0 INTRODUZIONE

Una "sottovarietà" è un sottoinsieme F di uno spazio affine E, caratterizzato localmente dal fatto che certe funzioni coordinate di E sono costanti.

Ricordiamo che in uno spazio affine avevamo un insieme di punti E, un insieme di vettori $\bar{E}$ ed un modo di operare con questi vettori che era la traslazione. Ora in una sottovarietà abbiamo un insieme $F \hookrightarrow E$ ma non abbiamo uno spazio di vettori $\bar{F}$. Con la nozione di spazio tangente alla sottovarietà si vuole ricostruire proprio l'idea di uno spazio di vettori su F. Fissato $p \in F$, lo"spazio tangente" in p ad F, T_pF, è l'insieme dei vettori tangenti alle curve differenziabili su E, a valori in F e passanti per p.

Definiamo poi lo spazio tangente TF di F osservando che esso è un sottoinsieme di TE ma non un prodotto, poiché $T_pF \neq T_qF$. Infatti la differenza sostanziale con gli spazi affini consiste nel fatto che sulle sottovarietà non esistono i vettori liberi.

Si vede, mediante l'inclusione canonica $TF \to TE$, che TF è una sottovarietà di TE.

Definiamo lo "spazio cotangente" in p di F, T^*_pF, come il duale di T_pF, osservando che si ha la proiezione $T^*_pE \to T^*_pF$ ma non l'inclusione $T^*_pF \hookrightarrow T^*_pE$. Dunque, a priori, non possiamo dire che T^*F è munito di una sottovarietà di T^*F. Si vede, invece, che se E è munito di una metrica, allora possiamo riguardare T^*F come sottovarietà di T^*F.

In generale, T^*F non è un prodotto cartesiano, ma solo un sottoinsieme di T^*E.

Si osservi che la definizione di T^*F non ha nulla a che fare con l'esistenza di una metrica. Noi abbiamo considerato una metrica allo scopo di poter considerate T^*F come sottovarietà di T^*E.

E' possibile estendere in modo natuale tali concetti. Abbiamo, così i secondi spazi tangenti e cotangenti di una sottovarietà.

Diamo poi gli spazi verticale ed orizzontale di TTF e T^*TF, in modo diverso da come sono stati dati sugli spazi affini.

Per esempio lo spazio verticale di TTF è quel sottoinsieme di TTF i cui punti sono costituiti dai vettori di TF, che sono tangenti alle curve verticali. Tale definizione è compatibile con quella data sugli spazi affini.

Grazie alla inclusione canonica $TF \hookrightarrow TE$, possiamo munire F della metrica indotta da $\underline{g}$ (se $(E,\underline{g})$ è uno spazio vettoriale euclideo).

Sugli spazi affini abbiamo definito la connessione $\Gamma : TTE \to \nu TTE$.

Ora si vuole trasportare questa nozione sulle sottovarietà: ossia, si vuole definire una connessione $\mathring{\Gamma} : TTF \to \nu TTF$.

Intanto abbiamo la composizione

$$TTF \xhookrightarrow{TTj} TTE \xrightarrow{\Gamma} TTE \quad .$$

A priori, non esiste un modo canonico per avere la proiezione

$$\nu TTE \to \nu TTF$$

però se E è uno spazio affine euclideo si vede che considerando la somma diretta

$$\bar{E} \equiv T_pF \oplus (T_pF)^{\perp}$$

si ottiene la proiezione cercata

$$p'' : \nu TTE \to \nu TTF \quad ,$$

e quindi resta definita $\overset{o}{\Gamma}$, detta "connessione riemanniana".

Inoltre, considerata la proiezione ortogonale

$$p^{\perp} : \quad \nu TTE_{/TF} \to (\nu TTF)^{\perp}$$

resta definita l'applicazione supplementare

$$k : TTF \to (\nu TTF)^{\perp} ,$$

la quale, composta con il campo vettoriale geodetico, dà il campo vettoriale

$$N : TF \to (\nu TTF)^{\perp}$$

detto "seconda forma fondamentale".

Quindi N dipende dalla metrica e dalla struttura della sottovarietà.

Concludiamo questo capitolo con la nozione di "curvatura" su F

$$\overset{o}{A} \equiv \overset{o}{\Gamma} \circ d^2 c : \mathbb{R} \to \nu TTF$$

Considerata la curvatura su E

$$A \equiv \Gamma \circ d^2 c : \mathbb{R} \to \nu TTE$$

diamo un importante teorema che fornisce la relazione tra A, $\overset{o}{A}$ ed N e mostra che la parte ortogonale di A non dipende dalla derivata seconda di $c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$, ma solo dalla derivata prima.