Per un noto teorema di perturbazione [10] pag. 495) anche A_1 genera un semigruppo di operatori lineari e limitati e precisamente il semigruppo:

(2.18) $Z_1(t) = \exp(-at)Z(t)$.

Se vale la (B) risulta anche $Z_1(t)Q \subset Q$.

La versione "mild" del problema (2.17) è

(2.19) $u = P_1 u$

con

(2.20) $P_1 u(t) = w_0(t) + \int_0^t Z_1(t-s)F_1(u(s))ds$

(2.21) $w_0(t) = \exp(-at)\, Z(t)u_0$.

Se F è sufficientemente regolare, l'ipotesi (A') del Lemma (2) è verificata anche per P_1, ma non necessariamente nello stesso intervallo $[0,T]$ e quindi da (B) e (D) segue l'asserto del Lemma (2).

Si ha quindi il seguente

TEOREMA (1). Se del Lemma (2) sono verificate le ipotesi (B)(D) ed (A') per P_1 su un chiuso limitato contenente w_0, allora se $u_0 \in Q$ anche $u(t;u_0) \in Q$ in un opportuno intervallo $[0,T]$.

3. PARTICOLARI TIPI DI OPERATORI F

Al fine di chiarire meglio il metodo tratteremo il problema (1.1) con F di tipo particolare.

Supponiamo inizialmente che per $u,v \in X$ risulti:

(3.1) $|F(u) - F(v)| \leq k(|u| + |v|)\ |u-v|$

(3.2) $|F(u)| \leq k|u|^2$

con k costante positiva.

Tenendo presente che l'ipotesi $A \in G(M,b)$ porta che

(3.3) $|Z(t)| \leq M \exp(bt)$ per $t \geq 0$,

risulta $||v_0|| \leq M \exp(bT)\ |u_0|$ e posto

$$N = M \exp(bt)\ |u_0| + r$$

non appena si prende $u,v \in B_Y(v_0,r)$ risulta

$$||F(u) - F(v)|| \leq 2kN\ ||u - v||$$

$$||F(u)|| \leq kN^2$$

e poi

$$||P(u) - P(v)|| \leq M(\exp(bT)-1)/b\ 2kN\ ||u-v||$$

$$||P(u) - v_0|| \leq M(\exp(bT)-1)/b\ kN^2.$$

Posto:

(3.4) $$p = M(\exp(bT)-1)/b\ 2KN^2/r$$

si ottiene

(3.5) $$||P(u) - P(v)|| \leq p\ ||u-v||$$

(3.6) $$||P(u) - v_0\ || \leq pr.$$

La p riguardata come funzione di T è crescente, inoltre $p(T) \to 0$ se $T \to 0+$, quindi per T sufficientemente piccolo risulta $p = p(T) < 1$ e dopo ciò dalla (3.5) e (3.6) segue che P trasforma $B_Y(v_0,r)$ in sé ed è contrattivo. Per un teorema di punto fisso, esiste una ed una sola soluzione $u \in B_Y(v_o, r)$ dell'equazione (2.7). Pertanto sotto le ipotesi (3.1) e (3.2) è verificata la (A') del Lemma (2).

Supponiamo ora che sia verificata la (D). Risulta per $t \geq 0$

$$|Z_1(t)| \leq M \exp(t(b-a)) . \tag{3.7}$$

Si hanno due casi: $b - a > 0$ oppure $b - a \leq 0$.

Poniamo

$$M_1 = \begin{cases} M \exp(T(b-a)) \, |u_o| & \text{se } b-a>0 \\ M \, |u_o| & \text{se } b-a \leq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Risulta $||w_o|| \leq M_1$ e posto

$$N_1 = M_1 + r$$

si ha se $u, v \in B_Y(w_o, r)$:

$$||F_1(u) - F_1(v)|| \leq (2kN_1+a) \quad ||u-v|| \tag{3.9}$$

$$||F_1(u)|| \leq (kN_1 + a) \, N_1 \tag{3.10}$$

$$||P_1(u) - P_1(v)|| \leq p_1 ||u-v|| \tag{3.11}$$

$$||P_1(u) - w_o|| \leq p_1 r \tag{3.12}$$

con

$$p_1 = M(\exp(T(b-a))-1)/(b-a)(2kN_1+a)N_1/r . \tag{3.13}$$

Anche qui per T opportuno risulterà $p_1 = p_1(T) < 1$ e quindi anche P_1 verifica l'ipotesi (A') del Lemma (2). In generale la costante T relativa a p e quella relativa a p_1 saranno diverse, comunque si osservi che, data la crescenza della funzione $h(x) = (\exp(xT)-1)/x$ per $x = 0$ e $h(o) = T$, risulterà $p_1 \leq p$ se $(2kN_1+a)N_1 \leq 2kN^2$ cioè se

(3.14) $$(N_1+a')N_1 \leq N^2$$

avendo posto $2ka' = a$. Poiché per definizione risulta $N_1 \leq N$, la (3.14) sarà verificata se

(3.15) $$N_1 + a' \leq N.$$

La (3.15) è poi verificata se

(3.16) $$a' \leq M \exp(bT)\ |u_o| - M_1\ .$$

La (3.16) può a volte essere utile per orientare nella scelta di a.

Osserviamo ancora che sicuramente $p_1 \leq p$ se si verificano le seguenti disuguaglianze per $u,v \in C_{rQ}$ con $C_r = B_Y(w_o,r)$:

(3.17) $$||F_1(u)-F_1(v)|| \leq 2kN||u-v||$$

(3.18) $$||F_1(u)|| \leq kN^2\ .$$

In conclusione vale il seguente

TEOREMA (2). Sia $F : X \to X$ verificante le ipotesi (3.1) e (3.2), $A \in G(M,b)$ e sia verificata l'ipotesi (D), allora per ogni $u_o \in X$ esiste ed è unica la soluzione di (2.7) sull'intervallo $[0,T]$; se poi $u_o \in Q$ allora esiste ed è unica la soluzione di (2.7) e risulta $u(t;u_o) \in Q$ per $t \in [0,T_1]$ con T_1 in generale minore di T. Se alle ipotesi precedenti si aggiungono la (3.17) e (3.18) allora si ha lo stesso asserto con $T_1 = T$.

La trattazione fatta per gli operatori F che verificano la (3.1) e la (3.2) può essere generalizzata per gli operatori F che verificano le seguenti disuguaglianze:

(3.19) $$|F(u)-F(v)| \leq f(|u|,|v|)\,|u-v|$$

(3.20) $$|F(u)| \leq g(|u|)$$

con $g(.)$, $f(.,y)$, $f(x,.)$ crescenti. In tal caso se $u,v \in B_Y(v_o,r)$ risulta

(3.21) $$||F(u)-F(v)|| \leq f(N,N)||u-v||$$

(3.22) $$||F(u)|| \leq g(N).$$

Posto allora $h(N) = \max\{f(N,N)\ ,\ g(N)/r\}$ e $p = M(\exp(bT)-1)/b\ h(N)$ risulta

$$||P(u)-P(v)|| \leq p\ ||u-v||$$
$$||P(u)-v_o|| \leq pr.$$

Ora se $h(N)$ come funzione di T è continua, poiché $p(T) \to 0$ se $T \to 0+$ e $p(T) \geq 0$ per $T \geq 0$, esisterà un T' tale che $p(T) < 1$ per $T \in]0,T']$.

La P è allora contrattiva su $B_Y(v_o,r)$ con $T = T'$ e si ha il seguente

TEOREMA (3). Se nel Teorema (2) alle ipotesi (3.1) e (3.2) si sostituiscono le ipotesi (3.19) e (3.20) con f, g ed h del tipo specificato sopra, si ha la stessa tesi.

4. ESEMPI

In [2] si studia il problema (1.1) con $u = u(x,v,w)$; $x \in \underline{R}$; $v,w \in [v_1,v_2]$

$$Au = -v\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w-v}{\tau}u\right)$$

$$F(u) = q\{(J_1u)(J_2u)-uJ_3J_1u\}\ ;\quad q > 0 \quad \text{cost.}$$

$$J_1u = \int_{v_1}^{v_2} u(x,v,w)dw$$