10 CONNESSIONE RIEMANNIANA

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $o \leq m \leq n$, di uno spazio affine E, di dimensione n.

Sugli spazi affini abbiamo definito l'applicazione $\Gamma : TTE \to \nu TTE$, detta connessione affine.

Ora, si vuole trasportare questa nozione sulle sottovarietà: ossia, si vuole definire una connessione $\overset{\circ}{\Gamma} : TTF \to \nu TTF$.

Intanto, abbiamo la composizione

$$TTF \xhookrightarrow{TTj} TTE_{/TF} \xrightarrow{\Gamma} \nu TTE_{/TF}$$

A priori, non esiste un modo canonico per avere la proiezione

$$\nu\, TTE_{/TF} \to \nu TTF,$$

però se E è uno spazio affine euclideo, è possibile determinare una proiezione di questo tipo.

Infatti, considerando la somma diretta

$$\bar{E} \equiv T_p E = T_p F \oplus (T_p F)^{\perp} \quad ,$$

abbiamo la proiezione parallela $p'' : T_p E \to T_p F$ e la proiezione ortogonale $p^{\perp} : T_p E \to (T_p F)^{\perp}$. Dunque, in virtù dell'isomorfismo canonico

$$T_p F \approx \nu T_{(p,\bar{u})}(TF) \hookrightarrow \nu T_{(p,\bar{u})}(TE) \approx T_p E$$

abbiamo la proiezione cercata (indicata ancora con lo stesso simbolo)

$$p'' : \nu TTE_{/TF} \to \nu TTF.$$

Sia, dunque, E uno spazio affine eulideo.

1.10.1. E' $T_p E \equiv T_p F \oplus (T_p F)^{\perp}$.

Allora, si considerino la proiezione parallela p'' e la proiezione ortogonale $p^{\perp}$

$$p'' : T_p E \to T_p F \quad , \; p^{\perp} : T_p E \to (T_p F)^{\perp} \quad .$$

Ora, in virtù dell'isomorfismo canonico

$$T_p F \;\tilde{\sim}\; \nu T_{(p,\bar{u})}(TF) \hookrightarrow \nu T_{(p,\bar{u})}(TE) \;\tilde{\sim}\; T_p E$$

si possono considerare le proiezioni (indicate ancora con gli stessi simboli)

$$p'' : \nu T_{(p,\bar{u})}(TE) \to \nu T_{(p,\bar{u})}(TF)$$

$$p^{\perp} : \nu T_{(p,\bar{u})}(TE) \to (\nu\, T_{(p,\bar{u})}(TF)\,)^{\perp} .$$

Diamo, allora, la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Dicesi CONNESSIONE RIEMANNIANA l'applicazione

$$\mathring{\Gamma} : TTF \to \nu TTF$$

data da $\quad \mathring{\Gamma} = p'' \circ \Gamma \circ TTj \quad .$

1.10.2. TEOREMA

Valgono le seguenti proprietà:

a) $\mathring{\Gamma}$ è un operatore di proiezione, ossia è lineare sulle fibre.

b) E' $\quad \mathring{\Gamma}_{/\nu TTF} = id_{\nu TTF}$,

quindi

c) $\mathring{\Gamma}(TTF) = \nu TTF$

d) $\mathring{\Gamma} \circ \mathring{\Gamma} = \mathring{\Gamma}$.

D. a). Ovvia, essendo $\overset{\circ}{\Gamma}$ composizioni di applicazioni lineari.

b) Segue dal fatto che $\nu TTF \hookrightarrow \nu TTE$, $\Gamma_{/\nu TTE} = id_{\nu TTE}$,

$p''_{/\nu TTF} = id_{\nu TTF}$.

c),d). Seguono immediatamente da b) con un ragionamento insiemistico.

1.10.3. Possiamo esprimere la connessione $\overset{\circ}{\Gamma}$ in un qualunque sistema di coordinate adattato.

PROPOSIZIONE Sia $x \equiv (x^1,\dots,x^n) : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ un sistema di coordinate di E, adattato ad F.

Allora, l'espressione di $\overset{\circ}{\Gamma}$ è del tipo

$$\text{(a)} \qquad \overset{\circ}{x}{}^k \circ \overset{\circ}{\Gamma} = \overset{\circ}{x}{}^k + \sum_{i,j=1}^{m} \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}\, \check{x}^i\, \check{x}^k \qquad \text{con } k = 1,\dots,m ,$$

dove

$$\text{(b)} \qquad \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g})^{hk}(\partial\overset{\circ}{x}_i.\overset{\circ}{g}_{jh} + \partial\overset{\circ}{x}_j.\overset{\circ}{g}_{ih} - \partial\overset{\circ}{x}_h.\overset{\circ}{g}_{ij}) \qquad .$$

In particolare se $y = (y^1,\dots y^m, y^{m+1},\dots,y^n) \equiv (x^1,\dots x^m, y^{m+1}\dots,y^n)$

è un sistema di coordinate ortogonale, ossia tale che nei punti

$p \in F$ è

$$\partial x_i \perp \partial y_j \qquad i = 1,\dots,m \quad , \quad j = m+1,\dots,n$$

allora, è

(c) $$\ddot{\mathring{x}}^k \circ \hat{\Gamma} = \ddot{\check{x}}^k + \sum_{i,j=1}^{m} \check{\Gamma}^k_{ij/F} \, \dot{\check{x}}^i \, \dot{\check{x}}^j \qquad k = 1,\dots,m \quad .$$

D. Se y è ortogonale, la (c) si ottiene da (5.7.5.) tenendo presente la definizione di $\overset{c}{\Gamma}$.

Dimostriamo ora (a). E'

$$\ddot{\mathring{x}}^k = (\partial y_i \cdot \partial y_j \cdot \check{x}^k) \dot{\mathring{y}}^i \, \dot{\mathring{y}}^j + (\partial y_j \cdot \check{x}^k) \ddot{\mathring{y}}^j$$

e quindi

$$\ddot{\mathring{x}}^k \circ \mathring{\Gamma} = (\partial y_j \cdot \check{x}^k) \, \ddot{\check{y}}^j \circ \overset{c}{\Gamma}$$

in quanto $\dot{\check{\mathring{y}}}^j \circ \overset{c}{\Gamma} = 0$.

Dunque, tenendo presente (c) , è

$$\ddot{\mathring{x}}^k \circ \overset{c}{\Gamma} = (\partial y_j \cdot \check{x}^k) \, \ddot{\check{y}}^j + \sum_{i,h=1}^{m} \check{\Gamma}^j_{ih/F} \, \dot{\mathring{x}}^i \, \dot{\mathring{x}}^h =$$

$$= \ddot{\check{x}}^k + \sum_{i,j=1}^{m} \check{\Gamma}^k_{ij/F} \, \dot{\check{x}}^i \, \dot{\check{x}}^j \qquad \text{con} \quad k = 1,\dots,m.$$

Si osservi che $\check{\Gamma}^k_{ij/F}$ sono i soliti simboli di Christoffel .

Dimostriamo ora (b) .

Esprimiamo $\overset{c}{\Gamma}$ e Γ in forma covariante. Poniamo dunque

$\overset{\circ}{\underline{\Gamma}} \equiv \overset{\circ}{\underset{\sim}{g}} \circ \overset{\circ}{\Gamma}$, $\underline{\Gamma} \equiv \underset{\sim}{g} \circ \Gamma$.

Dimostriamo che il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
TTF \arrow[r, hook, "TTj"] \arrow[rrr, bend left, "\overset{\circ}{\Gamma}"] \arrow[rrrd, bend right, "\overset{\circ}{\underline{\Gamma}}"'] & TTE_{/TF} \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[dr, "\underline{\Gamma}"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "1)"] & \nu TTE_{/TF} \arrow[r, "p''"] \arrow[d, "\underset{\sim}{g}"] \arrow[dr, phantom, "2)"] & \nu TTF \\
& & oT^{*}TE_{/TF} \arrow[r, "(Tj)^{*}"] & oT^{*}TF \arrow[u, "(\overset{\circ}{\underset{\sim}{g}})^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Il triangolo 1) è commutativo per definizione di $\underline{\Gamma}$.

Il quadrato 2) è commutativo se lo è il seguente

$$\begin{tikzcd}
\nu TTE_{/TF} \arrow[r, "p''"] \arrow[d, "\underset{\sim}{g}"'] & \nu TTF \arrow[d, "\overset{\circ}{\underset{\sim}{g}}"] \\
oT^{*}TE_{/TF} \arrow[r, "(Tj)^{*}"] & oT^{*}TF
\end{tikzcd}$$

ossia, se lo è il seguente

$$\begin{tikzcd}
T_pE \arrow[r] \arrow[d, "'g"'] & T_pF \arrow[d, "'g_{/T_pF}"] \arrow[d, phantom, shift left=6, "1)"] \\
T_p^{*}E \arrow[r] \arrow[d, phantom, shift right=6, "2)"] & T_p^{*}F
\end{tikzcd}$$

Facciamo vedere che quest'ultimo diagramma è commutativo.

Consideriamo un generico vettore $\bar{v} \in \bar{E}$ e facciamo vedere che si ottiene la stessa forma di $T^{*}_{p}F$ percorrendo uno qualsiasi dei tratti 1) e 2) .

Seguendo il

percorso 1) $\quad \bar{E} \to \bar{E}^* \to T_p{}^*F$

$$\bar{v} \mapsto \underline{v} \mapsto \underline{v}_{/T_pF} \, .$$

abbiamo:

$$\underline{v}_{/T_pF}\ (\bar{x}) \equiv \bar{v} \cdot \bar{x} = (\bar{v}'' + \bar{v}^{\perp}) \cdot \bar{x} = \bar{v}'' \cdot \bar{x} + \bar{v}^{\perp} \cdot \bar{x} = \bar{v}'' \cdot \bar{x}, \qquad \forall\, \bar{x} \in T_pF.$$

Seguendo i
percorso 2) $\quad \bar{E} \to T_pF \to T_p{}^*F$

$$\bar{v} \mapsto \bar{v}'' \mapsto \underline{v}'' \quad .$$

$$\underline{v}''(\bar{x}) \equiv \bar{v}'' \cdot \bar{x} \qquad , \forall\, \bar{x} \in T_pF.$$

Si noti che le forme $\underline{v}_{/T_pF}$ e $\underline{v}''$ vanno valutate nello stesso vettore di T_pF.

Dunque, il quadrato 2) è commutativo. Allora, è

$$\underline{\mathring{\Gamma}} = (Tj)^* \circ \underline{\Gamma} \circ TTj : TTF \to \circ T^*TF$$

ossia, in coordinate, è

$$\mathring{\Gamma}_{k,ij} = \Gamma_{k,ij} \qquad\qquad \text{con } 1 \leq i,j,k \leq m \, .$$

Ora abbiamo
$$\mathring{\Gamma} = (\mathring{\underset{\sim}{g}})^{-1}\, \underline{\mathring{\Gamma}}$$

che in coordinate diventa

$$\mathring{\Gamma}^h_{ij} = (\mathring{g})^{hk}\, \mathring{\Gamma}_{k,ij} = (\mathring{g})^{hk}\, \Gamma_{k,ij} \,/\, \mathring{U}$$

con $\quad 1 \leq i,j,h,k \leq m.$

Infine, ricordiamo che è (5.8.10)

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}(\partial x_i \cdot g_{kj} + \partial x_j \cdot g_{ki} - \partial x_k \cdot g_{ij}) \quad \dot{-}$$

Si osservi che è

$$(\overset{o}{g}_{ij})^{-1} \equiv (\overset{o}{g})^{ij} \neq (\overset{o}{g^{ij}}) \equiv \overset{o}{\widetilde{(g_{ij})^{-1}}}$$

Invece, è

$$\overset{o}{\partial x_i} \cdot \overset{o}{g}_{ih} = \partial x_i \cdot g_{jh} \qquad , \text{ con } \quad 1 \leq i,j,h \leq m.$$

Dunque, questo teorema molto importante esprime la connessione riemanniana $\overset{o}{\Gamma}$, in termini delle coordinate indotte su Γ, tramite una formula del tutto analoga a quella valida per gli spazi affini.

1.10.4. DEFINIZIONE

Dicesi EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE GEODETICA l'unico campo vettoriale

$$\overset{o}{\bar{X}}_o : TF \to TTF$$

tale che

$$\overset{o}{\Gamma} \circ \overset{o}{\bar{X}}_o = o \quad \dot{-}$$

1.10.5. Possiamo dare l'espressione in coordinate di $\bar{X}_o$.

PROPOSIZIONE Sia $x \equiv (x^1,..,x^n):U \to V \subset \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate differenziabile, adattato ad F.

Allora, è

$$\overset{o}{\bar{X}}_o = \sum_{i=1}^{m} (\overset{o}{\dot{x}}{}^i \partial \overset{\vee}{\dot{x}}_i - \sum_{j,k=1}^{m} \overset{\vee}{\overset{o}{\Gamma}}{}^i_{jk} \; \overset{o}{\dot{x}}{}^j \overset{o}{\dot{x}}{}^k \partial \overset{o}{\dot{x}}_i) \quad \dot{-}$$