1. Il concetto di μ-potenza

Dato un insieme di indici J, sia μ una misura non negativa, semplicemente (cioé "finitamente") additiva su $\mathcal{P}(J)$ e tale che $\mu(J) < +\infty$.

Secondo la terminologia adottata anche da R. Scozzafava [8], chiameremo massa una tale μ. Non è restrittivo supporre $\mu(J) = 1$, così che il codominio di μ è contenuto in $[0,1]$.

Sia, inoltre, $\mathcal{E} = (E,Q)$ una struttura costituita da un insieme E (sostegno) e da un insieme Q di relazioni in E.

A partire da $\mathcal{E}$ e dall'insieme:

$$\mathfrak{F} = \{I \subseteq J : \mu(I) = 1\} \text{ (1)},$$

si consideri la struttura:

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} = (F, {}^*Q) ,$$

dove $F = E^J$ è l'insieme delle funzioni da J in E, e ${}^*q_n \in {}^*Q$, relazione n-aria in F, è così definita:
se $(f_1,f_2,\dots f_n)$ è una n-pla ordinata di elementi di F e q_n è una relazione n-aria in E, allora:

$$(f_1,f_2,\dots f_n) \in {}^*q_n$$

se e solo se

$$(f_1(i),f_2(i),\dots f_n(i)) \in q_n \quad \text{q.o.} \quad \text{per} \quad i \in J \text{ (2)}$$

Esempio. Se q_2 è la relazione di uguaglianza in E ed f,g sono due elementi di F, si ha:

---

(1) Si noti che: 1) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$; 2) se $I_1 \in \mathfrak{F}$ e $I_2 \in \mathfrak{F}$, allora $I_1 \cap I_2 \in \mathfrak{F}$; 3) se $I_1 \in \mathfrak{F}$ $I_1 \subseteq I_2 \subseteq J$, allora $I_2 \in \mathfrak{F}$. Pertanto $\mathfrak{F}$ è un filtro in J.

(2) cioé in $J - I_0$, con I_0 insieme μ-nullo; si osservi che $J - I_0 \in \mathfrak{F}$.

$$f \overset{*}{=} g$$

se e solo se

$$f(i) = g(i) \text{ q.o.} \quad \text{per} \quad i \in J$$

Se una relazione binaria q_2 in E è di equivalenza, lo è anche la corrispondente relazione $^*q_2$ in F, in quanto essa risulta, ovviamente, riflessiva e simmetrica ed è anche transitiva, perché se

$$(f,g) \in {}^*q_2$$

e

$$(g,h) \in {}^*q_2 \ ,$$

allora

$$(f(i),g(i)) \in q_2 \text{ per } i \in J - I_1 \ (\text{con } \mu(I_1) = 0)$$

e

$$(g(i),h(i)) \in q_2, \text{ per } i \in J - I_2 \ (\text{con } \mu(I_2) = 0);$$

quindi

$$(f(i),h(i)) \in q_2, \text{ per } i \in J - (I_1 \cup I_2) \ ;$$

e siccome si ha

$$\mu(I_1 \cup I_2) = 0 \ ,$$

ciò vuol dire che:

$$(f,h) \in {}^*q_2 \ .$$

La struttura che si ottiene da $\mathcal{E}_{\mathfrak{J}}$ sostituendo ad F l'insieme $^*E$, quoziente di F rispetto alla relazione $\overset{*}{=}$, si dice una μ-potenza di $\mathcal{E}$, e sarà denotata col simbolo:

$$^*\mathcal{E} = (^*E, {}^*Q)$$

In particolare, se $\mathfrak{J}$ risulta essere un ultrafiltro (in tal caso lo indicheremo con $\mathfrak{U}$ (3)) $^*\mathcal{E}$ si dice "ultrapotenza di $\mathcal{E}$ rispetto ad $\mathfrak{U}$ ".

Ciò si verifica se e solo se (cfr. ad es., [3], pag. 357-58) la massa μ è

(3) $\mathfrak{U}$ è un filtro in J che soddisfa l'ulteriore condizione: se $X \subset J$, allora o $X \in \mathfrak{U}$ oppure $J - X \in \mathfrak{U}$.

atomica su J, con codominio $\{0,1\}$.

$\mathcal{U}$ si dice principale se

$$H = \bigcap_{X \in \mathcal{U}} X \neq \emptyset .$$

E' facile vedere che, se $\mathcal{U}$ è principale, esiste $x \in J$ tale che

$$H = \{x\}$$

e

$$\mathcal{U} = \{X \subseteq J : x \in X\},$$

e quindi μ è concentrata in x.

Se J è finito, tutti gli ultrafiltri in J sono di tipo principale, come è facile verificare; è necessario allora supporre J infinito, se si vogliono considerare ultrafiltri non principali in J.

Ad un ultrafiltro non principale corrisponde una massa atomica agglutinata (cfr.[8]) su J, e viceversa.

2. La μ-potenza ${}^*\mathcal{E}$ come estensione della struttura $\mathcal{E}$.

Un elemento di E^J sarà indicato con $(f(i))$; in particolare, si indicherà con (f) una funzione che assume su J il valore costante $f \in E$.

Sia

$$\Upsilon : E \to {}^*E$$

tale che

$$\Upsilon(e) = [e]^{(4)}$$

Essendo Υ iniettiva, E si può riguardare come sottoinsieme di ${}^*E$, identificando l'elemento $e \in E$ con la classe delle funzioni che assumono q.o. il valore costante e.

Si osservi che se μ è concentrata in un unico punto $\{i_0\} = \bigcap_{I \in \mathfrak{J}} I$, siccome

(4) Denotiamo, in generale, con $[f(i)]$ invece di $[(f(i))]$ la classe di equivalenza rispetto a $\stackrel{*}{=}$, rappresentata da $(f(i))$.