8 SECONDI SPAZI TANGENTI E COTANGENTI DI UNA SOTTOVARIETA'

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $m \leq n$, di uno spazio affine E di dimensione n.

Vogliamo precisare ora i secondi spazi tangenti e cotangenti di F.

In modo analogo a quanto fatto per gli spazi affini, definiamo tali spazi come spazi tangenti e cotangenti delle sottovarietà TF e T^*F.

Osserviamo, ancora una volta, che non esiste un modo canonico (dipendente dalla sola struttura affine di E) di vedere gli spazi T^*TF e T^*T^*F come sottovarietà di T^*TE e T^*T^*E, rispettivamente. Ciò accade, invece, se assumiamo in E una struttura euclidea $\underline{g}$.

Diamo poi gli spazi verticale ed orizzontale di TTF e T^*TF, rispettivamente, osservando che su TTF non c'è uno spazio orizzontale canonico, come non esiste uno spazio verticale canonico su T^*TF.

1.8.1. PROPOSIZIONE

E'

$$TTF = \bigcup_{(p,\bar{v})\in TE} T_{(p,\bar{v})}(TF)$$

$$TT^*F = \bigcup_{(p,\underline{v})\in T^*F} T_{(p,\underline{v})}(T^*F)$$

$$T^*TF = \bigcup_{(p,\bar{v})\in TF} T^*_{(p,\bar{v})}(TF)$$

$$T^*T^*F = \bigcup_{(p,\underline{v})\in T^*F} T^*_{(p,\underline{v})}(T^*F) \qquad \dot{-}$$

Si vede che TTF e TT^*F sono delle sottovarietà, di dimensione $4m$, rispettivamente di TTE e TT^*E.

Invece, se E è uno spazio affine euclideo, allora anche T^*TF e T^*T^*F sono delle sottovarietà, di dimensione 4m, rispettivamente di T^*TE e T^*T^*E .

Inoltre, se U è un aperto di $p \in F$, di E e $x \equiv (x^1,\ldots,x^n):U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate differenziabile(almeno due volte) di E, adattato ad F, le applicazioni

$$(\check{\check{x}}^i, \check{\dot{x}}^i ; \dot{\check{x}}^i, \ddot{x}^i) : TTU \to \mathbb{R}^{4n}$$

$$(\check{\hat{x}}^i, \check{\dot{x}}_i ; \dot{\hat{x}}^i, \ddot{x}_i) : TTU \to \mathbb{R}^{4n}$$

$$(\hat{\check{x}}^i, \hat{\dot{x}}^i ; \dot{\check{x}}_i, \ddot{x}_i) : TTU \to \mathbb{R}^{4n}$$

$$(\hat{\hat{x}}^i, \hat{\dot{x}}_i ; \dot{\hat{x}}_i, \ddot{x}^i) : TTU \to \mathbb{R}^{4n}$$

sono dei sistemi di coordinate, rispettivamente, di TTE, TT^*E, T^*TE, T^*T^*E adattati a TTF, TT^*F, T^*TF, T^*T^*F.

Pertanto, le applicazioni

$$(\check{\check{\mathring{x}}}^i, \check{\dot{\mathring{x}}}^i ; \dot{\check{\mathring{x}}}^i, \ddot{\mathring{x}}^i) : TT\mathring{U} \to \mathbb{R}^{4m}$$

$$(\check{\hat{\mathring{x}}}^i, \check{\dot{\mathring{x}}}_i ; \dot{\hat{\mathring{x}}}^i, \ddot{\mathring{x}}_i) : TT\mathring{U} \to \mathbb{R}^{4m}$$

$$(\hat{\check{\mathring{x}}}^i, \hat{\dot{\mathring{x}}}^i ; \dot{\check{\mathring{x}}}_i, \ddot{\mathring{x}}_i) : TT\breve{U} \to \mathbb{R}^{4m}$$

$$(\hat{\hat{\mathring{x}}}^i, \hat{\dot{\mathring{x}}}_i ; \dot{\hat{\mathring{x}}}_i, \ddot{\mathring{x}}^i) : TT\mathring{U} \to \mathbb{R}^{4m}$$

sono dei sistemi di coordinate di TTF, TT^*F, T^*TF, T^*T^*F, indotti su TTU.

1.8.2. Definiamo il sottospazio verticale di TTF. Ricordiamo che se E è uno spazio affine, il verticale νTTE è costituito dai punti che hanno la terza componente nulla. Ora poiché TTF non è in generale un prodotto, non possiamo dare per le sottovarietà la stessa definizione.

Ne diamo allora un'altra, compatibile con quella data sugli spazi affini.

DEFINIZIONE

Dicesi SOTTOSPAZIO VERTICALE di TTF il sottinsieme

$$\nu TTF$$

di TTF i cui punti sono costituiti dai vettori di TF, che sono tangenti alle curve verticali,ossia alle curve del tipo

$$c : \mathbb{R} \to TF$$

per cui è

$$p_F \circ c = \text{cost} \qquad \underline{\cdot}$$

Si noti che non c'è uno spazio orizzontale canonico. Infatti, non si possono definire curve orizzontali, curve,cioé che lasciano invariata la "velocità", dato che $T_pF \neq T_qF$ e non si possono confrontare velocità in punti distinti.

1.8.3. DEFINIZIONE

Dicesi SOTTOSPAZIO ORIZZONTALE di T^*TF il sottoinsieme

$$o\, T^*TF$$

di T^*TF i cui punti sono costituiti dalle forme di T^*TF, che sono nulle sui vettori verticali.

Anche in questo caso non esiste uno spazio verticale canonico di T^*TF.

1.8.4. PROPOSIZIONE

Lo spazio verticale νTTF e lo spazio orizzontale oT^*TF sono caratterizzati, rispettivamente, da

$$\dot{\check{x}}^i = 0 \quad , \; x_i = 0 \quad , \text{ con } i = m+1,\dots,n.$$

Pertanto, le seguenti applicazioni

$$(\check{\mathring{x}}^i, \; \check{\mathring{x}}^i, \ddot{\mathring{x}}^i) : \quad \nu TT\mathring{U} \to \mathbb{R}^{3m}$$

$$(\hat{\check{\mathring{x}}}^i, \; \hat{\mathring{x}}^i, \ddot{\mathring{x}}_i) : \quad oT^*T\mathring{U} \to \mathbb{R}^{3m}$$

sono dei sistemi di coordinate su νTTF e su oT^*TF, rispettivamente $\underline{.}$

1.8.5. PROPOSIZIONE

Esistono i seguenti isomorfismi canonici

$$\nu T_{(p,\bar{v})}(TF) \approx T_pF$$

$$o\, T^*_{(p,\bar{v})}(TF) \approx T^*_pF \qquad \underline{\cdot}$$

Questi isomorfismi saranno utili per lo studio della "connessione riemanniana".

1.8.6. Dunque, un'equazione differenziale del 2° ordine su F è un campo vettoriale

$$\overset{2}{\bar{X}} : TF \to TTF$$

le cui curve integrali sono curve basiche, ossia tale che $\overset{\smile}{\bar{X}}$ soddisfi la condizione

$$(c : I \to TF \; , \; dc = \overset{c}{\bar{X}} \circ c) \Rightarrow (c = d(p_F \circ c)) \qquad .$$

L'espressione in coordinate di $\overset{\circ}{\bar{X}}$ è

$$\overset{c}{\bar{X}} = \sum_{i=1}^{m} (X^i \partial \check{\mathring{x}}_i + X^{\bar{i}} \partial \mathring{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} (\dot{x}^i \partial \check{\mathring{x}}_i + \ddot{x}^i \partial \mathring{x}_i) \; .$$

La nozione di equazione differenziale del 2° ordine geodetica su F è rimandata al paragrafo 1.10. .