2. Preliminari e risultati principali.

Sia X uno spazio di Banach (reale o complesso) con norma $|\cdot|$ ed A un operatore con dominio $D(A)$ e codominio $R(A)$ in X.

Seguendo T.Kato (cfr. [10] pag. 485), diremo che $A \in \mathcal{G}(M,b)$ se

(2.1) A è lineare, chiuso e $D(A)$ è denso in X.

(2.2) Detto $\rho(A)$ l'insieme risolvente di A, è

$$(b,+\infty) = \{z \in \mathbb{R};\ z > b\} \subset \rho(A) \quad \text{e}$$

$$|(zI-A)^{-k}| \leq M(z-b)^{-k}, \quad z > b,\ k = 1,2,3,\dots$$

(qui $|\cdot|$ è la norma in $\mathcal{B}(X)$ spazio degli operatori lineari e limitati in X).

In questo caso A genera un semigruppo di operatori $\{z(t);\ t \geq 0\}$ lineari e limitati con le seguenti proprietà:

(2.3) $Z(0) = I \quad , Z(t+s) = Z(t)Z(s) \qquad t,s \geq 0$

(2.4) $t \to Z(t)x$ è continua per ogni $x \in X$

(2.5) $t \to Z(t)x$ è derivabile per ogni $x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt} Z(t)x = Z(t)Ax = A\,Z(t)x \qquad t \geq 0$$

(2.6) $|Z(t)| \leq M \exp(bt), \qquad t \geq 0$

A volte $Z(t)$ viene denotato con $\exp(tA)$. Nel seguito supporremo che $A \in \mathcal{G}(M,b)$ con $b \geq 0$. Nel caso in cui $b < 0$ si ottengono risultati migliori in quanto

$$|Z(t)\,x| \leq M \exp(bt)\,|x| \leq M\,|x|\ .$$

E'solo per non dovere esaminare continuamente i due casi, che considereremo quello dei due che presenta maggiori difficoltà (almento dal punto di vista dei calcoli).

Al problema (1.1) si vuole associare l'equazione integrale

(2.7) $u = Pu$

dove

(2.8) $(Pu)(t) = v_0(t) + \int_0^t Z(t-s)F(u(s))ds$

(2.9) $v_0(t) = Z(t)u_0$.

Ogni soluzione della (2.7) è detta una soluzione "mild" della (1.1) (cfr. [6]) ed in generale tale soluzione non è anche soluzione della (1.1) (cioé soluzione "forte"), mentre ogni soluzione della (1.1) è soluzione della (2.7). Sotto opportune ipotesi per la F, come la derivabilità secondo Frechêt e la continuità di $F_u'v$ rispetto ad u (cfr. [1] , [11] , [12], [15]), una soluzione della (2.7) è anche soluzione della (1.1).

Nel seguito ci occuperemo della (2.7), anche perché dal punto di vista fisico, quest'ultima è molto spesso più significativa della (1.1).

In [13] pag. 354 è provato il seguente

TEOREMA. Se $A \in \mathcal{G}(1,b)$, Q è un sottoinsieme chiuso di X tale che

(2.10) $Z(t) : Q \to Q$ per ogni $t \geq 0$

(2.11) $F : Q \to X$ è continua

(2.12) $\lim_{h\to 0^+} d(x+h\, F(x);\, Q)/h = 0$ per ogni $x \in Q$

(2.13) esiste un $\omega \in \mathbb{R}$ tale che $m_-[x-y, Fx - Fy] \leq \omega|x - y|$ per ogni $x,y \in Q$, dove

$$m_{\pm}[x,y] = \lim_{h\to 0\pm} (|x+hy| - |x|)/h$$

(si dice che $F - \omega I$ è dissipativa, e questo porta $I - hF$ è ingettiva, $(I - hF)^{-1}$ è lipschitziana con $|(I - hF)^{-1}| \leq (1 - h\omega)^{-1}$ per ogni $h > 0$ con $h\omega < 1$).

Orbene, sotto le precedenti ipotesi, esiste una sola soluzione $u(t;u_o)$ di (2.7) su $[0,+\infty)$ per ogni $u_o \in Q$.

Inoltre se definiamo la famiglia $S = \{S(t);\ t \geq 0\}$ di applicazioni da Q su Q con:

(2.14) $S(t)u_o = u(t;u_o)$ per ogni $t \geq 0$ e $u_o \in Q$

allora S è un semigruppo di operatori non lineari su Q ed $A + F$ con $D(A+F) = D(A) \cap Q$) è il suo generatore (le definizioni di semigruppo di operatori non lineari e di generatore sono analoghe, pur di sostituire al concetto di operatore lineare limitato, quello di operatore lipschitziano, cfr. [13] pag. 248).

Noi ci occuperemo in un primo tempo non tanto delle condizioni che garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione della (2.7) (cosa che vedremo nel n. 3), quanto delle condizioni che ci permettono di affermare che se $u_o \in Q$ anche $u(t,u_o) \in Q$.

Pertanto supporremo, come già detto, che Q sia un cono chiuso in X, $A \in \mathcal{G}(M,b)$ con $b \geq 0$ ed $F : X \to X$ sia non lineare ma sufficientemente regolare per garantire l'esistenza e l'unicità, almeno locale (in $[0,T]$) della soluzione di (2.7).

L'operatore P è definito in $Y = C([0,T];\ X)$ che è uno spazio di Banach con la norma $||u||= \sup\{|u(t)|;\ t \in [0,T]\}$.

Denoteremo con

$$B(u_o,r) = \{u \in X; |u - u_o| \leq r\} \quad \text{se} \quad u_o \in X$$

$$B_Y(v_o,r) = \{v \in Y ; ||v - v_o|| \leq r\} \quad \text{se} \quad v_o \in Y$$

e con C_r un insieme di X o di Y contenuto in $B(o,r)$ o in $B_Y(o,r)$.

Si ha il seguente

LEMMA (1) . Supponiamo che:

(A) Posto $v_{n+1} = Pv_n$ per $n \in \{0,1,2,...\} = \underline{N}$, la successione delle approssimazioni successive $\{v_n ; n \in \underline{N}\}$, converga all'unica soluzione $u(t;u_o)$ della (2.7),

(B) $Z(t)Q \subset Q \qquad t \in [0,T]$

(C) $F(Q) \subset Q$.

Allora se $u_o \in Q$, anche $u(t;u_o) \in Q$ per $t \in [0,T]$.

DIM.

Denotato con $Y_Q = \{u \in Y; u(t) \in Q \quad \text{per} \quad t \in [0,T]\}$ dalle ipotesi fatte segue allora che se $D(P)$ è il dominio di P risulta $P(D(P) \cap Y_Q) \subset Y_Q$ e quindi $v_n \in Y_Q$ per $n \in \underline{N}$. Inoltre Y_Q è chiuso e quindi $u(t;u_o) = \lim v_n(t) \in Q$ per $n \to \infty$ C.V.D

Del Lemma (1) si può dare una versione locale con ipotesi più facilmente verificabili in pratica:

LEMMA (2). Supponiamo che:

(A') C_r sia un chiuso limitato di Y tale che $v_o \in C_r$, $P : C_r \to C_r$ e posto $v_{n+1} = Pv_n$ per $n \in \underline{N}$ risulta convergente la successione delle approssimazioni successive all'unica soluzione u della (2.7)

(B) $Z(t)Q \subset Q$ per $t \in [0,T]$

(C') Posto $C_{rQ} = \{v \in C_r \, ; \, v(t) \in Q$ per $t \in [0,T]\}$ risulta :

$$F(v(t) \in Q \quad \text{per} \quad v \in C_{rQ} \quad \text{e per} \quad t \in [0,T].$$

Allora se $u_o \in Q$ anche $u(t;u_o) \in Q$ per $t \in [0,T]$.

DIM.

Sotto le ipotesi (A')(B) (C') risulta $P : C_{rQ} \to C_{rQ}$ e quindi segue facilmente l'asserto C.V.D.

OSSERVAZIONE (1) L'ipotesi (B) non la si è indebolita in quanto di solito è verificata. Si tenga presente che come C_r si può prendere $B_Y(v_o,r)$.

Nel seguito fisseremo la nostra attenzione sul caso locale.

Quando l'ipotesi (C') non è verificata, può allora essere utile il seguente metodo.

Supponiamo che:

(D) Esiste $a > 0$ tale che posto

(2.15) $F_1 = F + aI$

risulti

(2.16) $F_1(v(t)) \in Q$ per $v \in C_{rQ}$ e per $t \in [0,T]$.

In questo caso il problema (1.1) può scriversi:

(2.17) $\frac{du}{dt} = A_1 u + F_1 u$, $u(o) = u_o$ dove $A_1 = A - aI$.

Per un noto teorema di perturbazione [10] pag. 495) anche A_1 genera un semigruppo di operatori lineari e limitati e precisamente il semigruppo:

(2.18) $Z_1(t) = \exp(-at)Z(t)$.

Se vale la (B) risulta anche $Z_1(t)Q \subset Q$.

La versione "mild" del problema (2.17) è

(2.19) $u = P_1 u$

con

(2.20) $P_1 u(t) = w_0(t) + \int_0^t Z_1(t-s)F_1(u(s))ds$

(2.21) $w_0(t) = \exp(-at)\ Z(t)u_0$.

Se F è sufficientemente regolare, l'ipotesi (A') del Lemma (2) è verificata anche per P_1, ma non necessariamente nello stesso intervallo $[0,T]$ e quindi da (B) e (D) segue l'asserto del Lemma (2).

Si ha quindi il seguente

TEOREMA (1). Se del Lemma (2) sono verificate le ipotesi (B)(D) ed (A') per P_1 su un chiuso limitato contenente w_0, allora se $u_0 \in Q$ anche $u(t;u_0) \in Q$ in un opportuno intervallo $[0,T]$.

3. PARTICOLARI TIPI DI OPERATORI F

Al fine di chiarire meglio il metodo tratteremo il problema (1.1) con F di tipo particolare.

Supponiamo inizialmente che per $u,v \in X$ risulti: