4 APPLICAZIONI DIFFERENZIABILI

0 Siano $F \hookrightarrow E$ ed $F' \hookrightarrow E'$ due sottovarietà.

In questo paragrafo dopo aver definito la differenziabilità di un'applicazione $f : F \to F'$, diamo una condizione necessaria e sufficiente affinché f sia differenziabile.

Consideriamo, infine, alcune applicazioni importanti differenziabili.

1.4.1. DEFINIZIONE Sia $f : F \to F'$ un'applicazione.

Si dice che f è DIFFERENZIABILE (di classe $\mathcal{C}^k$) se per ogni $p \in F$, esiste

- un intorno U di p in E,
- un'estensione differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) $\tilde{f}$ di f

$$\tilde{f} : U \to F' \hookrightarrow E' \quad \underline{.}$$

Dunque, il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} U \cap F \arrow[r, "f/U\cap F"] \arrow[d, hook, "j/U\cap F"'] & F' \arrow[d, hook] \\ U \subset E \arrow[r, "\tilde{f}"] & E' \end{tikzcd}$$

e la differenziabilità di f(da definire) è rimandata alla differenziabilità di $\tilde{f}$, se esiste (che è già stata definita nello studio degli spazi affini) .

1.4.2. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$), è che sia differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) la sua espressione in un sistema di coordinate adattato. Più precisamente vale il seguente teorema.

TEOREMA Sia $f : F \to F'$ un'applicazione tra sottovarietà.

a) Se f è differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$), allora, per ogni $p \in F$ e per ogni sistema di coordinate adattato in un intorno $U \subset E$ di p

$$x : E \to V \subset \mathbb{R}^n$$

l'applicazione

$$f \circ \mathring{x}^{-1} : \mathring{V} \to F' \hookrightarrow E'$$

è differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) .

b) Se per ogni $p \in F$, esiste un sistema di coordinate adattato in un intorno $U \subset E$ di p

$$x : U \to V \subset \mathbb{R}^n$$

tale che l'applicazione

$$f \circ \mathring{x}^{-1} : \mathring{V} \to F'$$

sia differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$), allora f è differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) .

D. a) $\Rightarrow$ b). Il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathring{V} \arrow[r, "\mathring{x}^{-1}"] \arrow[dd, hook] & U \arrow[dd, hook] \arrow[dr, "f/\mathring{U}"] & & \\
& & F' \arrow[r, hook] & E' \\
V \arrow[r, "x^{-1}"] & U \arrow[urr, "\tilde{f}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Poliché l'applicazione

$$\overset{\circ}{V} \hookrightarrow V \xrightarrow{x^{-1}} U \xrightarrow{\tilde{f}} F' \hookrightarrow E'$$

è differenziabile (di classe C^k), allora l'applicazione

$$\overset{\circ}{V} \xrightarrow{\overset{\circ}{x}^{-1}} \overset{\circ}{U} \xrightarrow{f/\overset{\circ}{U}} F' \hookrightarrow E'$$

è differenziabile (di classe C^k) .

b) $\Rightarrow$ a). Sia $x : U \to V$ un sistema di coordinate come in b).

Allora, l'applicazione differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$)

$$U \xrightarrow{x} V \to \overset{\circ}{V} \xrightarrow{\overset{\circ}{x}^{-1}} \overset{\circ}{U} \xrightarrow{f/\overset{\circ}{U}} F' \hookrightarrow E'$$

è un'estensione locale di f.

Dunque, f è differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) .

1.4.3. ESEMPI

Le applicazioni

$$j : F \hookrightarrow E$$
$$\overset{\circ}{x} : \overset{\circ}{U} \to \overset{\circ}{V}$$
$$p_F : TF \to F$$

sono differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$) .

L'applicazione

$$(\overset{\circ}{x}^1, \ldots, \overset{\circ}{x}^m; \dot{x}^1, \ldots \dot{x}^m) : T\overset{\circ}{U} \to T\overset{\circ}{V}$$

è di classe $\mathcal{C}^{k-1}$.