1 TEOREMI DI INVERSIONE LOCALE

0 Siano M ed N due spazi vettoriali di dimensione m ed n, rispettivamente. Sia $h : M \to N$ un'applicazione lineare.

Dalla teoria delle applicazioni lineari è noto che sussistono i seguenti teoremi.

1) $m = n$. Se è rango $h = m = n$, allora, h è invertibile, ossia è

$$h \circ h^{-1} = id_N \quad , \quad h^{-1} \circ h = id_M \quad .$$

In termini matriciali vale la ben nota regola di Cramer.

2) $m > n$. Se è rango $h = n$, allora esiste un sottospazio $U \subset M$ (supplementare del nucleo di h) di dimensione n tale che la restrizione

$$h_{|U} : U \to N$$

sia invertibile.

3) $m < n$. Se è rango $h = m$, allora è $\dim \Im m h = m$, dunque l'applicazione

$$M \to \Im m h$$

è invertibile.

In termini matriciali, i casi 2) e 3) sono noti come teorema di Rouché-Capelli.

E' possibile estendere, in modo naturale, tali teoremi al caso di applicazioni differenziabili, poiché le loro derivate, almeno in prima approssimazione, sono applicazioni lineari.

Questi teoremi verranno utilizzati nello studio delle sottovarietà.

Siano, dunque, E ed F due spazi affini di dimensioni r ed s, rispettivamente. Sia $f : E \to F$ un'applicazione di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$.

1.1.1. TEOREMA Sia $\dim E = \dim F = r$. Sia $p \in E$, $f(p) \equiv q \in F$. Se f è di rango r in p (ossia $Df(p)$ è di rango r), allora esiste

- un aperto $U \subset E$ di p,
- un aperto $V \subset F$ di q

tale che la restrizione di f a U

$$f_{/U} : U \to V$$

sia un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$.

Dunque, vale il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc} & U & \xrightarrow{f_{|U}} & V & \\ id_U & \uparrow & & \downarrow & id_V \\ & U & \xleftarrow[(f_{/U})^{-1}]{} & V & \end{array}$$

$\dot{-}$

1.1.2. TEOREMA Sia $\dim E \equiv r > s \equiv \dim F$. Sia $p \in E$, $f(p) \equiv q \in F$.

Se f è di rango s in p, allora esiste

- un aperto $U \subset E$ di p,
- un aperto $V \subset F$ di q,
- e un diffeomorfismo h(di classe $\mathcal{C}^k$)

$$h : U_1 \times U_2 \to U$$

tale che

$$f_{/U} \circ h \circ j_1 : U_1 \to V$$

sia un diffeomorfismo(di classe $\mathcal{C}^k$) e tale che l'applicazione

$$f_{/U} \circ h \circ j_2 : U_2 \to V$$

sia costante.

Le proprietà precedenti sono, dunque, espresse dal seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dr, "j_1"] \arrow[rrrd, "\text{é un diffeomorfismo}"] & & & \\
& U_1 \times U_2 \arrow[r, "h"] & U \arrow[r, "f_{/U}"] & V \\
U_2 \arrow[ur, "j_2"] \arrow[rrru, "\text{é costante}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$\dot{-}$

1.1.3. TEOREMA Sia $\dim E \equiv r < s \equiv \dim F$. Sia $p \in E, f(p) \equiv q \in F$.

Se f è di rango r in p, allora esiste

- un aperto $U \subset E$ di p,
- un aperto $V \subset F$ di q,
- e un diffeomorfismo k(di classe $\mathcal{C}^k$)

$$k : V \to V_1 \times V_2$$

tale che

$$\pi^1 \circ k \circ f_{/U} : U \to V_1$$

sia un diffeomorfismo (di classe $\mathcal{C}^k$) e tale che

$$\pi^2 \circ k \circ f_{/U} : U \to V_2$$

sia costante.

Le proprietà precedenti sono, dunque, espresse dal seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & & V_1 \\
U \arrow[r, "f_{/}"'] & V \arrow[rru] \arrow[rrd] \arrow[r, "k"'] & V_1 \times V_2 \arrow[ru, "\pi^1"'] \arrow[rd, "\pi^2"] & \\
 & & & V_2
\end{tikzcd}$$