}{n} \in {}^*\mathbb{N}$. Denotiamo, per $x \in [0,1]$,

$$q(x) = \{y : y \in {}^*[0,1],\ y < x\ ,\ y \approx x\}$$

Sia $[a,b) \subseteq [0,1]$, con a,b razionali per cui $a = \frac{\nu_1}{\omega}$, $b = \frac{\nu_2}{\omega}$. Allora

$$st^{-1}[a,b) = \left(\left[\frac{\nu_1}{\omega}\ ,\ \frac{\nu_2}{\omega}\right) \setminus q(b)\right) \cup q(a)$$

Poiché $\left[\frac{\nu_1}{\omega}\ ,\ \frac{\nu_2}{\omega}\right) \in \mathcal{B}$, è sufficiente dimostrare che, per ogni razionale

$0 < a \leq 1$, $q(a) \in L(\mathcal{B})$.

Si prenda $k \in \mathbf{N}$ tale che $0 < \frac{1}{k} < a$ e $\nu \in {}^*\mathbf{N}$ tale che $a = \frac{\nu}{\omega}$

Ne segue

$$q(a) = \bigcap_{n \geq k} \left[\frac{\nu - \frac{\omega}{n}}{\omega}, \frac{\nu}{\omega} \right)$$

per cui $q(a) \in L(\mathcal{B})$.

Per dimostrare (ii) si tiene conto del fatto che per ogni intervallo $[a,b)$ è $\lambda[a,b) = b - a$, e poi si procede in modo ovvio.

La rappresentazione sopra descritta si è rivelata utile (vedi [10][13]) per la costruzione del moto Browniano e per una dimostrazione del tutto combinatoria della congettura di Edworth. L'utilità viene proprio dal Teorema 6 e dal fatto che, se $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ è misurabile secondo Lebesgue, allora

${}^\circ g = st \cdot {}^*g : {}^*[0,1] \to \mathbf{R}$ è $L(m)$-misurabile ed è costante sugli intervalli

$[\frac{\nu}{\omega}, \frac{\nu+1}{\omega})$.

B I B L I O G R A F I A

La bibliografia si riferisce alla parte generale e agli articoli direttamente citati.

Chi fosse interessato ad una Bibliografia completa in Analisi Nonstandard può scrivere (mandando un dollaro) a:

D. RANDOLPH JOHNSON, Dept. of Math. and Statistics,
University of Pittsburgh, Pittsburgh, Pennsylvania 15260.

PARTE GENERALE.

[1] M. DAVIS, Applied Nonstandard Analysis, Wiley & Sons (1977)

[2] A. GIANNONE, Un'introduzione ai metodi non-standard attraverso le misure semplicemente additive, Period. di Matem. (in corso di stampa).

[3] H.J.KEISLER, Foundations of Infinitesimal Calculus, Prindle, Weber (1976).

[4] G.LOLLI, Non-standard Analysis, Annual meeting of GNAFA, Rimini (1977).

[5] W.A.J.LUXEMBURG, What is Nonstandard Analysis? MAA Monthly vol. 80 .

[6] A. ROBINSON, Nonstandard Analysis, North-Holland.

[7] K.D.STROYAN-LUXEMBURG, Introduction to the Theory of Infinitesimals, Academic Press(1976).

ARTICOLI CITATI.

[8] ABSTRACTS of LECTURES from the Iowa Workshop and Symposium on Abraham-Robinson's Theory of Infinitesimals (June 1977).

[9] R.M.ANDERSON, Star-finite Probability Theory, PhD Thesis, Yale University(1977

[10] - - - - - - , A Nonstandard Representation for Brownian Motion and Itô Integration, Israel J. Math. (1976) pp. 15-46.

[11] - - - - - - , Star-finite Representation of Measure Spaces, to appear.

[12] R.M.ANDERSON, Weak Convergence of Conditional Random Walks, in preparation.

[13] - - - - - -, Edgeworth's Conjecture in Economies with Classes, to appear.

[14] R.M.ANDERSON-S.RASHID, A Nonstandard Characterization of Weak Convergence, to appear in Proc. AMS.

[15] S.BANACH, Sur le problème de la measure, Fund. Math. 4 (1923) 7 - 33 .

[16] A.R.BERNSTEIN-F.A.LOEB, A Nonstandard Integration Theory for unbounded functions. Victoria Symposium on Nonstandard Analysis, Springer Lectures Notes in Math. 369 (1974).

[17] A.R.BERNSTEIN-F.WATTENBERG, Nonstandard Measure Theory, Application of Model Theory to Algebra,Analysis and Probability, Holt Rinehart & Winston (1969) pp. 171-185.

[18] BONACINI-MELONI, Teoria non-standard delle probabilità, Rend. Ist. Lombardo Sc. Lett., 108 (1974) pp. 811.

[19] D.BROWN-A.ROBINSON, Nonstandard Exchange Economies, Econometrics 43 (1974) pp. 41-55.

[20] - - - - -, The Cores of Large Standard Exchange Economies, J.Economic Theory, 9 (1974) pp. 245-254.

[21] F.CHERSI, Finitely additive invariant measures, Boll. UMI (5) 15A (1978) pp. 176-179.

[22] de FINETTI, Probability, Induction and Statistics, J. Wiley & Sons, London, New York, (1972).

[23] N.DUNFORD-J.T.SCHWARTZ, Linear operators, Part I (1958).

[24] P. HALMOS, Measure Theory, Van Nonstand (1950).

[25] W.HENSON, On the Nonstandard Representation of Measures, Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972) pp. 437-446.

[26] - - - - -, Unbounded Loeb Measures, to appear.

[27] - - - - -, Analytic sets, Baire sets and the standard part map, to appear.

[28] H.J.KEISLER, Infinitesimal Difference Equations and Stochastic Processes, to appear.

[29] - - - - -, Hyperfinite Model Theory, Logic Colloquium'76, North-Holland, Gandy-Hyland (Eds.) (1977).

[30] P.LOEB, Conversion from Nonstandard to Standard Measure Spaces and Application in Probability Theory, Trans. A.M.S. 211 (1975) pp.113-122.

[31] W.A.J.LUXEMBURG, On some concurrent binary relations occurring in Analysis, Contribution to Nonstandard Analysis, North-Holland (1972) pp.85-100.

[32] E. NELSON, Internal Set Theory: A new approach to Nonstandard Analysis, Boll. of the A.M.S. vol 86, No 6 (1977)

[33] S. RASHID, Economies with Infinitely Many Traders, PhD dissertation, Yale University (1976).

[34] A. ROBINSON , On genralized limits and linear functionals, Pacific J. Math. 14 (1964) pp. 269 - 283.

[35] M.SAITO, On the non-standard representation of linear mappings from a function space, to appear in Comm. Math. Univ. Sancti Pauli.