11 SECONDA FORMA FONDAMENTALE

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $o \leq m \leq n$, di uno spazio affine euclideo E, di dimensione n.

Nel precedente paragrafo, grazie alla struttura euclidea di E, abbiamo definito, mediante p'', la connessione riemanniana $\mathring{\Gamma} : TTF \to \nu TTF$.

Ora, data la proiezione $p^{\perp} : \nu TTE_{/TF} \to (\nu TTF)^{\perp}$ possiamo considerare l'applicazione supplementare

$$k : TTF \to (\nu TTF)^{\perp}$$

osservando che la conoscenza di $\mathring{\Gamma}$ equivale alla conoscenza di k.

Allora, componendo k con il campo vettoriale geodetico $\mathring{\bar{X}}_0 : TF \to TTF$, definiamo il campo

$$N \equiv k \circ \bar{X}_0 : TF \to (\nu TTF)^{\perp}$$

detto "seconda forma fondamentale".

Quindi N dipende dalla metrica e dalla struttura della sottovarietà. Vedremo, inoltre, che N non dipenderà dal campo vettoriale $\mathring{\bar{X}}_0$.

1.11.1. DEFINIZIONE

Dicesi SECONDA FORMA FONDAMENTALE l'applicazione

$$N : TF \to (\nu TTF)^{\perp}$$

data da

$$N \equiv k \circ \mathring{\bar{X}}_0$$

dove

- $\mathring{\bar{X}}_o : TF \to TTF$ è il campo vettoriale geodetico dato da

$$\mathring{\Gamma} \circ \bar{X}_o = o \; .$$

- $k : TTF \to (\nu TTF)^{\perp}$ è l'applicazione, detta "la proiezione ortogonale", data da

$$k \equiv p^{\perp} \circ \Gamma \circ TTj \qquad \underline{\cdot}$$

Dunque, il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
TTF \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "\mathring{\Gamma}"] & TTE_{/TF} \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[drr, "k"] & \nu TTE_{/TF} \arrow[r] \arrow[dr] & \nu TTF \\
TF \arrow[u, "\mathring{\bar{X}}_o"] \arrow[rrr, "N"'] & & & (\nu TTF)^{\perp}
\end{tikzcd}$$

Si osservi che abbiamo scritto k invece di $\mathring{k}$, poiché tale applicazione non è intrinseca a TTF, ma ha valori in TTE.

1.11.2. TEOREMA

N è quadratica sulle fibre di TF.

Inoltre, se $x \equiv (x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^n)$ è un sistema di coordinate ortogonale, adattato ad F, è

$$\ddot{\mathring{x}}^k \circ N = \sum_{i,j=1}^{m} \mathring{\Gamma}^k_{ij} \, \dot{\mathring{x}}^i \dot{\mathring{x}}^j \qquad \text{con } k = m+1, \ldots n.$$

D. E'

$$\ddot{\mathring{x}}^k \circ k = \sum_{i,j=1}^{m} \mathring{\Gamma}^k_{ij} \, \dot{\mathring{x}}^i \dot{\mathring{x}}^j \qquad \text{con } k = m+1, \ldots, n,$$

e quindi

$$\ddot{\mathring{x}}^k \circ N \equiv \ddot{\mathring{x}}^k \circ k \circ \overset{\circ}{\bar{X}}_0 = \sum_{i,j=1}^{m} \mathring{\Gamma}^k_{ij}\, \dot{\mathring{x}}^i \dot{\mathring{x}}^j \qquad \text{con } k = m+1,\dots,n.$$

Dunque, N dipende in forma quadratica dalle x che sono le coordinate sulla fibra di TF.

Si osservi che N è indipendente dalla scelta del campo poiché k annulla la parte verticale dei punti di TTF.

Pertanto, nella definizione di N si potrebbe sostituire $\overset{\circ}{\bar{X}}_0$ con un qualsiasi campo vettoriale $TF \to TTF$.

Dunque, il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
TTF \arrow[dr, "k"] & \\
TF \arrow[u, "\overset{\circ}{\bar{X}}_0"] \arrow[r, "N"] \arrow[d, "\overset{\circ}{\bar{X}}"'] & (\sigma TTF)^{\perp} \\
TTF \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

.