3. Masse fortemente non atomiche

Una massa μ (in particolare, una misura) non atomica è una massa che è nello stesso tempo non concentrata e non agglutinata (°). Una misura non atomica è anche continua, cioè vale la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon>0$, esiste una partizione finita di Ω in n insiemi E_k, tale che $\mu(E_k)<\varepsilon$ per ogni $k=1, 2,\ldots,n$ (cfr. Saks[4]).

Esistono invece masse non atomiche che non sono continue (cfr. [1]). Chiameremo anche fortemente non atomica una massa che sia continua nel senso suddetto (°°).

Il lemma seguente è il punto di partenza per stabilire i risultati principali di questo lavoro, cioè il successivo Teorema (3.2) ed il Corollario (3.3). Osserviamo che quest'ultimo è stato stabilito, nel caso particolare di una misura, ricorrendo al principio di induzione transfinita (cfr. [3]), mentre qui viene ottenuto con un procedimento del tutto elementare, e nel caso più generale di una massa.

(3.1) Lemma - Sia $A\subseteq\Omega$, sia μ una massa fortemente non atomica su $\mathcal{P}(A)$, e sia α arbitrario, con $0<\alpha\leq\mu(A)$. Allora, qualunque sia $\varepsilon>0$, esiste $F_1\subset A$ tale che

$$\alpha-\varepsilon<\mu(F_1)<\alpha \quad ,$$

ed esiste $A_1\subset A-F_1$ tale che $\mu(A_1)<\varepsilon$ e

$$\mu(F_1)+\mu(A_1)\geqslant\alpha \; .$$

Dim.- Per la continuità di μ, esiste una partizione di A

(°) Dire "non agglutinata" vuol dire che, per nessun $E_0\subseteq\Omega$, μ assume su $\mathcal{P}(E_0)$ solo due valori. Naturalmente, ciò può però accadere per una componente di μ (cfr. il Teor.(4.4)).

(°°) Pertanto i due concetti "fortemente non atomica" e "non atomica" coincidono nel caso particolare di una misura.

in n insiemi E_k, con $\mu(E_k)<\varepsilon$ $(k=1,2,\dots,n)$. Poichè $\alpha\leq\mu(A)$, possiamo considerare n_1, il <u>minimo</u> intero positivo tale che $\mu(\bigcup_{k=1}^{n_1+1} E_k)\geqslant\alpha$; allora, posto

$$F_1=\bigcup_{k=1}^{n_1} E_k \qquad , \qquad A_1=E_{n_1+1} \qquad ,$$

si ha $\mu(F_1)<\alpha$ e

$$\mu(F_1)=\mu(\bigcup_{k=1}^{n_1+1} E_k)-\mu(A_1)>\alpha-\varepsilon .$$

(3.2) <u>Teorema</u> - Sia μ una massa fortemente non atomica su $\mathcal{P}(\Omega)$, e sia α_0 arbitrario, con $0<\alpha_0\leq\mu(\Omega)=1$. Allora esiste una successione (F_k) di sottoinsiemi di Ω, a due a due disgiunti, e con $\mu(F_k)>0$, tali che

$$\alpha_0=\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(F_k) \quad . \tag{5}$$

<u>Dim</u>.- Sia $0<\varepsilon_0<\alpha_0$. Applicando una prima volta il Lemma (3.1), con $A=\Omega$, $\alpha=\alpha_0$, $\varepsilon=\varepsilon_0$, costruiamo $F_1\subset\Omega$, con

$$\alpha_0-\varepsilon_0<\mu(F_1)<\alpha_0 \quad ,$$

ed $\Omega_1\subset\Omega-F_1$, con $\mu(\Omega_1)<\varepsilon_0$ e

$$\mu(F_1)+\mu(\Omega_1)\geqslant\alpha_0 .$$

Applichiamo ancora il lemma, con $A=\Omega_1$, $\alpha=\alpha_1=\alpha_0-\mu(F_1)$, $\varepsilon=\varepsilon_1=\min\{\alpha_1,1/2\}$. Allora esiste $F_2\subset\Omega_1\subset\Omega-F_1$, con

$$\alpha_1-\varepsilon_1<\mu(F_2)<\alpha_1 \quad ,$$

ed esiste $\Omega_2\subset\Omega_1-F_2$, con $\mu(\Omega_2)<\varepsilon_1$ e

$$\mu(F_2)+\mu(\Omega_2)\geqslant\alpha_1 .$$

Così proseguendo, con $A=\Omega_2$, $\alpha=\alpha_2=\alpha_1-\mu(F_2)=\alpha_0-\sum_{k=1}^{2}\mu(F_k)$, si arriva alla $(n+1)$-esima applicazione del lemma: si costruiscono due insiemi, prima

$$F_{n+1}\subset\Omega_n\subset\Omega-\bigcup_{k=1}^{n}F_k \quad ,$$

con

$$(6) \qquad 0<\alpha_n-\varepsilon_n = \alpha_0-\sum_{k=1}^{n}\mu(F_k)-\varepsilon_n < \mu(F_{n+1})<\alpha_n \quad ,$$

e poi $\Omega_{n+1}\subset\Omega_n-F_{n+1}$, con

$$(7) \qquad \mu(\Omega_{n+1})<\varepsilon_n$$

e $\mu(F_{n+1})+\mu(\Omega_{n+1})\geqslant\alpha_n$, essendo $\varepsilon_n=\min\{\alpha_n,1/(n+1)\}$.

Osserviamo che la successione (F_n) che così nasce verifica, per ogni $n\in\mathbb{N}$, la

$$(8) \qquad \bigcup_{k=n+1}^{\infty} F_k\subset\Omega_n \quad ;$$

inoltre, essendo $0<\varepsilon_n\leqslant\frac{1}{n+1}$, la successione numerica (ε_n) è infinitesima.

Ciò premesso, proviamo che vale la (5). Dalla (6) si deduce

$$0<\alpha_0-\sum_{k=1}^{n+1}\mu(F_k)<\varepsilon_n \quad ,$$

e quindi, passando al limite per $n\to\infty$, l'uguaglianza fra primo e terzo membro della (5). D'altra parte si ha, per la (8):

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)=\sum_{k=1}^{n}\mu(F_k)+\mu(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}F_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mu(F_k)+\mu(\Omega_n) \quad ,$$

da cui, passando al limite per $n\to\infty$, segue, per la (7),

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(F_k) \quad ,$$

e quindi, tenendo presente la Prop. (2.1), la (5).

(3.3) <u>Corollario</u> - Il codominio di una massa fortemente non atomica μ, con $\mu(\Omega)=1$, è l'intervallo $[0,1]$.

<u>Dim</u>.- Dato α_0, con $0<\alpha_0<1$, basta prendere $F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, dove gli F_k sono quelli del Teor. (3.2), per avere $\mu(F)=\alpha_0$.