4. Il teorema di decomposizione di una μ arbitraria

Sia μ una massa su $\mathcal{P}(\Omega)$. Per $E_0 \subseteq \Omega$, con $\mu(E_0)>0$, si definisce (cfr. la (1), Introduzione) il coefficiente di suddivisibilità $r(\mu, E_0)$ della massa μ in E_0.

(4.1) Proposizione - Si ha $r(\mu, E)=1/2$ per ogni $E \subseteq \Omega$ (con $\mu(E)>0$) se e solo se μ è continua.

(4.2) Proposizione - Sia $E_0 \subseteq \Omega$, con $\mu(E_0)>0$, tale che $r(\mu, E_0)<1/2$. Allora, per qualunque $E \subseteq E_0$, $\mu(E)$ non appartiene all'intervallo aperto di estremi $r\mu(E_0)$ e $(1-r)\mu(E_0)$.

(4.3) Lemma (cfr. [2]) - Se esiste $E_0 \subseteq \Omega$, con $\mu(E_0)>0$, tale che $r(\mu, E_0)<1/2$, allora, qualunque sia $\varepsilon>0$, esiste $F \subseteq E_0$ tale che $r(\mu, F)<\varepsilon$.

(4.4) Teorema (cfr. [2]) - Se μ è una massa su $\mathcal{P}(\Omega)$, non concentrata, e se esiste $E_0 \subseteq \Omega$, con $\mu(E_0)>0$, tale che $r(\mu, E_0)<1/2$, allora vale la decomposizione (2), con la massa β agglutinata su E_0.

Nelle stesse ipotesi del Teor. (4.4), dato $\varepsilon = \frac{2}{3} r(\mu, E_0)<1/3$, sia F l'insieme di cui al Lemma (4.3): si ha $r_F=r(\mu, F)<1/3$, e quindi $(1-r_F)\mu(F)> \frac{2}{3}\mu(F)$. La famiglia

$$\mathcal{U} = \left\{ E \subseteq \Omega : \mu(E \cap F) \geq (1-r_F)\mu(F) \right\} \tag{9}$$

è un ultrafiltro su Ω: le (a) e (b) sono immediate; la (d) segue dal fatto che, se $\mu(E \cap F)<(1-r_F)\mu(F)$, si ha, per (4.2), $\mu(E \cap F) \leq r_F \mu(F)$, e quindi, posto $E'=\Omega-E$, $\mu(E' \cap F) \geq (1-r_F)\mu(F)$, cioè $E' \in \mathcal{U}$ (ed analogamente si prova che $E \in \mathcal{U}$ implica $E' \notin \mathcal{U}$); la (c) si dimostra osservando che da $A \in \mathcal{U}$ segue $\mu(A' \cap F) \leq r_F \mu(F)$, e quindi, se anche $B \in \mathcal{U}$, si ha $\mu((A \cap B)' \cap F) = \mu((A' \cup B') \cap F) \leq 2r_F \mu(F) < \frac{2}{3}\mu(F)$, cioè $(A \cap B)' \notin \mathcal{U}$.

L'ultrafiltro (9) permette di definire la massa agglutinata

β, che figura nella (2), nella maniera che verrà precisata nel corso della dimostrazione del successivo Teor. (4.6).

(4.5) <u>Definizione</u> - Siano β_1 e β_2 due masse agglutinate rispettivamente sugli ultrafiltri $\mathcal{U}_1$ ed $\mathcal{U}_2$ in Ω. Diremo che β_1 e β_2 sono <u>separate</u> se esistono $E_1 \in \mathcal{U}_1$ ed $E_2 \in \mathcal{U}_2$ tali che $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

(4.6) <u>Teorema</u> - Sia μ una massa su $\mathcal{P}(\Omega)$, non concentrata. Allora vale la seguente decomposizione

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n + \mu_0 \quad , \tag{10}$$

dove le β_n non identicamente nulle sono masse agglutinate, a due a due separate, e μ_0 è una massa continua (o identicamente nulla).

<u>Dim</u>.- Se μ è continua, il teorema è banalmente vero, con tutte le β_n identicamente nulle e $\mu_0 = \mu$.

Se μ non è continua, esiste $E_1 \subseteq \Omega$ tale che $r_1 = r(\mu, E_1) < 1/2$; dato $\varepsilon = \frac{2}{3} r_1$, sia $F_1 \subseteq E_1$ tale che, per il Lemma (4.3), $r_{F_1} = r(\mu, F_1) < \varepsilon$. L'ultrafiltro su Ω

$$\mathcal{U}_1 = \{ E \subseteq \Omega : \mu(E \cap F_1) \geq (1 - r_{F_1}) \mu(F_1) \}$$

definisce una massa agglutinata β_1: costruiamola in modo che essa risulti massimale rispetto alla condizione $\mu_1 \geq 0$, essendo $\mu_1 = \mu - \beta_1$. E' chiaro che ciò si ottiene ponendo

$$\beta_1(E) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } E \notin \mathcal{U}_1 \\ (1 - r_{F_1}) \mu(F_1) & , \text{ se } E \in \mathcal{U}_1 . \end{cases}$$

Si noti che $(1 - r_{F_1}) \mu(F_1) = \beta_1(F_1)$, perchè $\mu(F_1 \cap F_1) = \mu(F_1) > (1 - r_{F_1}) \mu(F_1)$.

Se μ_1 è continua, vale la (10) con $\beta_n \equiv 0$ per $n > 1$ e $\mu_0 = \mu_1$. In caso contrario, esiste $E_2 \subseteq \Omega$ tale che $r_2 = r(\mu_1, E_2) < 1/2$, e quindi $F_2 \subseteq E_2$ tale che $r_{F_2} = r(\mu_1, F_2) < \varepsilon = \frac{2}{3} r_2$; introducendo l'ultrafiltro

$$\mathcal{U}_2 = \{ E \subseteq \Omega : \mu_1(E \cap F_2) \geq (1 - r_{F_2}) \mu_1(F_2)$$

e la massa agglutinata β_2 (definita in modo del tutto analogo alla β_1), e posto $\mu_2 = \mu_1 - \beta_2$, si può scrivere

(11) $$\mu = \beta_1 + \beta_2 + \mu_2 \quad .$$

Verifichiamo che β_1 e β_2 sono separate. Per la definizione (1) di r_{F_1}, dato arbitrariamente $\delta > 0$, esiste $G_1 \in \mathcal{U}_1$, con $G_1 \subseteq F_1$, tale che

$$(1 - r_{F_1}) \mu(F_1) \leq \mu(G_1) < (1 - r_{F_1}) \mu(F_1) + \delta .$$

Sia $\delta \leq (1 - r_{F_2}) \mu_1(F_2)$; allora

$$\mu_1(G_1 \cap F_2) \leq \mu_1(G_1) = \mu(G_1) - \beta_1(G_1) <$$
$$< (1 - r_{F_1}) \mu(F_1) + \delta - (1 - r_{F_1}) \mu(F_1) \leq (1 - r_{F_2}) \mu_1(F_2),$$

e quindi $G_1 \notin \mathcal{U}_2$. Si conclude che $\Omega - G_1 \in \mathcal{U}_2$.

Proseguendo nella decomposizione (11) finchè esistono componenti agglutinate di μ, si costruisce, dopo n passi,

$$\mu_n = \mu - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n = \mu_{n-1} - \beta_n \geq 0 .$$

Osserviamo che, dato $n \in \mathbb{N}$, si può scrivere

$$\mu_{n-1} = \mu - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{n-1} = \mu_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{n-1} =$$
$$= \mu_2 - \beta_3 - \dots - \beta_{n-1} = \dots = \mu_{i-1} - \beta_i - \dots - \beta_{n-1} \leq \mu_{i-1} - \beta_i$$

per ogni $i \leq n-1$, e quindi, con procedimento del tutto analogo a quello seguito poco sopra (scegliendo opportunamente $G_i \in \mathcal{U}_i$, con $G_i \subseteq F_i$, e $\delta \leq (1 - r_{F_n}) \mu_{n-1}(F_n)$), si dimostra che β_i e β_n sono separate.

Se, qualunque sia n, μ_n non è continua, si ottiene una successione (β_n) di masse agglutinate, a due a due separate, con $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(E) \leq 1$ per ogni $E \in \mathcal{P}(\Omega)$. Pertanto $\beta_n(E) \to 0$, ed è chiaro che le masse agglutinate sono al più un'infinità numerabile. Non è difficile a questo punto concludere che la massa

$$\mu_0 = \mu - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

è continua.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARONE, E., Sulle misure semplicemente additive non continue (in corso di pubblicazione).

[2] de FINETTI, B., Probability, Induction and Statistics, J. Wiley, London, 1972 (Chapter 7).

[3] HALMOS, P.R., On the set of values of a finite measure, Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 138-144 (Lemma 2).

[4] SAKS, S., Addition to the note on some functionals, Trans. Amer. Math. Soc., 35 (1933), 967-974.

[5] SCOZZAFAVA, R., On finitely additive probability measures, Trans. of the "8th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, and Random Processes", Praga (1978).

[6] ULAM, S., Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, Fund. Math., 16 (1930), 140-150.

:::::::::