3 SPAZIO TANGENTE

0 In uno spazio affine avevamo un insieme E, un insieme di vettori $\bar{E}$ ed un modo di operare con questi vettori che era la traslazione.

Ora, in una sottovarietà, abbiamo un insieme $F \hookrightarrow E$, ma non abbiamo uno spazio di vettori $\bar{F}$. Con la nozione di spazio tangente alla sottovarietà si vuole ricostruire proprio l'idea di uno spazio di vettori sulla sottovarietà.

Fissato $p \in F$, lo "spazio tangente in p ad F" è l'insieme dei vettori tangenti alle curve differenziabili su E, a valori in F e passanti per p.

Si osservi che non si è parlato di curve differenziabili su F, perché non è stata definita la differenziabilità sulle sottovarietà.

Definiamo, poi, lo spazio tangente TF di F osservando che è un sottoinsieme di TE ma non un prodotto, ossia $TF \neq F \times \bar{F}$, in quanto $T_pF \neq T_qF$.

Infatti, la differenza sostanziale con gli spazi affini consiste nel fatto che sulle sottovarietà non esistono i vettori liberi.

Concludiamo facendo vedere che, mediante l'inclusione canonica $TF \hookrightarrow TE$, TF è una sottovarietà di TE. Inoltre, un sistema di coordinate adattato ad F induce, naturalmente, un sistema di coordinate adattato a TF.

1.3.1 DEFINIZIONE Sia $p \in F$.

Dicesi SPAZIO TANGENTE DI F IN p l'insieme

$$T_pF$$

costiuito dai vettori tangenti alle curve differenziabili $R \to E$ a valori in F e passanti per p.

1.3.2. Il seguente teorema esprime il fatto che T_pF è il sottospazio vettoriale di dimensione m di $T_pE \equiv \bar{E}$, generato dai primi m vettori della base indotta in p dal sistema di coordinate adattato ad F.

TEOREMA Sia $p \in F$.

L'insieme T_pF è un sottospazio vettoriale di dimensione m di $\bar{E}$.

Inoltre, se $x \equiv (x^1,\dots,x^n)$ è un sistema di coordinate adattato in un intorno U di p, allora, T_pF è il sottospazio generato da

$$\{\partial x_1(p),\dots, \partial x_m(p)\}.$$

D. a). Le curve coordinate

$$\overset{\circ}{x}_{1p} = x_{1p},\dots, \overset{\circ}{x}_{mp} = x_{mp}$$

sono differenziabili, a valori in F e passanti per p. Pertanto, è

$$\partial x_1(p),\dots, \partial x_m(p) \in T_pF .$$

Inoltre, tali m vettori sono linearmente indipendenti.

b) Sia poi $c : \mathbb{R} \to E$ una curva differenziabile, a valori in F e passante per p. Allora, è

$$c^{m+1} \equiv x^{m+1} \circ c = a^{m+1},\dots, c^n \equiv x^n \circ c = a^n$$

e quindi

$$dc = Dc^1(o)\partial x_1(p)+\ldots+Dc^m(o)\partial x_m(p) \quad .$$

Dunque, i vettori $\partial x_1(p),\ldots,\partial x_m(p)$ generano T_pF $\dot{-}$

1.3.3. Osserviamo che in un intorno U di $p \in F$, in generale, esistono più carte adattate. Perciò, è importante il seguente corollario.

COROLLARIO

Il numero intero m non dipende dalla scelta del sistema di coordinate adattato in p.

D. Infatti, m è la dimensione di T_pF, il quale è definito senza fare riferimento alla scelta di un particolare sistema di coordinate $\dot{-}$

1.3.4. COROLLARIO

Se F è connesso, allora m non dipende dal punto $p \in F$.

D. Sia $\{\mathring{U}_\alpha , \mathring{x}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un atlante adattato ad F. Si ha dunque

$$(1) \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \cap F = F .$$

Sia $A_p \in A$ il sottoinsieme costituito dagli indici α tali che

$\mathring{x}_\alpha : \mathring{U}_\alpha \to \mathbb{R}^p$.

Per il corollario precedente, si vede subito che, se $p \neq q$, è

$$(2) \quad (\bigcup_{\alpha\in A_p} \mathring{U}_\alpha \cap F) \cap (\bigcup_{\alpha\in A_q} \mathring{U}_\alpha \cap F) = \phi .$$

Ma, essendo F connesso, non possono valere contemporaneamente (1) e (2).

Dunque, non possono esistere due interi distinti p e q, tali che

$$A_p \neq \emptyset \quad , A_q \neq \emptyset \qquad \dot{-}$$

1.3.5. DEFINIZIONE

Se F è connessa, l'intero m che compare nella definizione 1.2.1., il quale non dipende dalla carte e dai punti, è detto la DIMENSIONE di F.

1.3.6. Diamo ora la nozione di "spazio tangente" di F.

DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO TANGENTE di F il sottoinsieme

$$TF \hookrightarrow TE \equiv E \times \bar{E}$$

dato da

$$TF \equiv \{(p,\bar{v}) \in E \times \bar{E} \;/\; p \in F,\ \bar{v} \in T_pF\} \qquad \dot{-}$$

E' dunque

$$TF = \bigcup_{p \in F} T_pF \quad .$$

Indichiamo con

$$p_F : TF \to F$$

l'applicazione $\quad p_F : (p,\bar{v}) \mapsto p \quad .$

Osserviamo che se $\dim F = n$ (F aperto di E), allora è

$$T_pF = \bar{E} \qquad , \; TF = F \times \bar{E} \; .$$

In generale, TF non è un prodotto cartesiano, ma solo un sottoinsieme del prodotto cartesiano $E \times \bar{E}$. Ciò dipende dal fatto che, in generale, non esiste uno spazio vettoriale libero $\bar{F}$ associato ad F.

1.3.7. PROPOSIZIONE

TF è una sottovarietà di TE di dimensione 2m.

Inoltre, se $x \equiv (x^1,\dots,x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ è un sistema di coordinate di E adattato ad F, in $p \in F$, allora

$$(\check{x}^1,\dots,\check{x}^m;\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n) : TU \to \mathbb{R}^{2n}$$

è un sistema di coordinate adattato a TF, in $(p,\bar{v}) \in TF$.

Pertanto

$$(\mathring{\check{x}}^1,\dots,\mathring{\check{x}}^m;\; \mathring{\dot{x}}^1,\dots,\mathring{\dot{x}}^m) : T\mathring{U} \to \mathbb{R}^{2m}$$

è un sistema di coordinate di TF.

D. Infatti $TU = U \times \bar{E}$ è un intorno di $(p,\bar{v}) \in TF$ ed è

$$(q,\bar{w}) \in TU \cap TF \iff \check{x}^{m+1}(q,\bar{w}) = a^{m+1},\dots,\check{x}^n(q,\bar{w}) = a^n,$$
$$\dot{x}^{m+1}(q,\bar{w}) = o,\dots,\dot{x}^n(q,\bar{w}) = o \qquad \dot{-}$$

Si noti che

$$T\mathring{U} \equiv T(U \cap F) = TU \cap TF \quad .$$

1.3.8. DEFINIZIONE

Indichiamo con

$$Tj : Tf \hookrightarrow TE$$

l'INCLUSIONE CANONICA $\dot{-}$

Questa posizione sarà giustificata dopo la definizione si applicazione tangente.