I N D I C E

0 INTRODUZIONE

Una "sottovarietà" è un sottoinsieme F di uno spazio affine E, caratterizzato localmente dal fatto che certe funzioni coordinate di E sono costanti.

Ricordiamo che in uno spazio affine avevamo un insieme di punti E, un insieme di vettori $\bar{E}$ ed un modo di operare con questi vettori che era la traslazione. Ora in una sottovarietà abbiamo un insieme $F \hookrightarrow E$ ma non abbiamo uno spazio di vettori $\bar{F}$. Con la nozione di spazio tangente alla sottovarietà si vuole ricostruire proprio l'idea di uno spazio di vettori su F. Fissato $p \in F$, lo"spazio tangente" in p ad F, T_pF, è l'insieme dei vettori tangenti alle curve differenziabili su E, a valori in F e passanti per p.

Definiamo poi lo spazio tangente TF di F osservando che esso è un sottoinsieme di TE ma non un prodotto, poiché $T_pF \neq T_qF$. Infatti la differenza sostanziale con gli spazi affini consiste nel fatto che sulle sottovarietà non esistono i vettori liberi.

Si vede, mediante l'inclusione canonica $TF \to TE$, che TF è una sottovarietà di TE.

Definiamo lo "spazio cotangente" in p di F, T_p^*F, come il duale di T_pF, osservando che si ha la proiezione $T_p^*E \to T_p^*F$ ma non l'inclusione $T_p^*F \hookrightarrow T_p^*E$. Dunque, a priori, non possiamo dire che T^*F è munito di una sottovarietà di T^*F. Si vede, invece, che se E è munito di una metrica, allora possiamo riguardare T^*F come sottovarietà di T^*F.

In generale, T^*F non è un prodotto cartesiano, ma solo un sottoinsieme di T^*E.

Si osservi che la definizione di T^*F non ha nulla a che fare con l'esistenza di una metrica. Noi abbiamo considerato una metrica allo scopo di poter considerate T^*F come sottovarietà di T^*E.

E' possibile estendere in modo natuale tali concetti. Abbiamo, così i secondi spazi tangenti e cotangenti di una sottovarietà.

Diamo poi gli spazi verticale ed orizzontale di TTF e T^*TF, in modo diverso da come sono stati dati sugli spazi affini.

Per esempio lo spazio verticale di TTF è quel sottoinsieme di TTF i cui punti sono costituiti dai vettori di TF, che sono tangenti alle curve verticali. Tale definizione è compatibile con quella data sugli spazi affini.

Grazie alla inclusione canonica $TF \hookrightarrow TE$, possiamo munire F della metrica indotta da $\underline{g}$ (se $(E,\underline{g})$ è uno spazio vettoriale euclideo).

Sugli spazi affini abbiamo definito la connessione $\Gamma : TTE \to \nu TTE$.

Ora si vuole trasportare questa nozione sulle sottovarietà: ossia, si vuole definire una connessione $\mathring{\Gamma} : TTF \to \nu TTF$.

Intanto abbiamo la composizione

$$TTF \xhookrightarrow{TTj} TTE \xrightarrow{\Gamma} TTE \quad .$$

A priori, non esiste un modo canonico per avere la proiezione

$$\nu TTE \to \nu TTF$$

però se E è uno spazio affine euclideo si vede che considerando la somma diretta

$$\bar{E} \equiv T_pF \oplus (T_pF)^{\perp}$$

si ottiene la proiezione cercata

$$p'' : \nu TTE \to \nu TTF \quad ,$$

e quindi resta definita $\overset{\circ}{\Gamma}$, detta "connessione riemanniana".

Inoltre, considerata la proiezione ortogonale

$$p^{\perp} : \quad \nu TTE_{/TF} \to (\nu TTF)^{\perp}$$

resta definita l'applicazione supplementare

$$k : TTF \to (\nu TTF)^{\perp} ,$$

la quale, composta con il campo vettoriale geodetico, dà il campo vettoriale

$$N : TF \to (\nu TTF)^{\perp}$$

detto "seconda forma fondamentale".

Quindi N dipende dalla metrica e dalla struttura della sottovarietà.

Concludiamo questo capitolo con la nozione di "curvatura" su F

$$\overset{\circ}{A} \equiv \overset{\circ}{\Gamma} \circ d^2 c : \mathbb{R} \to \nu TTF$$

Considerata la curvatura su E

$$A \equiv \Gamma \circ d^2 c : \mathbb{R} \to \nu TTE$$

diamo un importante teorema che fornisce la relazione tra A, $\overset{\circ}{A}$ ed N e mostra che la parte ortogonale di A non dipende dalla derivata seconda di $c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$, ma solo dalla derivata prima.

1 TEOREMI DI INVERSIONE LOCALE

0 Siano M ed N due spazi vettoriali di dimensione m ed n, rispettivamente. Sia $h : M \to N$ un'applicazione lineare.

Dalla teoria delle applicazioni lineari è noto che sussistono i seguenti teoremi.

1) $m = n$. Se è rango $h = m = n$, allora, h è invertibile, ossia è

$$h \circ h^{-1} = id_N \quad , \; h^{-1} \circ h = id_M \quad .$$

In termini matriciali vale la ben nota regola di Cramer.

2) $m > n$. Se è rango $h = n$, allora esiste un sottospazio $U \subset M$ (supplementare del nucleo di h) di dimensione n tale che la restrizione

$$h_{|U} : U \to N$$

sia invertibile.

3) $m < n$. Se è rango $h = m$, allora è $\dim \mathfrak{I}m h = m$, dunque l'applicazione

$$M \to \mathfrak{I}m h$$

è invertibile.

In termini matriciali, i casi 2) e 3) sono noti come teorema di Rouché-Capelli.

E' possibile estendere, in modo naturale, tali teoremi al caso di applicazioni differenziabili, poiché le loro derivate, almeno in prima approssimazione, sono applicazioni lineari.

Questi teoremi verranno utilizzati nello studio delle sottovarietà.

Siano, dunque, E ed F due spazi affini di dimensioni r ed s, rispettivamente. Sia $f : E \to F$ un'applicazione di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$.

1.1.1. TEOREMA Sia $\dim E = \dim F = r$. Sia $p \in E$, $f(p) \equiv q \in F$. Se f è di rango r in p (ossia $Df(p)$ è di rango r), allora esiste

- un aperto $U \subset E$ di p,
- un aperto $V \subset F$ di q

tale che la restrizione di f a U

$$f_{/U} : U \to V$$

sia un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$.

Dunque, vale il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc} & U & \xrightarrow{f_{|U}} & V & \\ id_U & \uparrow & & \downarrow & id_V \\ & U & \xleftarrow[(f_{/U})^{-1}]{} & V & \end{array}$$

$\dot{-}$

1.1.2. TEOREMA Sia $\dim E \equiv r > s \equiv \dim F$. Sia $p \in E$, $f(p) \equiv q \in F$.

Se f è di rango s in p, allora esiste

- un aperto $U \subset E$ di p,
- un aperto $V \subset F$ di q,
- e un diffeomorfismo h(di classe $\mathcal{C}^k$)

$$h : U_1 \times U_2 \to U$$

tale che

$$f_{/U} \circ h \circ j_1 : U_1 \to V$$

sia un diffeomorfismo(di classe $\mathcal{C}^k$) e tale che l'applicazione

$$f_{/U} \circ h \circ j_2 : U_2 \to V$$

sia costante.

Le proprietà precedenti sono, dunque, espresse dal seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dr, "j_1"] \arrow[drrr, "\text{é un diffeomorfismo}"] & & & \\
& U_1 \times U_2 \arrow[r, "h"] & U \arrow[r, "f_{/U}"] & V \\
U_2 \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[urrr, "\text{é costante}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

1.1.3. TEOREMA Sia dim $E \equiv r < s \equiv$ dim F. Sia $p \in E, f(p) \equiv q \in F$.

Se f è di rango r in p, allora esiste

- un aperto $U \subset E$ di p,
- un aperto $V \subset F$ di q,
- e un diffeomorfismo k(di classe $\mathcal{C}^k$)

$$k : V \to V_1 \times V_2$$

tale che

$$\pi^1 \circ k \circ f_{/U} : U \to V_1$$

sia un diffeomorfismo (di classe $\mathcal{C}^k$) e tale che

$$\pi^2 \circ k \circ f_{/U} : U \to V_2$$

sia costante.

Le proprietà precedenti sono, dunque, espresse dal seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & & V_1 \\
U \arrow[r, "f_{/}"'] & V \arrow[r, "k"'] \arrow[urr] \arrow[drr] & V_1 \times V_2 \arrow[ur, "\pi^1"'] \arrow[dr, "\pi^2"] & \\
 & & & V_2
\end{tikzcd}$$

SOTTOVARIETA' DIFFERENZIABILI

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n.

Cominciamo questo capitolo con l'importante nozione di "sottovarietà differenziabile" di dimensione $o \leq m \leq n$.

Sostanzialmente, una sottovarietà F è un sottoinsieme di E, caratterizzato localmente dal fatto che certe funzioni coordinate di E sono costanti.

Diamo, poi, degli esempi notevoli di sottovarietà differenziabili, come i piani, le sfere, i cilindri, ecc... .

Concludiamo questo paragrafo con le nozioni di funzioni e curve coordinate sulle sottovarietà.

1.2.1. DEFINIZIONE

Dicesi SOTTOVARIETA' DIFFERENZIABILE (di classe $\mathcal{C}^k$) di E un sottoinsieme $F \hookrightarrow E$, tale che, per ogni $p \in F$ esiste

1) un intorno aperto U di p in E,

2) un sistema di coordinate differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) su U

$$x \equiv (x^1,..,x^n) : U \to V \subset \mathbb{R}^n \quad ,$$

3) un intero m,

4) ed una $(n-m)$-pla $a \equiv (a^{m+1},...,a^n) \in \mathbb{R}^{n-m}$ per cui è

$$q \in U \cap F \iff x^{m+1}(q) = a^{m+1}, \cdots, x^n(q) = a^n$$

Un tale sistema di coordinate si dice ADATTATO ad F.

Posto $\overset{\circ}{U} \equiv U \cap F$, l'applicazione biiettiva

$$\overset{\circ}{x} \equiv (\overset{\circ}{x}{}^1, \ldots, \overset{\circ}{x}{}^m) \equiv (x^1_{/\overset{\circ}{U}}, \ldots, x^m_{/\overset{\circ}{U}}) : \overset{\circ}{U} \to \overset{\circ}{V}$$

dove $\overset{\circ}{V} \equiv \overset{\circ}{x}(\overset{\circ}{U})$, si dice un SISTEMA DI COORDINATE O CARTA di F .

A volte indicheremo una carta di F con $(\overset{\circ}{U}, \overset{\circ}{x})$ al posto di $\overset{\circ}{x}$.

1.2.2. DEFINIZIONE Sia F un sottoinsieme di E.

Dicesi INCLUSIONE CANONICA l'applicazione

$$j : F \to E$$

data da $\qquad j : p \mapsto p$.

Sostanzialmente, ciò vuol dire che ogni punto di F è anche punto di E.

In seguito, indicheremo l'inclusione canonica con il simbolo $\hookrightarrow$ al posto di $\to$.

1.2.3. PROPOSIZIONE Sia m l'intero della definizione 1.2.1. .

1) Se $m = n$, allora F è un aperto di E.

2) Se $m = o$, allora F è unione di punti isolati di E.

D. 1). Se $m = n$, le condizioni su F si riducono ad affermare che ogni $p \in F$ è contenuto in un intorno (aperto) di E.

2). Se $m = o$, l'ultima condizione di 1.2.1. affermare che se $p \in F$ esiste un intorno U di p in F tale che $U \cap F = \{ p \}$.

1.2.4. Diamo ora le nozioni di funzioni e curve coordinate di una sottovarietà, mediante un sistema di coordinate adattato ad F.

DEFINIZIONE Sia $x \equiv (x^1,\dots,x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate adattato ad F.

Si dicono FUNZIONI COORDINATE di F le m funzioni

$$\mathring{x}^1 \equiv x^1_{/\mathring{U}} : \mathring{U} \to \mathbb{R} \quad , \; . \; . \; . \; . \; , \quad \mathring{x}^m \equiv x^m_{/\mathring{U}} : \mathring{U} \to \mathbb{R} \quad .$$

Si dicono CURVE COORDINATE di F le m applicazioni

$$\mathring{x}_1 \equiv x_{1/\mathbb{R}\times\mathring{U}} : \mathbb{R}\times\mathring{U} \to \mathring{U}, \; . \; . \; . \; . \; , \; \mathring{x}_m \equiv x_{m/\mathbb{R}\times\mathring{U}} : \mathbb{R}\times\mathring{U} \to \mathring{U} \quad \dot{-}$$

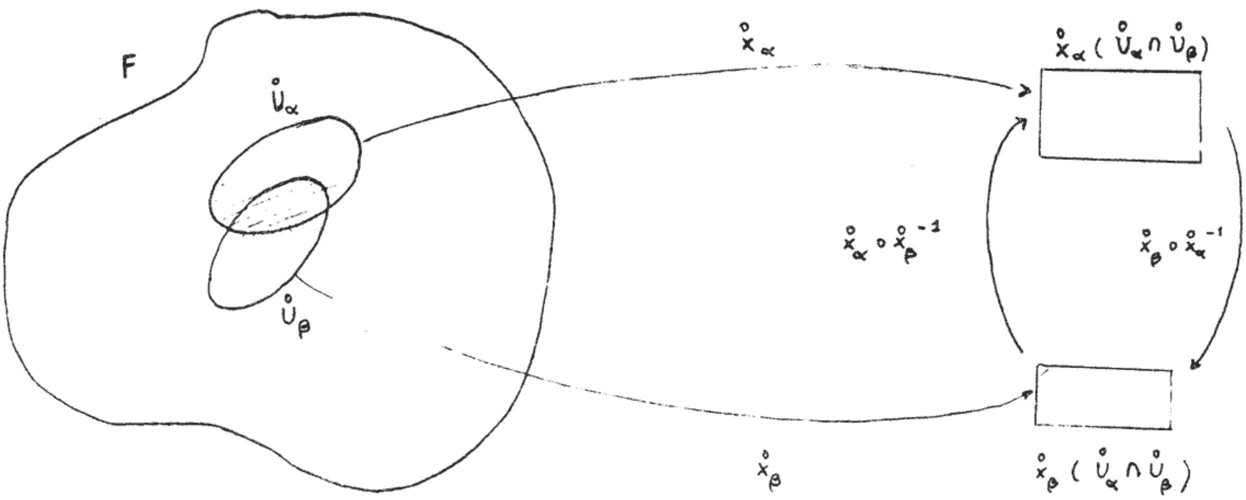
1.2.5. PROPOSIZIONE Siano $(\mathring{U}_\alpha, \mathring{x}_\alpha)$ e $(\mathring{U}_\beta, \mathring{x}_\beta)$ due carte di F tali che $\mathring{U}_\alpha \cap \mathring{U}_\beta \neq \phi$.

Allora, le seguenti applicazioni di $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^m$

$$\mathring{x}_\beta \circ \mathring{x}_\alpha^{-1} : \mathring{x}_\alpha(\mathring{U}_\alpha \cap \mathring{U}_\beta) \to x_\beta(\mathring{U}_\alpha \cap \mathring{U}_\beta)$$

$$\mathring{x}_\alpha \circ \mathring{x}_\beta^{-1} : \mathring{x}_\alpha(\mathring{U}_\alpha \cap \mathring{U}_\beta) \to \mathring{x}_\alpha(\mathring{U}_\alpha \cap \mathring{U}_\beta)$$

sono applicazioni biiettive differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$) .



D. I seguenti diagrammi (dove, per semplicità, abbiamo fatto varie omissioni di simboli ed abusi di linguaggio) sono commutativi

$$\begin{tikzcd}
\mathring{x}_\alpha(\mathring{U}_\alpha\cap\mathring{U}_\beta)\subset\mathbb{R}^m \arrow[r] \arrow[dr, "\mathring{x}_\alpha^{-1}"'] & \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{(n-m)} \arrow[r, "x_\alpha^{-1}"] & E \arrow[d, "x_\beta"] \\
& F \arrow[dr, "\mathring{x}_\beta"'] & \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{(n-m)} \arrow[d] \\
& & \mathring{x}_\beta(\mathring{U}_\alpha\cap\mathring{U}_\beta)\subset\mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathring{x}_\beta(\mathring{U}_\alpha\cap\mathring{U}_\beta)\subset\mathbb{R}^m \arrow[r] \arrow[dr, "\mathring{x}_\beta^{-1}"'] & \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{(n-m)} \arrow[r, "x_\beta^{-1}"] & E \arrow[d, "x_\alpha"] \\
& F \arrow[dr, "\mathring{x}_\alpha"'] & \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{(n-m)} \arrow[d] \\
& & \mathring{x}_\alpha(\mathring{U}_\alpha\cap\mathring{U}_\beta)\subset\mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Inoltre, in ciascun diagramma i due "cateti" sono applicazioni biiettive differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$). Allora, il risultato segue dalla regola della catena $\underline{\ .\ }$

Le applicazioni $\mathring{x}_\beta\circ\mathring{x}_\alpha^{-1}$ e $\mathring{x}_\alpha\circ\mathring{x}_\beta^{-1}$, che sono l'una inversa dell'altra si dicono i CAMBIAMENTI DI CARTA.

Si osservi che, per semplicità di notazioni, abbiamo scritto $\mathring{x}_\beta\circ\mathring{x}_\alpha^{-1}$ e $\mathring{x}_\alpha\circ\mathring{x}_\beta^{-1}$ al posto delle rispettive restrizioni.

Si osservi anche che le applicazioni $\mathring{x}_\alpha$, $\mathring{x}_\beta$, $\mathring{x}_\alpha^{-1}$, $\mathring{x}_\beta^{-1}$ risulteranno differenziabili, ma ancora non è stata introdotta la differenziabilità sulle sottovarietà.

Dunque, esiste un ricoprimento $\{\mathring{U}_\alpha\}$ di F, costituito da aperti (nella topologia indotta) ed una famiglia di carte $\overset{\circ}{x}_\alpha : \overset{\circ}{U}_\alpha \to \mathbb{R}^m$.

La famiglia $\{\overset{\circ}{U}_\alpha, \overset{\circ}{x}_\alpha\}$ è detta un ATLANTE di F.

1.2.6. Diamo ora alcuni esempi di sottovarietà.

1) SFERA. Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3. Sia $o \in E$. Sia $R \in \mathbb{R}^+$.

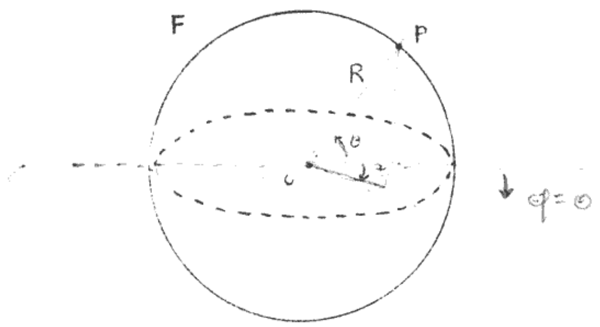
Consideriamo il sottoinsieme F di E costituito da una sfera di raggio R e centro o, ossia

$$F \equiv \{p \in E \ / \ ||p-o|| = R\} .$$

Facciamo vedere che F è una sottovarietà di E. Consideriamo un punto $p \in F$ e dimostriamo l'esistenza di un sistema adattato.

Sia (r,θ,φ) un sistema di coordinate sferico su E, tale che il semipiano $\varphi = o$ non contenga p. Come intorno di $p \in F$, consideriamo tutto lo spazio escluso il semipiano $\varphi = o$. Tutti e soli i punti che stanno sulla superficie sferica (tranne quelli della semicirconferenza del semipiano $\varphi = o$) sono caratterizzati da $r = R$.

Allora, il sistema di coordinate indotto da (r,θ,φ) è (θ,φ) ristretto alla superficie della sfera.



2) CILINDRO. Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3. Sia $o \in E$ e $\bar{u} \in \bar{E}$ un versore. Sia $R \in \mathbb{R}^+$.

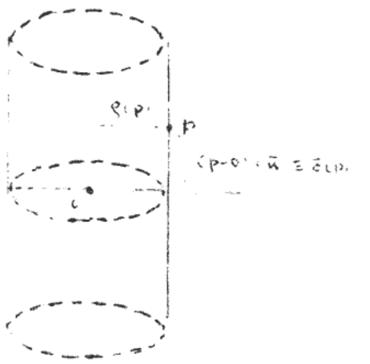
Consideriamo il sottoinsieme F di E

$$F \equiv \{p \in E \ / \ \rho^2(p) = R^2\}$$

dove $\rho^2(p) = (p-o)^2 - [(p-o) \cdot \bar{u}]^2$.

Facciamo vedere che F è una sottovarietà di E. Consideriamo un punto $p \in F$ e dimostriamo l'esistenza di un sistema adattato.

Sia (ρ, φ, z) un sistema di coordinate sferico su E, tale che il semipiano $\varphi = o$ non contenga p. Come intorno di $p \in F$, consideriamo tutto lo spazio escluso il semipiano $\varphi = o$. Tutti e soli i punti che stanno sulla superficie cilindrica (tranne quelli della semiretta appartenente al semipiano $\varphi = o$) sono caratterizzati da $\rho = R$.



Allora, il sistema di coordinate indotto da (ρ, φ, z) è (φ, z) ristretto alla superficie cilindrica.

3) CONO(SENZA VERTICE). Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3.

Sia $o \in E$. Sia $\bar{u}$ un versore di $\bar{E}$. Sia $o < \alpha < \pi$. Si consideri l'applicazione

$$\theta : E - o \to \mathbb{R}$$

data da

$$\theta : p \mapsto \arccos \frac{(p-o) \cdot \bar{u}}{||p-o||} \ .$$

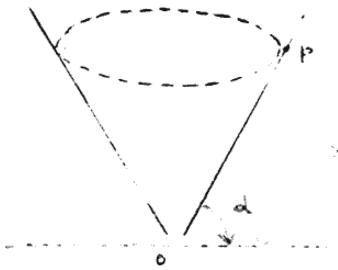
Consideriamo il sottoinsieme F di E

$$F \equiv \{p \in E \ / \ p \neq o \quad , \theta(p) = \alpha\} .$$

Facciamo vedere che F è una sottovarietà di E. Consideriamo un punto $p \in F$ e dimostriamo l'esistenza di un sistema adattato.

Sia (r,θ,φ) un sistema di coordinate sferico su E, tale che il semipiano $\varphi = o$ non contenga p. Come intorno di $p \in F$ consideriamo tutto lo spazio èscluso il semipiano $\varphi = o$. Tutti e soli i punti che stanno sulla superficie del cono (tranne quelli della semiretta appartenente al semipiano $\varphi = o$) sono caratterizzati da $\theta = \alpha$.

Allora, il sistema di coordinate indotto da $(r\ \theta,\varphi)$ è (r,φ) ristretto alla superficie del cono.



Si può dimostrare che $F' \equiv U \cup \{o\}$ (ossia il cono con il vertice) non è una sottovarietà di E.

1.2.7. La seguente proposizione permette di vedere ogni sottospazio affine, come una sottovarietà.

PROPOSIZIONE. Sia $F \subset E$ un sottospazio affine (di dimensione $o \leq m \leq n$) di E.

Allora, F è una sottovarietà.

D. Sia $\bar{F} \subset \bar{E}$ e sia $\{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_m\} \subset \bar{F}$ una base di $\bar{F}$ e sia $o \in F$.

Sappiamo (0.1.12.) che ogni base di $\bar{F}$ può essere completata in modo da ottenere una base di $\bar{E}$

$$B \equiv \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_m,\bar{v}_{m+1},\ldots,\bar{v}_n\} \subset \bar{E} .$$

Allora, considerato il sistema di coordinate cartesiano su E, generato da $o \in F$ e dalla base B, dato da

$$x^i(p) \equiv (p-o)^i$$

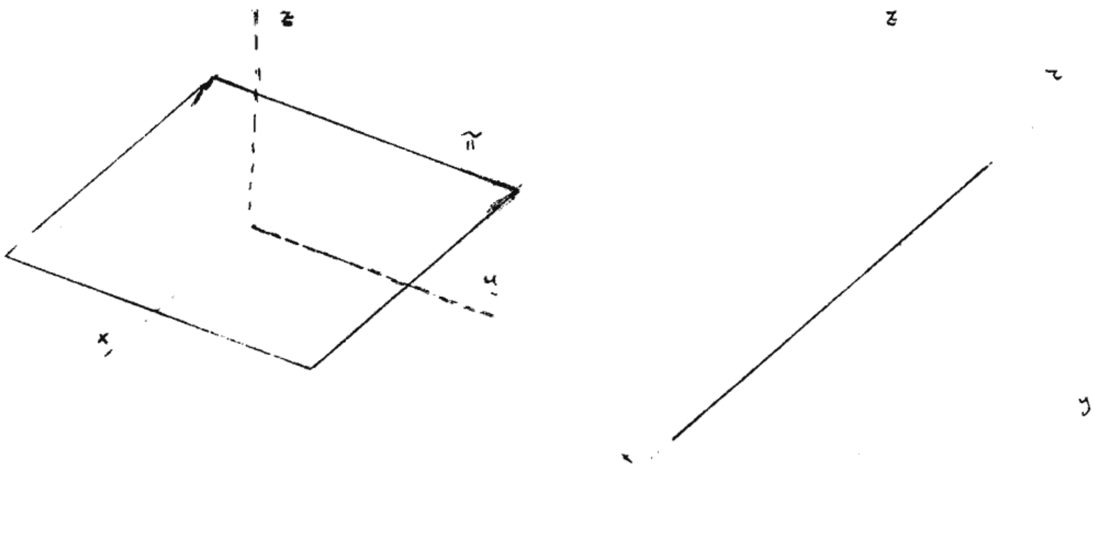
i punti di F sono tutti e soli i punti tali che

$$x^{m+1}(p) = \ldots = x^n(p) = o$$

(le $a^{m+1},\ldots, a^n$ sono tutte nulle e quindi costanti) .

Dunque, un sistema di coordinate adattato ad F, indotto dal sistema di coordinate su E, è quello generato da $o \in F$ e dalla base $\{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_m\} \subset \bar{F}$.

Dunque, se $\dim E=3$, i piani e le rette di E sono sue sottovarietà.



3 SPAZIO TANGENTE

0 In uno spazio affine avevamo un insieme E, un insieme di vettori $\bar{E}$ ed un modo di operare con questi vettori che era la traslazione.

Ora, in una sottovarietà, abbiamo un insieme $F \hookrightarrow E$, ma non abbiamo uno spazio di vettori $\bar{F}$. Con la nozione di spazio tangente alla sottovarietà si vuole ricostruire proprio l'idea di uno spazio di vettori sulla sottovarietà.

Fissato $p \in F$, lo "spazio tangente in p ad F" è l'insieme dei vettori tangenti alle curve differenziabili su E, a valori in F e passanti per p.

Si osservi che non si è parlato di curve differenziabili su F, perché non è stata definita la differenziabilità sulle sottovarietà.

Definiamo, poi, lo spazio tangente TF di F osservando che è un sottoinsieme di TE ma non un prodotto, ossia $TF \neq F \times \bar{F}$, in quanto $T_pF \neq T_qF$.

Infatti, la differenza sostanziale con gli spazi affini consiste nel fatto che sulle sottovarietà non esistono i vettori liberi.

Concludiamo facendo vedere che, mediante l'inclusione canonica $TF \hookrightarrow TE$, TF è una sottovarietà di TE. Inoltre, un sistema di coordinate adattato ad F induce, naturalmente, un sistema di coordinate adattato a TF.

1.3.1 DEFINIZIONE Sia $p \in F$.

Dicesi SPAZIO TANGENTE DI F IN p l'insieme

$$T_pF$$

costiuito dai vettori tangenti alle curve differenziabili $R \to E$ a valori in F e passanti per p.

1.3.2. Il seguente teorema esprime il fatto che T_pF è il sottospazio vettoriale di dimensione m di $T_pE \equiv \bar{E}$, generato dai primi m vettori della base indotta in p dal sistema di coordinate adattato ad F.

TEOREMA Sia $p \in F$.

L'insieme T_pF è un sottospazio vettoriale di dimensione m di $\bar{E}$.

Inoltre, se $x \equiv (x^1,\dots,x^n)$ è un sistema di coordinate adattato in un intorno U di p, allora, T_pF è il sottospazio generato da

$$\{\partial x_1(p),\dots, \partial x_m(p)\}.$$

D. a). Le curve coordinate

$$\overset{o}{x}_{1p} = x_{1p},\dots, \overset{o}{x}_{mp} = x_{mp}$$

sono differenziabili, a valori in F e passanti per p. Pertanto, è

$$\partial x_1(p),\dots, \partial x_m(p) \in T_pF .$$

Inoltre, tali m vettori sono linearmente indipendenti.

b) Sia poi $c : \mathbb{R} \to E$ una curva differenziabile, a valori in F e passante per p. Allora, è

$$c^{m+1} \equiv x^{m+1} \circ c = a^{m+1},\dots, c^n \equiv x^n \circ c = a^n$$

e quindi

$$dc = Dc^{1}(o)\partial x_1(p)+\ldots+Dc^{m}(o)\partial x_m(p) \qquad .$$

Dunque, i vettori $\partial x_1(p),\ldots,\partial x_m(p)$ generano T_pF $\quad \underline{\cdot}$

1.3.3. Osserviamo che in un intorno U di $p \in F$, in generale, esisto- no più carte adattate. Perciò, è importante il seguente corollario.

COROLLARIO

Il numero intero m non dipende dalla scelta del sistema di coordinate adattato in p.

D. Infatti, m è la dimensione di T_pF, il quale è definito senza fa- re riferimento alla scelta di un particolare sistema di coordinate $\underline{\cdot}$

1.3.4. COROLLARIO

Se F è connesso, allora m non dipende dal punto $p \in F$.

D. Sia $\{\mathring{U}_\alpha , \mathring{x}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un atlante adattato ad F. Si ha dunque

$$(1) \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \cap F = F .$$

Sia $A_p \in A$ il sottoinsieme costituito dagli indici α tali che

$\mathring{x}_\alpha : \mathring{U}_\alpha \to \mathbb{R}^p$.

Per il corollario precedente, si vede subito che, se $p \neq q$, è

$$(2) \qquad (\bigcup_{\alpha\in A_p} \mathring{U}_\alpha \cap F) \cap (\bigcup_{\alpha\in A_q} \mathring{U}_\alpha \cap F) = \phi .$$

Ma, essendo F connesso, non possono valere contemporaneamente (1) e (2).

Dunque, non possono esistere due interi distinti p e q, tali che

$$A_p \neq \emptyset \quad , A_q \neq \emptyset \qquad \dot{-}$$

1.3.5. DEFINIZIONE

Se F è connessa, l'intero m che compare nella definizione 1.2.1., il quale non dipende dalla carte e dai punti, è detto la DIMENSIONE di F $\dot{-}$

1.3.6. Diamo ora la nozione di "spazio tangente" di F.

DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO TANGENTE di F il sottoinsieme

$$TF \hookrightarrow TE \equiv E \times \bar{E}$$

dato da

$$TF \equiv \{(p,\bar{v}) \in E \times \bar{E} \;/\; p \in F,\ \bar{v} \in T_pF\} \qquad \dot{-}$$

E' dunque

$$TF = \bigcup_{p \in F} T_pF \quad .$$

Indichiamo con

$$p_F : TF \to F$$

l'applicazione $\quad p_F : (p,\bar{v}) \mapsto p \quad .$

Osserviamo che se $\dim F = n$ (F aperto di E), allora è

$$T_p F = \bar{E} \qquad , \; TF = F \times \bar{E} \; .$$

In generale, TF non è un prodotto cartesiano, ma solo un sottoinsieme del prodotto cartesiano $E \times \bar{E}$. Ciò dipende dal fatto che, in generale, non esiste uno spazio vettoriale libero $\bar{F}$ associato ad F.

1.3.7. PROPOSIZIONE

TF è una sottovarietà di TE di dimensione $2m$.

Inoltre, se $x \equiv (x^1,\ldots,x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ è un sistema di coordinate di E adattato ad F, in $p \in F$, allora

$$(\check{x}^1,\ldots,\check{x}^m;\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n) : TU \to \mathbb{R}^{2n}$$

è un sistema di coordinate adattato a TF, in $(p,\bar{v}) \in TF$.

Pertanto

$$(\mathring{\check{x}}^1,\ldots,\mathring{\check{x}}^m;\; \mathring{\dot{x}}^1,\ldots,\mathring{\dot{x}}^m) : T\mathring{U} \to \mathbb{R}^{2m}$$

è un sistema di coordinate di TF.

D. Infatti $TU = U \times \bar{E}$ è un intorno di $(p,\bar{v}) \in TF$ ed è

$$(q,\bar{w}) \in TU \cap TF \iff \check{x}^{m+1}(q,\bar{w}) = a^{m+1},\ldots,\check{x}^n(q,\bar{w}) = a^n,$$
$$\dot{x}^{m+1}(q,\bar{w}) = 0,\ldots,\dot{x}^n(q,\bar{w}) = 0 \qquad \underline{\cdot}$$

Si noti che

$$T\mathring{U} \equiv T(U \cap F) = TU \cap TF \quad .$$

1.3.8. DEFINIZIONE

Indichiamo con

$$Tj : Tf \hookrightarrow TE$$

l'INCLUSIONE CANONICA $\underline{\cdot}$

Questa posizione sarà giustificata dopo la definizione si applicazione tangente.

4 APPLICAZIONI DIFFERENZIABILI

0 Siano $F \hookrightarrow E$ ed $F' \hookrightarrow E'$ due sottovarietà.

In questo paragrafo dopo aver definito la differenziabilità di un'applicazione $f : F \to F'$, diamo una condizione necessaria e sufficiente affinché f sia differenziabile.

Consideriamo, infine, alcune applicazioni importanti differenziabili.

1.4.1. DEFINIZIONE Sia $f : F \to F'$ un'applicazione.

Si dice che f è DIFFERENZIABILE (di classe $\mathcal{C}^k$) se per ogni $p \in F$, esiste

- un intorno U di p in E,
- un'estensione differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) $\tilde{f}$ di f

$$\tilde{f} : U \to F' \hookrightarrow E' \qquad \blacktriangle$$

Dunque, il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
U \cap F \arrow[r, "f_{/U\cap F}"] \arrow[d, hook, "j_{/U\cap F}"'] & F' \arrow[d, hook] \\
U \subset E \arrow[r, "\tilde{f}"] & E'
\end{tikzcd}$$

e la differenziabilità di f(da definire) è rimandata alla differenziabilità di $\tilde{f}$, se esiste (che è già stata definita nello studio degli spazi affini) .

1.4.2. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$), è che sia differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) la sua espressione in un sistema di coordinate adattato. Più precisamente vale il seguente teorema.

TEOREMA Sia $f : F \to F'$ un'applicazione tra sottovarietà.

a) Se f è differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$), allora, per ogni $p \in F$ e per ogni sistema di coordinate adattato in un intorno $U \subset E$ di p

$$x : E \to V \subset \mathbb{R}^n$$

l'applicazione

$$f \circ \mathring{x}^{-1} : \mathring{V} \to F' \hookrightarrow E'$$

è differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) .

b) Se per ogni $p \in F$, esiste un sistema di coordinate adattato in un intorno $U \subset E$ di p

$$x : U \to V \subset \mathbb{R}^n$$

tale che l'applicazione

$$f \circ \mathring{x}^{-1} : \mathring{V} \to F'$$

sia differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$), allora f è differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) .

D. a) $\Rightarrow$ b). Il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathring{V} \arrow[r, "\mathring{x}^{-1}"] \arrow[dd, hook] & \mathring{U} \arrow[dd, hook] \arrow[dr, "f/\mathring{U}"] & & \\
 & & F' \arrow[r, hook] & E' \\
V \arrow[r, "x^{-1}"] & U \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Poliché l'applicazione

$$\mathring{V} \hookrightarrow V \xrightarrow{x^{-1}} U \xrightarrow{\tilde{f}} F' \hookrightarrow E'$$

è differenziabile (di classe C^k), allora l'applicazione

$$\mathring{V} \xrightarrow{\mathring{x}^{-1}} \mathring{U} \xrightarrow{f/\mathring{U}} F' \hookrightarrow E'$$

è differenziabile (di classe C^k) .

b) $\Rightarrow$ a). Sia $x : U \to V$ un sistema di coordinate come in b).

Allora, l'applicazione differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$)

$$U \xrightarrow{x} V \to \mathring{V} \xrightarrow{\mathring{x}^{-1}} \mathring{U} \xrightarrow{f/\mathring{U}} F' \hookrightarrow E'$$

è un'estensione locale di f.

Dunque, f è differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) $\underline{.}$

1.4.3. ESEMPI

Le applicazioni

$$j : F \hookrightarrow E$$
$$\mathring{x} : \mathring{U} \to \mathring{V}$$
$$p_F : TF \to F$$

sono differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$) .

L'applicazione

$$(\overset{\circ}{\check{x}}{}^1, \ldots, \overset{\circ}{\check{x}}{}^m; \overset{\circ}{\dot{x}}{}^1, \ldots \overset{\circ}{\dot{x}}{}^m) : T\mathring{U} \to T\mathring{V}$$

è di classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

5 APPLICAZIONE TANGENTE

0 Siano $F \hookrightarrow E$ e $F' \hookrightarrow E'$ due sottovarietà, rispettivamente di dimensione m e m'. Sia $f : F \to F'$ un'applicazione differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) .

In questo paragrafo, dopo aver fatto vedere che il vettore $D\tilde{f}(p)(\bar{v})$ appartiene allo spazio $T_{f(p)}F'$, diamo la nozione (analoga a quella data sugli spazi affini) di "applicazione tangente" di f. Inoltre, considerati due sistemi di coordinate adattati a F e a F', precisiamo l'espressione locale di Tf.

Concludiamo con un breve studio di alcune applicazioni differenziabili.

1.5.1. LEMMA Sia $\bar{v} \in T_pF$.

Allora, il vettore

$$D\tilde{f}(p)(\bar{v}) \in T_{f(p)}F'$$

ed esso non dipende dalla scelta dell'estensione differenziabile $\tilde{f} : U \to F' \hookrightarrow E'$.

D. Esiste una curva differenziabile $c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$ tale che

$$\bar{v} = Dc(o) \qquad , c(o) = p \ .$$

Allora, è

$$\tilde{f} \circ c = f \circ c \ : \mathbb{R} \to F' \hookrightarrow E' \quad .$$

Pertanto

$$D\tilde{f}(p)(\bar{v}) = D(\tilde{f} \circ c)(o) = D(f \circ c)(o) \in T_{f(p)} F' \qquad \dot{-}$$

1.5.2. Possiamo dare, allora, la nozione di "applicazione tangente" di f.

DEFINIZIONE

Dicesi APPLICAZIONE TANGENTE di f l'applicazione

$$Tf : TF \to TF'$$

data da
$$Tf : (p,\bar{v}) \mapsto (f(p), \tilde{D}f(p)(\bar{v}))$$.

1.5.3. La seguente proposizione dà l'espressione locale di Tf.

PROPOSIZIONE Siano $x \equiv (x^1,\ldots,x^n)$ e $y \equiv (y^{1'},\ldots,y^{n'})$ due sistemi di coordinate adattati ad F e ad F', rispettivamente(se $\dim E = n$, $\dim E' = n'$).

Allora, l'espressione locale di Tf è data da

$$\check{y}^i \circ Tf = y^i \circ f \equiv f^i$$

$$\check{y}^i \circ Tf = (\partial x_j . f^i)x^j$$.

1.5.4. COROLLARIO

Se f è di classe $\mathcal{C}^k$, allora Tf è di classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

1.5.5. Vediamo ora due casi interessanti di applicazioni differenziabili.

1) CASO $f : \mathbb{R} \to F$.

Sia f un'applicazione differenziabile. Allora poniamo

$$df : \mathbb{R} \to TF$$

dove

$$df(\lambda) \equiv Tf(\lambda,1) \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R} .$$

2) CASO $f : F \to \mathbb{R}$.

Sia f un'applicazione differenziabile. Allora poniamo

$$\dot{f} : TF \to \mathbb{R}$$

dove

$$\dot{f}(p,\bar{v}) \equiv \pi^2(Tf(p,\bar{v})) = \tilde{D}f(p)(\bar{v}) \quad , \quad \forall (p,\bar{v}) \in TF .$$

1.5.6. PROPOSIZIONE Sia $x \equiv (x^1,\ldots x^n)$ un sistema di coordinate adattato ad F.

Allora, $\forall\ 1 \leq i \leq m$, è

$$\dot{\mathring{x}}^i = \mathring{\dot{x}}^i \quad .$$

D. Per ogni $(p,\bar{v}) \in TF$, è

$$\dot{\mathring{x}}^i(p,\bar{v}) \equiv Dx^i(p)(\bar{v}) = \dot{x}^i(p,\bar{v}) = \mathring{\dot{x}}^i(p,\bar{v}) \qquad \dot{-}$$

6 SPAZIO COTANGENTE

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $o \leq m \leq n$, di uno spazio affine E di dimensione n.

Definiamo lo "spazio cotangente in p di F"(T_p^*F) come il duale di T_pF.

Osserviamo che si ha la proiezione $T_p^*E \to T_p^*F$ ma non l'inclusione $T_p^*F \hookrightarrow T_p^*E$.

Per avere un'inclusione canonica, dovremmo sapere come opera una forma di T_p^*F, non solo sui vettori di T_pF, ma anche sui vettori del supplementare di T_pF, il quale però non è dato canonicamente.

Si vede, invece, che se E è munito di una metrica, allora possiamo scomporre T_pE come somma diretta $T_pE = T_pF \oplus (T_pF)^{\perp}$.

Dunque, è possibile considerare la proiezione parallela $p'':T_pE \to T_pF$ e, mediante l'applicazione trasposta di p'' abbiamo l'inclusione $T_p^*F \hookrightarrow T_p^*E$.

Definiamo poi "lo spazio cotangente" T^*F: si vede che, tramite l'inclusione $T^*F \hookrightarrow T^*E$, tale spazio è una sottovarietà di T^*E di dimensione $2m$.

Osserviamo che, in generale, T^*F non è un prodotto cartesiano, ma solo un sottoinsieme di $E \times \bar{E}^*$.

Si osservi che la definizione di T^*F non ha nulla a che fare con l'esistenza di una metrica. Noi abbiamo considerato una metrica (che pure è assegnata in molti dei casi di nostro interesse) allo scopo di poter considerare T^*F come sottovarietà dello spazio affine T^*E.

Introducendo la nozione di varietà differenziabile, si potrebbe vedere facilmente che T^*F è una varietà differenziabile; noi abbiamo voluto evitare, a questo punto, tale concetto, perché è meno intuitivo di quello di sottovarietà.

1.6.1. DEFINIZIONE Sia $p \in F$.

Dicesi SPAZIO COTANGENTE di F in p lo spazio vettoriale

$$T^*_pF \equiv (T_pF)^* \quad \dot{-}$$

Dunque, T^*_pF è uno spazio vettoriale di dimensione m.

1.6.2. DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO COTANGENTE di F l'insieme

$$T^*F \equiv \{(p,\underline{v}) \in E\times\bar{E}^* \;/ p \in F \;,\; \underline{v} \in T^*_p F\} \quad \dot{-}$$

E' dunque

$$T^*F = \bigcup_{p\in F} T^*_pF \quad .$$

In generale T^*F non è un prodotto cartesiano, ma solo un sottoinsieme del prodotto $E \times \bar{E}^*$.

Nel caso particolare in cui $\dim F = n$ (F aperto di E), allora è

$$T^*_pF = \bar{E}^* \quad , \; T^*F = F \times \bar{E}^* \; .$$

1.6.3. DEFINIZIONE

Indichiamo con j^* la proiezione

$$j^* : T^*E \to T^*F$$

data da $\qquad j^*:(p,\underline{\nu}) \mapsto (p,\underline{\nu}/_{T_pF})$.

Indichiamo con q_F l'applicazione

$$q_F : T^*F \to F$$

data da
$$q_F :(p,\underline{\nu}) \mapsto p \quad \dot{}$$

Si noti che è

$$T^*\overset{\circ}{U} \equiv T^*(U \cap F) = j^*(T^*U) \cap T^*F \quad .$$

1.6.4. PROPOSIZIONE Sia $x \equiv (x^1,\ldots,x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate differenziabile di E, adattato ad F, in $p \in F$.

Allora l'applicazione

$$(\hat{\overset{\circ}{x}}{}^1,\ldots,\hat{\overset{\circ}{x}}{}^m;\dot{\overset{\circ}{x}}_1,\ldots,\dot{\overset{\circ}{x}}_m) : T^*\overset{\circ}{U} \to \mathbb{R}^{2m}$$

data da

$$\hat{\overset{\circ}{x}}{}^i(p,\underline{\nu}) \equiv x^i(p) \qquad ,\dot{\overset{\circ}{x}}_i(p,\underline{\nu}) \equiv \langle\underline{\nu}\ ,\partial x_i(p)\rangle \quad , \forall(p,\underline{\nu})\in T^*\overset{\circ}{U} \equiv T^*(U \cap F)\subset T^*F$$

è biiettiva.

D. Infatti, fissata la base $\{\partial x_1(p),\ldots,\partial x_n(p)\} \in T_pE$, esiste un isomorfismo naturale (indotto da questa base) tra lo spazio T_p^*F e il sottospazio, di dimensione m, di T_p^*E generato da $dx^1(p),\ldots,dx^n(p)$, dato da

$$\underline{\nu} \mapsto \langle\ \underline{\nu},\ \partial x_1(p)\rangle dx^1(p) + \ldots + \langle\ \underline{\nu}\ ,\partial x_n(p)\rangle dx^n(p) \quad \dot{}$$

Si noti che l'isomorfismo precedente dipende dalla scelta della base.

Pertanto, non esiste un modo canonico (dipendente dalla sola struttura affine di E) di vedere T^*E come una sottovarietà di T^*E.

La precedente proposizione permetterebbe di vedere T^*F come una "varietà differenziabile", ma noi vogliamo evitare questa nozione astratta e ragionare solo in termini di sottovarietà di uno spazio affine.

Se però assumiamo in E una struttura euclidea $\underline{g}$, allora è possibile vedere T^*F come una sottovarietà di T^*E.

1.6.5. Sia, dunque, $(E,\underline{g})$ uno spazio affine euclideo, di dimensione n.

LEMMA. Sia $U \subset E$ un intorno di $p \in F$, e sia $x \equiv (x^1,\dots,x^n):U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate differenziabile di E, adattato ad F.

Allora esiste un sistema di coordiante adattato

$$y \equiv \{y^1,\dots y^n\} : V \subset U \to \mathbb{R}^n$$

tale che

$$\partial y_{m+1}(p), \dots, \partial y_n(p) \in (T_pF)^{\perp} \quad , \quad \forall\, p \in V_2F \text{ .}$$

Un tale sistema $y : V \to \mathbb{R}^n$ si dice "ortogonale, adattato ad F".

1.6.6. TEOREMA

Lo spazio cotangente T^*F è una sottovarietà di T^*E, di dimensione $2m$ mediante l'inclusione canonica data da

$$j : T^*F \to T^*E$$

$$j : (p,\underline{\nu}) \mapsto (p,\underline{\omega})$$

dove è

$$\underline{\omega}(\bar{v}) = \begin{cases} \underline{\nu}(\bar{v}) & \text{se } \bar{v} \in T_pF \\ o & \text{se } \bar{v} \in (T_pF)^{\perp} \end{cases} .$$

Inoltre, se x è un sistema di coordinate su U adattato ad F, ed y è un sistema ortogonale adattato, da esso dedotto, allora

$$T^*y = \{\hat{y}^1,\ldots,\hat{y}^n; \dot{y}_1,\ldots,\dot{y}_n\}$$

è un sistema adottato a T^*F

e

$$\{\mathring{\hat{x}}^1, \ldots,\mathring{\hat{x}}^m , \mathring{\dot{x}}_1,\ldots,\mathring{\dot{x}}_m\}$$

è il sistema di coordinate su $T^*\mathring{U}$, indotto da esso

Mediante l'identificazione di T^*F ad un sottoinsieme di T^*E, indotta da j, è

$$(p,\underline{\nu}) \in T_p^*F \Leftrightarrow \underline{\nu}((T_pF)^{\perp}) = o \Leftrightarrow \dot{y}_{m+1}(p,\underline{\nu}) = \ldots = \dot{y}_n(p,\underline{\nu}) = o.$$

Inoltre, è

$$1 \le i \le m \qquad \dot{y}_i = \mathring{\dot{x}}_i \qquad \text{su } T^*F \quad .$$

Si osservi che la definizione di T^*F non ha nulla a che fare con l'esistenza di una metrica. Noi abbiamo considerato una metrica (che pure è assegnata in molti dei casi di nostro interesse) allo scopo di poter considerare T^*F come una sottovarietà dello spazio affine T^*E.

Introducendo la nozione di varietà differenziabile, si potrebbe vedere facilmente che T^*F è una varietà differenziabile; noi abbiamo voluto evitare, a questo punto, tale concetto perché è meno intuitivo di quello di sottovarietà.

1.6.7. DEFINIZIONE Sia $f : F \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Indichiamo con df l'applicazione

$$df : F \to T^*F$$

data da

$$< df(p),(p,\bar{v})> \equiv \dot{f}(p,\bar{v}) \quad , \quad \forall\, p \in F \quad , (p,\bar{v}) \in T_pF \quad .$$

1.6.8. Siano F ed F' due sottovarietà. Sia $f : F \to F'$ un diffeomorfismo.

Si può definire in modo del tutto analogo a quello del caso degli spazi affini l'applicazione

$$T^*f : T^*F \to T^*F' .$$

1.6.9. PROPOSIZIONE.

Sia $F \subset E$ una sottovarietà. Sia $x : U \to \mathbb{R}^n$ un sitema di coordinate adottato. Allora

$$T^*\overset{\circ}{x} = \{\hat{\overset{\circ}{x}}{}^1, \ldots, \hat{\overset{\circ}{x}}{}^m, \overset{\circ}{\dot{x}}_1, \ldots \overset{\circ}{\dot{x}}_m\}$$

è un sistema di coordiante indotto su $T^*\overset{\circ}{U}$.

7 SPAZI TENSORIALI

0 Questo paragrafo può essere letto in un secondo momento in quanto è una generalizzazione dei paragrafi 1.3. e 1.6. di questo capitolo.

Sia, una sottovarietà, di dimensione m, di uno spazio affine E di dimensione n.

1.7.1. DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO DEI TENSORI di grado (r,s) di F l'insieme

$$T^r_s F \equiv \bigcup_{p \in F} (\otimes^r T_p F \otimes^s T^*_p F)$$

Dicesi SPAZIO DEI TENSORI ESTERNI di grado (r,s) di F l'insieme

$$\Lambda^r_s F \equiv \bigcup_{p \in F} (\Lambda^r T_p F \otimes \Lambda^s T_p{}^* F) \quad \dot{-}$$

Si vede facilmente che $T^r F$ e $\Lambda^r F$ sono sottovarietà di $T^r E$ e $\Lambda^r E$.

Inoltre, se è data una metrica $\underline{g}$ su E, possiamo identificare $T_s F$ e $\Lambda_s F$ con sottovarietà di $T_S E$ e $\Lambda_s E$.

Le considerazioni sui sistemi di coordinate fatte per TF e $T^* F$ si estendono facilmente a $T^r_s F$ e $\Lambda^r_s F$.

1.7.2. DEFINIZIONE

Dicesi CAMPO TENSORIALE un'applicazione (di classe $\mathcal{C}^k$)

$$t : F \to T^r_s F$$

tale che

$$t(p) \in T^r_{sp} F \quad , \forall\, p \in F .$$

Dicesi CAMPO TENSORIALE ESTERNO un'applicazione(di classe $\mathcal{C}^k$)

$$t : F \to \Lambda^r_s F$$

tale che $$t(p) \in \Lambda^r_{sp} F \quad , \quad \forall\, p \in F \quad .$$

Si noti che non si può parlare di campi tensoriali liberi, ma solo di campi tensoriali applicati, in quanto non esiste una fibra svincolata dal punto di applicazione $p \in F$.

1.7.3. PROPOSIZIONE Sia U un intorno aperto di $p \in F$ e sia $x \equiv (x^1,\dots,x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate di E, adattato ad F.

E' $$\partial \breve{x}_i : \breve{U} \to T^1_o \breve{U} \quad , \quad d\breve{x}^i : \breve{U} \to T^o_1 \breve{U} \ ,$$

inoltre

$$<d\breve{x}^i \ , \ \partial \breve{x}_j > \ = \ \delta^i_j \quad .$$

Allora, l'espressione locale di un campo tensoriale $t : F \to T^r_s F$ è data da

$$t_{/\breve{U}} = t^{i_1 \dots i_r}_{\quad j_1 \dots j_s} \ \partial \breve{x}_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial \breve{x}_{i_r} \otimes d\breve{x}^{j_1} \otimes \dots \otimes d\breve{x}^{j_s} \ ,$$

dove è

$$t^{i_1 \dots i_r}_{\quad j_1 \dots j_s} = t_{/\breve{U}}(dx^{i_1},\dots,dx^{i_r};\partial \breve{x}_{j_1},\dots,\partial \breve{x}_{j_s}) : U \to \mathbb{R}.$$

Una formula analoga vale per $t : F \to \wedge^r_s F$. Ossia, è

$$t_{/\mathring{U}} = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \dots < i_r \le m \\ 1 \le j_1 < \dots < j_s \le m}} t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \, \partial \mathring{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial \mathring{x}_{i_r} \otimes d\mathring{x}^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} ,$$

dove

$$t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = t_{/\mathring{U}}(d\mathring{x}^{i_1}, \dots, d\mathring{x}^{i_r}; \partial \mathring{x}_{j_1}, \dots, \partial \mathring{x}_{j_s}) : \mathring{U} \to \mathbb{R} \; \dot{-}$$

Indichiamo con $\mathcal{T}^r_s F$ e $\Omega^r_s F$ gli spazi vettoriali dei campi tensoriali e dei campi tensoriali esterni di F, rispettivamente.

1.7.4. Dunque, un'equazione differenziale del 1° ordine su F è un qualsiasi campo vettoriale

$$\bar{\mathring{X}} : F \to TF \quad .$$

La sua espressione in coordinate, è

$$\bar{\mathring{X}} = \sum_{i=1}^{m} X^i \partial \mathring{x}_i = \sum_{i=1}^{m} \dot{x}^i \partial \mathring{x}_i \qquad .$$

8 SECONDI SPAZI TANGENTI E COTANGENTI DI UNA SOTTOVARIETA'

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $m \leq n$, di uno spazio affine E di dimensione n.

Vogliamo precisare ora i secondi spazi tangenti e cotangenti di F.

In modo analogo a quanto fatto per gli spazi affini, definiamo tali spazi come spazi tangenti e cotangenti delle sottovarietà TF e T^*F.

Osserviamo, ancora una volta, che non esiste un modo canonico (dipendente dalla sola struttura affine di E) di vedere gli spazi T^*TF e T^*T^*F come sottovarietà di T^*TE e T^*T^*E, rispettivamente. Ciò accade, invece, se assumiamo in E una struttura euclidea $\underline{g}$.

Diamo poi gli spazi verticale ed orizzontale di TTF e T^*TF, rispettivamente, osservando che su TTF non c'è uno spazio orizzontale canonico, come non esiste uno spazio verticale canonico su T^*TF.

1.8.1. PROPOSIZIONE

E'

$$TTF = \bigcup_{(p,\bar{v})\in TE} T_{(p,\bar{v})}(TF)$$

$$TT^*F = \bigcup_{(p,\underline{v})\in T^*F} T_{(p,\underline{v})}(T^*F)$$

$$T^*TF = \bigcup_{(p,\bar{v})\in TF} T^*_{(p,\bar{v})}(TF)$$

$$T^*T^*F = \bigcup_{(p,\underline{v})\in T^*F} T^*_{(p,\underline{v})}(T^*F) \qquad \dot{-}$$

Si vede che TTF e TT^*F sono delle sottovarietà, di dimensione $4m$, rispettivamente di TTE e TT^*E.

Invece, se E è uno spazio affine euclideo, allora anche T^*TF e T^*T^*F sono delle sottovarietà, di dimensione 4m, rispettivamente di T^*TE e T^*T^*E.

Inoltre, se U è un aperto di $p \in F$, di E e $x \equiv (x^1, \dots, x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate differenziabile(almeno due volte) di E, adattato ad F, le applicazioni

$$(\check{\check{x}}^i, \check{\dot{x}}^i ; \dot{\check{x}}^i, \ddot{x}^i) : TTU \to \mathbb{R}^{4n}$$

$$(\check{\hat{x}}^i, \check{\dot{x}}_i ; \dot{\hat{x}}^i, \ddot{x}_i) : TTU \to \mathbb{R}^{4n}$$

$$(\hat{\check{x}}^i, \hat{\dot{x}}^i ; \dot{\check{x}}_i, \ddot{x}_i) : TTU \to \mathbb{R}^{4n}$$

$$(\hat{\hat{x}}^i, \hat{\dot{x}}_i ; \dot{\hat{x}}_i, \ddot{x}^i) : TTU \to \mathbb{R}^{4n}$$

sono dei sistemi di coordinate, rispettivamente, di TTE, TT^*E, T^*TE, T^*T^*E adattati a TTF, TT^*F, T^*TF, T^*T^*F.

Pertanto, le applicazioni

$$(\check{\check{\mathring{x}}}^i, \check{\dot{\mathring{x}}}^i ; \dot{\check{\mathring{x}}}^i, \ddot{\mathring{x}}^i) : TT\mathring{U} \to \mathbb{R}^{4m}$$

$$(\check{\hat{\mathring{x}}}^i, \check{\dot{\mathring{x}}}_i ; \dot{\hat{\mathring{x}}}^i, \ddot{\mathring{x}}_i) : TT\mathring{U} \to \mathbb{R}^{4m}$$

$$(\hat{\check{\mathring{x}}}^i, \hat{\dot{\mathring{x}}}^i ; \dot{\check{\mathring{x}}}_i, \ddot{\mathring{x}}_i) : TT\breve{U} \to \mathbb{R}^{4m}$$

$$(\hat{\hat{\mathring{x}}}^i, \hat{\dot{\mathring{x}}}_i ; \dot{\hat{\mathring{x}}}_i, \ddot{\mathring{x}}^i) : TT\mathring{U} \to \mathbb{R}^{4m}$$

sono dei sistemi di coordinate di TTF, TT^*F, T^*TF, T^*T^*F, indotti su TTU.

1.8.2. Definiamo il sottospazio verticale di TTF. Ricordiamo che se E è uno spazio affine, il verticale νTTE è costituito dai punti che hanno la terza componente nulla. Ora poiché TTF non è in generale un prodotto, non possiamo dare per le sottovarietà la stessa definizione.

Ne diamo allora un'altra, compatibile con quella data sugli spazi affini.

DEFINIZIONE

Dicesi SOTTOSPAZIO VERTICALE di TTF il sottinsieme

$$\nu TTF$$

di TTF i cui punti sono costituiti dai vettori di TF, che sono tangenti alle curve verticali,ossia alle curve del tipo

$$c : \mathbb{R} \rightarrow TF$$

per cui è

$$p_F \circ c = \text{cost} \qquad \underline{\cdot}$$

Si noti che non c'è uno spazio orizzontale canonico. Infatti, non si possono definire curve orizzontali, curve,cioé che lasciano invariata la "velocità", dato che $T_pF \neq T_qF$ e non si possono confrontare velocità in punti distinti.

1.8.3. DEFINIZIONE

Dicesi SOTTOSPAZIO ORIZZONTALE di T^*TF il sottoinsieme

$$o\, T^*TF$$

di T^*TF i cui punti sono costituiti dalle forme di T^*TF, che sono nulle sui vettori verticali.

Anche in questo caso non esiste uno spazio verticale canonico di T^*TF.

1.8.4. PROPOSIZIONE

Lo spazio verticale νTTF e lo spazio orizzontale oT^*TF sono carat terizzati, rispettivamente, da

$$\overset{\bullet}{\overset{\vee}{x}}{}^i = o \quad , \; x_i = o \qquad , \text{ con } i = m+1,\dots,n.$$

Pertanto, le seguenti applicazioni

$$(\overset{\vee}{\overset{\circ}{x}}{}^i, \overset{\vee}{\dot{\overset{\circ}{x}}}{}^i, \ddot{\overset{\circ}{x}}{}^i) : \nu TT\mathring{U} \to \mathbb{R}^{3m}$$

$$(\hat{\overset{\vee}{\overset{\circ}{x}}}{}^i, \hat{\dot{\overset{\circ}{x}}}{}^i, \ddot{\overset{\circ}{x}}_i) : oT^*T\mathring{U} \to \mathbb{R}^{3m}$$

sono dei sistemi di coordinate su νTTF e su oT^*TF, rispettivamente .

1.8.5. PROPOSIZIONE

Esistono i seguenti isomorfismi canonici

$$\nu T_{(p,\bar{v})}(TF) \approx T_pF$$

$$o\,T^*_{(p,\bar{v})}(TF) \approx T^*_pF \qquad .$$

Questi isomorfismi saranno utili per lo studio della "connessione riemanniana".

1.8.6. Dunque, un'equazione differenziale del 2° ordine su F è un campo vettoriale

$$\overset{\circ}{\bar{X}} : TF \to TTF$$

le cui curve integrali sono curve basiche, ossia tale che $\overset{\circ}{\bar{X}}$ soddisfi la condizione

$$(c : I \to TF \; , \; dc = \overset{\circ}{\bar{X}} \circ c) \Rightarrow (c = d(p_F \circ c)) \qquad .$$

L'espressione in coordinate di $\overset{\circ}{\bar{X}}$ è

$$\overset{\circ}{\bar{X}} = \sum_{i=1}^{m} (X^i \partial\check{\overset{\circ}{x}}_i + X^{\bar{i}} \partial\dot{\overset{\circ}{x}}_i) = \sum_{i=1}^{m} (\dot{\overset{\circ}{x}}{}^i \partial\check{\overset{\circ}{x}}_i + \ddot{\overset{\circ}{x}}{}^i \partial\dot{\overset{\circ}{x}}_i) \; .$$

La nozione di equazione differenziale del 2° ordine geodetica su F è rimandata al paragrafo 1.10. .

9 METRICA INDOTTA

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $o \leq m \leq n$, di uno spazio affine euclideo $(E,\underline{g})$ di dimensione n.

Lo scopo del presente paragrafo è quello di definire su F una metrica. Sappiamo che su E è definita la metrica $\underline{g} : E \to T_2 E$ data da

$$\underline{g}(p)(\bar{u},\bar{v}) \equiv \bar{u} \cdot \bar{v} \qquad , \forall\, \bar{u},\bar{v} \in \bar{E}\ .$$

Ora, in virtù dell'inclusione canonica $TF \hookrightarrow TE$, resta definita, in modo naturale, una metrica "indotta" su F.

Sostanzialmente, restringiamo $\underline{g}$ ai punti di F e, in ogni punto $p \in F$, applichiamo $\underline{g}$ solo a tutte le possibili coppie di vettori di $\bar{E}$ che sono anche vettori di $T_p F$.

Naturalmente, su F si potrebbero definire altre metriche non provenienti da metriche su E.

1.9.1. DEFINIZIONE

Dicesi METRICA INDOTTA su F il campo tensoriale

$$\underline{g} : F \to T_2 F$$

dato da

$$\overset{\circ}{\underline{g}}(p)(\bar{u},\bar{v}) \equiv \underline{g}(p)(\bar{u},\bar{v}) \qquad , \forall\, p \in F \quad , \bar{u},\bar{v} \in T_p F \subset \bar{E} \ ,$$

ovvero la funzione

$$\overset{\circ}{g} : TF \to \mathbb{R}$$

data da

$$\overset{\circ}{g}(p,\bar{u}) \equiv g(p,\bar{u}) \qquad , \quad \forall\, p \in F,\ \bar{u} \in T_p F \subset \bar{E}$$

(dove $g : TE \to \mathbb{R}$ è la funzione metrica su TE data da

$$g(p,\bar{u}) \equiv \frac{1}{2}\, \bar{u} \cdot \bar{u} \qquad , \qquad \forall (p,\bar{u}) \in TE) \qquad \dot{-}$$

1.9.2. E' quindi immediata l'espressione in coordinate di tali applicazioni.

PROPOSIZIONE Sia $x \equiv (x^1,\dots,x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su un aperto U di p, adattato ad F.

Allora, è

$$\underline{\overset{\circ}{g}} = \overset{\circ}{g}_{ij}\, d\overset{\circ}{x}{}^i \otimes d\,\overset{\circ}{x}{}^j \ ,$$

$$\overset{\circ}{g} = \frac{1}{2}\, \check{\overset{\circ}{g}}_{ij}\, \dot{\overset{\circ}{x}}{}^i\, \dot{\overset{\circ}{x}}{}^j \quad , \text{ con } \ 1 \leq i,j \leq m \qquad \dot{-}$$

1.9.3. PROPOSIZIONE

La metrica indotta determina in modo naturale un isomorfismo

$$\underset{\sim}{\overset{\circ}{g}} : \nu\, TTF \to oT^*TF \qquad \dot{-}$$

10 CONNESSIONE RIEMANNIANA

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $o \leq m \leq n$, di uno spazio affine E, di dimensione n.

Sugli spazi affini abbiamo definito l'applicazione $\Gamma : TTE \to \nu TTE$, detta connessione affine.

Ora, si vuole trasportare questa nozione sulle sottovarietà: ossia, si vuole definire una connessione $\overset{o}{\Gamma} : TTF \to \nu TTF$.

Intanto, abbiamo la composizione

$$TTF \overset{TTj}{\hookrightarrow} TTE_{/TF} \overset{\Gamma}{\to} \nu TTE_{/TF}.$$

A priori, non esiste un modo canonico per avere la proiezione

$$\nu\, TTE_{/TF} \to \nu TTF,$$

però se E è uno spazio affine euclideo, è possibile determinare una proiezione di questo tipo.

Infatti, considerando la somma diretta

$$\bar{E} \equiv T_pE = T_pF \oplus (T_pF)^{\perp} \quad ,$$

abbiamo la proiezione parallela $p'' : T_pE \to T_pF$ e la proiezione ortogonale $p^{\perp} : T_pE \to (T_pF)^{\perp}$. Dunque, in virtù dell'isomorfismo canonico

$$T_pF \approx \nu T_{(p,\bar{u})}(TF) \hookrightarrow \nu T_{(p,\bar{u})}(TE) \approx T_pE$$

abbiamo la proiezione cercata (indicata ancora con lo stesso simbolo)

$$p'' : \nu TTE_{/TF} \to \nu TTF.$$

Sia, dunque, E uno spazio affine eulideo.

1.10.1. E' $T_pE \equiv T_pF \oplus (T_pF)^{\perp}$.

Allora, si considerino la proiezione parallela p'' e la proiezione ortogonale $p^{\perp}$

$$p'' : T_pE \to T_pF \qquad , \; p^{\perp} : T_pE \to (\, T_pF)^{\perp} \quad .$$

Ora, in virtù dell'isomorfismo canonico

$$T_pF \;\tilde{\sim}\; \nu T_{(p,\bar{u})}(TF) \hookrightarrow \nu T_{(p,\bar{u})}(TE) \;\tilde{\sim}\; T_pE$$

si possono considerare le proiezioni (indicate ancora con gli stessi simboli)

$$p'' : \nu T_{(p,\bar{u})}(TE) \to \nu T_{(p,\bar{u})}(TF)$$

$$p^{\perp} : \; \nu T_{(p,\bar{u})}(TE) \to (\nu\, T_{(p,\bar{u})}(TF)\,)^{\perp} .$$

Diamo, allora, la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Dicesi CONNESSIONE RIEMANNIANA l'applicazione

$$\overset{\circ}{\Gamma} : TTF \to \nu TTF$$

data da $\qquad \overset{\circ}{\Gamma} = p'' \circ \Gamma \circ TTj \qquad .$

1.10.2. TEOREMA

Valgono le seguenti proprietà:

a) $\overset{\circ}{\Gamma}$ è un operatore di proiezione, ossia è lineare sulle fibre.

b) E' $\quad \overset{\circ}{\Gamma}_{/\nu TTF} = id_{\nu TTF} \quad ,$

quindi

c) $\overset{\circ}{\Gamma}(TTF) = \nu TTF$

d) $\overset{\circ}{\Gamma} \circ \overset{\circ}{\Gamma} = \overset{\circ}{\Gamma} \;\; .$

D. a). Ovvia, essendo $\overset{\circ}{\Gamma}$ composizioni di applicazioni lineari.

b) Segue dal fatto che $\nu TTF \hookrightarrow \nu TTE$, $\Gamma_{/\nu TTE} = id_{\nu TTE}$, $p''_{/\nu TTF} = id_{\nu TTF}$.

c),d). Seguono immediatamente da b) con un ragionamento insiemistico.

1.10.3. Possiamo esprimere la connessione $\overset{\circ}{\Gamma}$ in un qualunque sistema di coordinate adattato.

PROPOSIZIONE Sia $x \equiv (x^1,\dots,x^n) : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ un sistema di coordinate di E, adattato ad F.

Allora, l'espressione di $\overset{\circ}{\Gamma}$ è del tipo

$$\text{(a)} \qquad \overset{\circ}{x}{}^k \circ \overset{\circ}{\Gamma} = \overset{\circ}{x}{}^k + \sum_{i,j=1}^{m} \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}\, \check{x}^i\, \check{x}^k \qquad \text{con } k = 1,\dots,m ,$$

dove

$$\text{(b)} \qquad \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g})^{hk}(\partial\overset{\circ}{x}_i . \overset{\circ}{g}_{jh} + \partial\overset{\circ}{x}_j . \overset{\circ}{g}_{ih} - \partial\overset{\circ}{x}_h . \overset{\circ}{g}_{ij}) \quad .$$

In particolare se $y = (y^1,\dots y^m, y^{m+1},\dots,y^n) \equiv (x^1,\dots x^m, y^{m+1}\dots,y^n)$

è un sistema di coordinate ortogonale, ossia tale che nei punti $p \in F$ è

$$\partial x_i \perp \partial y_j \qquad i = 1,\dots,m \ , \quad j = m+1,\dots,n$$

allora, è

(c) $$\ddot{\mathring{x}}^k \circ \overset{c}{\Gamma} = \ddot{\mathring{x}}^k + \sum_{i,j=1}^{m} \check{\Gamma}^k_{ij/F}\, \dot{\check{x}}^i\, \dot{\check{x}}^j \qquad k = 1,\dots,m \quad .$$

D. Se y è ortogonale, la (c) si ottiene da (5.7.5.) tenendo presente la definizione di $\overset{c}{\Gamma}$.

Dimostriamo ora (a). E'

$$\ddot{\mathring{x}}^k = (\partial y_i \cdot \partial y_j \cdot \check{x}^k)\dot{\mathring{y}}^i\, \dot{\mathring{y}}^j + (\partial y_j \cdot \check{x}^k)\ddot{\mathring{y}}^j$$

e quindi

$$\ddot{\mathring{x}}^k \circ \overset{c}{\Gamma} = (\partial y_j \cdot \check{x}^k)\, \ddot{\mathring{y}}^j \circ \overset{c}{\Gamma}$$

in quanto $\ddot{\mathring{y}}^j \circ \overset{c}{\Gamma} = 0$.

Dunque, tenendo presente (c) , è

$$\ddot{\mathring{x}}^k \circ \overset{c}{\Gamma} = (\partial y_j \cdot \check{x}^k)\, \ddot{\mathring{y}}^j + \sum_{i,h=1}^{m} \check{\Gamma}^j_{ih/F}\, \dot{\mathring{x}}^i\, \dot{\mathring{x}}^h =$$

$$= \ddot{\mathring{x}}^k + \sum_{i,j=1}^{m} \check{\Gamma}^k_{ij/F}\, \dot{\check{x}}^i\, \dot{\check{x}}^j \qquad \text{con } k = 1,\dots,m.$$

Si osservi che $\check{\Gamma}^k_{ij/F}$ sono i soliti simboli di Christoffel .

Dimostriamo ora (b) .

Esprimiamo $\overset{c}{\Gamma}$ e Γ in forma covariante. Poniamo dunque

$$\overset{\circ}{\underline{\Gamma}} \equiv \overset{\circ}{\underset{\sim}{g}} \circ \overset{\circ}{\Gamma} \qquad , \underline{\Gamma} \equiv \underset{\sim}{g} \circ \Gamma .$$

Dimostriamo che il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
TTF \arrow[r, hook, "TTj"] \arrow[rrr, bend left, "\overset{\circ}{\Gamma}"] \arrow[rrrd, bend right=40, "\overset{\circ}{\underline{\Gamma}}"'] & TTE_{/TF} \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[dr, "\underline{\Gamma}"'] & \nu TTE_{/TF} \arrow[r, "p''"] \arrow[d, "\underset{\sim}{g}"] \arrow[dl, phantom, "1)"] \arrow[dr, phantom, "2)"] & \nu TTF \\
 & & oT^*TE_{/TF} \arrow[r, "(Tj)^*"] & oT^*TF \arrow[u, "(\overset{\circ}{\underset{\sim}{g}})^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Il triangolo 1) è commutativo per definizione di $\underline{\Gamma}$.

Il quadrato 2) è commutativo se lo è il seguente

$$\begin{tikzcd}
\nu TTE_{/TF} \arrow[r, "p''"] \arrow[d, "\underset{\sim}{g}"'] & \nu TTF \arrow[d, "\overset{\circ}{\underset{\sim}{g}}"] \\
oT^*TE_{/TF} \arrow[r, "(Tj)^*"] & oT^*TF
\end{tikzcd}$$

ossia, se lo è il seguente

$$\begin{tikzcd}
T_pE \arrow[r] \arrow[d, "'g"'] & T_pF \arrow[d, "'g_{/T_pF}"] \arrow[d, phantom, "1)", shift left=4em] \\
T_p^*E \arrow[r] \arrow[r, phantom, "2)", shift right=4em] & T_p^*F
\end{tikzcd}$$

Facciamo vedere che quest'ultimo diagramma è commutativo.

Consideriamo un generico vettore $\bar{v} \in \bar{E}$ e facciamo vedere che si ottiene la stessa forma di T^*_pF percorrendo uno qualsiasi dei tratti 1) e 2) .

Seguendo il

percorso 1) $\quad \bar{E} \to \bar{E}^* \to T_p{}^*F$

$$\bar{v} \mapsto \underline{v} \mapsto \underline{v}_{/T_pF} \ .$$

abbiamo:

$$\underline{v}_{/T_pF}\ (\bar{x}) \equiv \bar{v} \cdot \bar{x} = (\bar{v}'' + \bar{v}^{\perp}) \cdot \bar{x} = \bar{v}'' \cdot \bar{x} + \bar{v}^{\perp} \cdot \bar{x} = \bar{v}'' \cdot \bar{x}, \qquad \forall\ \bar{x} \in T_pF.$$

Seguendo i
percorso 2) $\quad \bar{E} \to T_pF \to T_p{}^*F$

$$\bar{v} \mapsto \bar{v}'' \mapsto \underline{v}'' \ .$$

$$\underline{v}''(\bar{x}) \equiv \bar{v}'' \cdot \bar{x} \qquad , \forall\ \bar{x} \in T_pF.$$

Si noti che le forme $\underline{v}_{/T_pF}$ e $\underline{v}''$ vanno valutate nello stesso vettore di T_pF.

Dunque, il quadrato 2) è commutativo. Allora, è

$$\overset{\circ}{\underline{\Gamma}} = (Tj)^* \circ \underline{\Gamma} \circ TTj : TTF \to oT^*TF$$

ossia, in coordinate, è

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{k,ij} = \Gamma_{k,ij} \qquad \text{con } 1 \leq i,j,k \leq m \ .$$

Ora abbiamo
$$\overset{\circ}{\Gamma} = (\overset{\circ}{\underset{\sim}{g}})^{-1}\ \overset{\circ}{\underline{\Gamma}}$$

che in coordinate diventa

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ij} = (\overset{\circ}{g})^{hk}\ \overset{\circ}{\Gamma}_{k,ij} = (\overset{\circ}{g})^{hk}\ \Gamma_{k,ij} \ / \ \overset{\circ}{U}$$

con $1 \leq i,j,h,k \leq m$.

Infine, ricordiamo che è (5.8.10)

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}(\partial x_i . g_{kj} + \partial x_j . g_{ki} - \partial x_k . g_{ij}) \quad \dot{-}$$

Si osservi che è

$$(\overset{o}{g}_{ij})^{-1} \equiv (\overset{o}{g})^{ij} \neq (\overset{o}{g^{ij}}) \equiv \overset{o}{\widetilde{(g_{ij})^{-1}}}$$

Invece, è

$$\overset{o}{\partial x_i} . \overset{o}{g}_{ih} = \partial x_i . g_{jh} \qquad , \text{ con } 1 \leq i,j,h \leq m.$$

Dunque, questo teorema molto importante esprime la connessione riemanniana $\overset{o}{\Gamma}$, in termini delle coordinate indotte su Γ, tramite una formula del tutto analoga a quella valida per gli spazi affini.

1.10.4. DEFINIZIONE

Dicesi EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE GEODETICA l'unico campo vettoriale

$$\overset{o}{\bar{X}}_o : TF \to TTF$$

tale che

$$\overset{o}{\Gamma} \circ \overset{o}{\bar{X}}_o = o \quad \dot{-}$$

1.10.5. Possiamo dare l'espressione in coordinate di $\bar{X}_o$.

PROPOSIZIONE Sia $x \equiv (x^1,..,x^n) : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate differenziabile, adattato ad F.

Allora, è

$$\overset{o}{\bar{X}}_o = \sum_{i=1}^{m} (\dot{\overset{o}{x}}{}^i \partial \check{\overset{o}{x}}_i - \sum_{j,k=1}^{m} \check{\overset{o}{\Gamma}}{}^i_{jk} \, \dot{\overset{o}{x}}{}^j \dot{\overset{o}{x}}{}^k \partial \dot{\overset{o}{x}}_i) \quad \dot{-}$$

11 SECONDA FORMA FONDAMENTALE

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $o \leq m \leq n$, di uno spazio affine euclideo E, di dimensione n.

Nel precedente paragrafo, grazie alla struttura euclidea di E, abbiamo definito, mediante p", la connessione riemanniana $\overset{\circ}{\Gamma} : TTF \to \nu TTF$.

Ora, data la proiezione $p^{\perp} : \nu TTE_{/TF} \to (\nu TTF)^{\perp}$ possiamo considerare l'applicazione supplementare

$$k : TTF \to (\nu TTF)^{\perp}$$

osservando che la conoscenza di $\overset{\circ}{\Gamma}$ equivale alla conoscenza di k.

Allora, componendo k con il campo vettoriale geodetico $\overset{\circ}{\bar{X}}_o : TF \to TTF$, definiamo il campo

$$N \equiv k \circ \bar{X}_o : TF \to (\nu TTF)^{\perp}$$

detto "seconda forma fondamentale".

Quindi N dipende dalla metrica e dalla struttura della sottovarietà. Vedremo, inoltre, che N non dipenderà dal campo vettoriale $\overset{\circ}{\bar{X}}_o$.

1.11.1. DEFINIZIONE

Dicesi SECONDA FORMA FONDAMENTALE l'applicazione

$$N : TF \to (\nu TTF)^{\perp}$$

data da

$$N \equiv k \circ \overset{\circ}{\bar{X}}_o$$

dove

- $\mathring{\bar{X}}_o : TF \to TTF$ è il campo vettoriale geodetico dato da

$$\mathring{\Gamma} \circ \bar{X}_o = o \, .$$

- $k : TTF \to (\nu TTF)^{\perp}$ è l'applicazione, detta "la proiezione ortogonale", data da

$$k \equiv p^{\perp} \circ \Gamma \circ TTj \, .$$

Dunque, il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
TTF \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "\mathring{\Gamma}"] & TTE_{/TF} \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[rrd, "k"] & \nu TTE_{/TF} \arrow[r] \arrow[rd] & \nu TTF \\
TF \arrow[u, "\mathring{\bar{X}}_o"] \arrow[rrr, "N"'] & & & (\nu TTF)^{\perp}
\end{tikzcd}$$

Si osservi che abbiamo scritto k invece di $\mathring{k}$, poiché tale applicazione non è intrinseca a TTF, ma ha valori in TTE.

1.11.2. TEOREMA

N è quadratica sulle fibre di TF.

Inoltre, se $x \equiv (x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^n)$ è un sistema di coordinate ortogonale, adattato ad F, è

$$\ddot{\mathring{x}}^k \circ N = \sum_{i,j=1}^{m} \mathring{\Gamma}^k_{ij} \, \dot{\mathring{x}}^i \dot{\mathring{x}}^j \qquad \text{con } k = m+1, \ldots n.$$

D. E'

$$\ddot{x}^k \circ k = \sum_{i,j=1}^{m} \mathring{\Gamma}^k_{ij} \, \check{\dot{x}}^i \dot{\check{x}}^j \qquad \text{con } k = m+1, \ldots, n,$$

e quindi

$$\ddot{\mathring{x}}^k \circ N \equiv \ddot{x}^k \circ k \circ \mathring{\bar{X}}_0 = \sum_{i,j=1}^{m} \mathring{\Gamma}^k_{ij}\, \dot{\mathring{x}}^i \dot{\mathring{x}}^j \qquad \text{con } k = m+1,\dots,n.$$

Dunque, N dipende in forma quadratica dalle x che sono le coordinate sulla fibra di TF.

Si osservi che N è indipendente dalla scelta del campo poiché k annulla la parte verticale dei punti di TTF.

Pertanto, nella definizione di N si potrebbe sostituire $\mathring{\bar{X}}_0$ con un qualsiasi campo vettoriale $TF \to TTF$.

Dunque, il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
TTF \arrow[dr, "k"] & \\
TF \arrow[u, "\mathring{\bar{X}}_0"] \arrow[r, "N"] \arrow[d, "\mathring{\bar{X}}"'] & (v\,TTF)^{\perp} \\
TTF \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

.

12 CURVATURA

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $o \leq m \leq n$, di uno spazio affine euclideo E, di dimensione n.

Sia $c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$ una curva di classe $\mathcal{C}^k$ su E e a valori in F. Dunque, c può essere vista come curva sia di E, sia di F.

Indichiamo con $A : \mathbb{R} \to \nu TTE$ l'applicazione, detta "curvatura", data da $A \equiv \Gamma \circ d^2c$ e con

$$\mathring{A} : \mathbb{R} \to \nu TTF$$

l'applicazione, detta "curvatura su F" data da

$$\mathring{A} \equiv \mathring{\Gamma} \circ d^2c \, .$$

Ricordando che è

$$\nu TTE_{/TF} = \nu TTF \oplus (\nu TTF)^{\perp}$$

possiamo scomporre A nel termine parallelo alla sottovarietà $(\mathring{A})$ e nell'altro termine ortogonale ad F $(N \circ dc)$.

1.12.1. DEFINIZIONE

Dicesi CURVATURA relativa a c su F, l'applicazione

$$\mathring{A} \equiv \mathring{\Gamma} \circ d^2c : \mathbb{R} \to \nu TTF \qquad \dot{-}$$

1.12.2. Considerata la curvatura $A \equiv \Gamma \circ d^2c : \mathbb{R} \to \nu TTE$, il seguente importante teorema fornisce una relazione tra A, $\mathring{A}$ ed N e mostra che la parte ortogonale di A non dipende effettivamente dalla derivata seconda di c, ma solo dalla derivata prima.

TEOREMA

E'

$$A = \mathring{A} + N \circ dc \,.$$

D. E' $\nu TTE_{/TF} = \nu TTF \oplus (\nu TTF)^{\perp}$. Allora, vale la seguente relazione

$$A = \mathring{A} + k \circ d^2 c.$$

Facciamo ora vedere che è

$$k \circ d^2 c = N \circ dc.$$

Sia $x \equiv (x^1, \dots, x^m, \dots, x^n)$ un sistema di coordinate ortogonale ad F.

Allora, è

$$(k \circ d^2 c)^i \equiv \ddot{\mathring{x}}^i \circ k \circ d^2 c = \sum_{j,h=1}^{m} (\mathring{\Gamma}^i_{jh} \circ c)\, Dc^j Dc^h$$

$$(N \circ dc)^i \equiv \ddot{\mathring{x}}^i \circ N \circ dc = \sum_{j,h=1}^{m} (\mathring{\Gamma}^i_{jh} \circ c)\, Dc^j Dc^h \qquad \text{con} \quad i = m+1, \dots, n \,.$$

Dunque, il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} & TTF \arrow[dr, "k"] & \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "d^2c"] \arrow[dr, "dc"'] & & (\nu TTF)^{\perp} \\ & TF \arrow[ur, "N"'] & \end{tikzcd}$$

Dunque, la curvatura A si scompone in due termini.
Il primo termine $(\mathring{A})$ dipende dalle derivate seconde (d^2c); il secondo termine $(N \circ dc)$ dipende in modo quadratico dalle derivate prime (dc).

1.12.3. DEFINIZIONE

Dicesi GEODETICA di F una curva $\mathcal{C}^k$

$$c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$$

tale

$$\check{A} \equiv \check{\Gamma} \circ d^2 c = o \quad \dot{-}$$

1.12.4. Caratterizziamo ora una geodetica di F.

PROPOSIZIONE Sia $c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$ una curva $\mathcal{C}^k$ su E a valori in F.

Le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) c è una geodetica di F.

b) c è una soluzione di $\mathring{\bar{X}}_o$, ossia è

$$\check{\bar{X}}_o \circ dc = d^2 c \ .$$

D. a) $\Rightarrow$ b). Segue immediatamente dall'espressione in coordinate di $\check{\bar{X}}_o$ e c.

b) $\Rightarrow$ a). E'

$$\mathring{\Gamma} \circ d^2 c = \mathring{\Gamma} \circ (\check{\bar{X}}_o \circ dc) = \underbrace{(\mathring{\Gamma} \circ \mathring{\bar{X}}_o)}_{= o} \circ dc = o \quad \dot{-}$$

1.12.5. Il seguente corollario fornisce il significato geometrico di N.

COROLLARIO

Se $c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$ è una geodetica di F allora

$$A \equiv \Gamma \circ d^2 c = N \circ dc \quad \dot{-}$$

Dunque, N misura di quanto le geodetiche di F si discostano dall'essere geodetiche di E (rette).

1.12.6. COROLLARIO

Le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) $N = o$.

b) F è un sottospazio affine $\quad \dot{-}$