0 INTRODUZIONE

I "sistemi di coordinate" servono per interpretare uno spazio affine come uno spazio numerico: essi svolgono, in esso, il compito svolto dalle basi in uno spazio vettoriale.

Sia, dunque, E uno spazio affine di dimensione n. Un sistema di coordinate

$$x : E \to \mathbb{R}^n$$

su E è un "omeomorfismo", ossia un'applicazione biiettiva e continua, insieme all'inversa x^{-1}. Sostanzialmente, ad ogni punto di E, x fa corrispondere un'unica n-pla di numeri reali e viceversa. Il fatto che tale applicazione debba essere un omeomorfismo, serve a garantire che la traduzione in coordinate "rispetti" tutte le proprietà topologiche dello spazio (aperti, ecc...).

Su E è possibile definire, mediante x, le "funzioni coordinate"

$$x^1 : E \to \mathbb{R}, \ldots\ldots, \quad x^n : E \to \mathbb{R}$$

e le "curve coordinate"

$$x_1 : \mathbb{R} \times E \to E, \ \ldots\ldots, \ x_n : \mathbb{R} \times E \to E$$

in numero pari alla dimensione di E. Si osservi che, assegnare il sistema di coordinate x è equivalente ad assegnare la n-pla delle funzioni coordinate $(x^1,\ldots,x^n)$. In base a ciò si scrive anche

$$x \equiv (x^1,\ldots,x^n)$$

mettendo così in risalto l'equivalenza tra sistema di coordinate e fun zioni coordinate.

Inoltre, se x è differenziabile(e quindi anche le funzioni e le curve coordinate lo sono), allora esso induce, per ogni punto p dello spazio, una base

$$B \equiv \{ \delta x_1(p),\dots,\delta x_n(p)\}$$

per i vettori di $\bar{E}$ e una base

$$B^* \equiv \{Dx^1(p),\dots,Dx^n(p)\}$$

per i vettori di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

Allora, applicando le solite regole algebriche relative a tali basi,possiamo rivedere in termini matriciali, per comodità del lettore, tutte quelle nozioni che sinora sono state espresse con basi qualsiasi.

In particolare, possiamo dare la rappresentazione matriciale delle derivate rispetto alle basi B e B^*. Le matrici di rappresentazione dei tensori, così introdotte, acquistano talvolta un interessante significato legato al sistema di coordinate. Per esempio, le "derivate parziali" di una funzione risultano essere proprio gli elementi di matrice della sua derivata.

E' possibile estendere, in modo naturale, il sistema di coordinate $x \equiv (x^1, \dots, x^n)$ allo spazio affine TE, stabilendo una biiezione tra esso e $\mathbb{R}^{2n}$. Riusciamo in questo scopo, considerando l'applicazione tangente di x. In tal modo, ad ogni elemento $(p,\bar{u})$ di TE, si fa corrispondere le n coordinate $x(p) \equiv (x^1(p),\dots,x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ e le n componenti secondo la base B, indotta da x.

In modo naturale si estende x, anche, allo spazio affine T^*E, mediante l'applicazione cotangente di x.

Si osservi che su TE e T^*E vi sono anche sistemi di coordinate non provenienti da sistemi su E.

Dunque, possiamo esprimere in coordinate le equazioni differenziali del 1° ordine, essendo, queste, dei campi vettoriali su E.

Se x è differenziabile due volte, è interessante lo studio delle derivate degli elementi di B e B^*. Infatti, vedremo che tali derivate sono espresse mediante i "simboli di Christoffel " i quali risulteranno nulli se x è un sistema di coordinate cartesiano, in quanto tale sistema induce delle basi (costanti punto per punto).

I precedenti calcoli permetteranno di esprimere, mediante i sistemi di coordinate, tutte le nozioni date sinora in modo intrinseco.

Ora, se x è differenziabile due volte, è possibile estendere, in modo naturale, il sistema di coordinate x ai secondi spazi tangenti TTE e TT^*E, mediante le 2-applicazioni tangenti TTx e TT^*x, rispettivamente.

Ancora, in modo naturale, si estende x ai secondi spazi cotangenti T^*TE e T^*T^*E, mediante le 2-applicazioni cotangenti T^*Tx e T^*T^*x, rispettivamente.

Si osservi che anche sui secondi spazi tangenti e cotangenti di E vi sono sistemi di coordinate non provenienti da sistemi su E. Sono anche interessanti i sistemi di coordinate indotti da x, sugli spazi νTTE e oT^*TE.

Dunque, possiamo esprimere in coordinate le equazioni differenziali del 2° ordine, essendo, queste, dei campi vettoriali su TE.

Se E è uno spazio affine euclideo, allora possiamo applicare anche su $\underline{g}$ le solite regole algebriche con le basi B e B^*, indotte da x. Dunque, si possono vedere, in termini matriciali, tutte le nozioni del 4° capitolo, espresse mediante basi qualsiasi di $\bar{E}$ e $\bar{E}^*$.

Le matrici (g_{ij}) e (g^{hk}), che sono l'una inversa dell'altra, sono molto interessanti, in quanto servono per l'espressione e per il calcolo in coordinate dei campi $\underline{g}$ e $\bar{g}$, della funzione metrica g e della co-funzione metrica g^*, delle applicazioni $\underset{\sim}{g}$ e $\tilde{g}$, ecc.... .

Si osservi che la connessione affine Γ non dipende dalla metrica (è definita anche se E non è euclideo), ma solo dalla struttura affine, anche se la sua espressione in coordinate, può essere data in modo tale da far comparire le matrici (g_{ij}) e (g^{hk}). Ciò dipende dal fatto che i simboli di Christoffel possono essere anche espressi tramite la derivata delle componenti di un qualsiasi campo tensoriale costante del 2° ordine, simmetrico e non degenere.

1 SISTEMI DI COORDINATE SU UNO SPAZIO AFFINE

0 I "sistemi di coordinate" servono per interpretare uno spazio affine come uno spazio numerico. Essi svolgono, in esso, il ruolo svolto dalle basi in uno spazio vettoriale.

In generale, sono definiti su aperti dello spazio affine ed hanno come immagini aperti di uno spazio numerico. Però, per semplicità di notazioni, considereremo solo sistemi di coordinate definiti su tutto lo spazio e aventi come immagini lo spazio numerico. La facile estensione al caso più generale è lasciata al lettore.

Concludiamo il paragrafo con le importanti nozioni di funzioni e di curve coordinate su uno spazio affine.

Sia, dunque, E uno spazio affine di dimensione n.

5.1.1. DEFINIZIONE

Dicesi SISTEMA DI COORDINATE su E un omeomorfismo

$$x : E \to \mathbb{R}^n$$

ossia, un'applicazione biiettiva e continua, assieme all'inversa x^{-1}.

La biiettività garantisce la corrispondenza biunivoca tra punti e coordinate. Ossia, ad ogni punto p di E corrisponde un'unica n-pla $x(p)$ di numeri reali e viceversa.

Il fatto che tale applicazione debba essere un omeomorfismo, serve a garantire che la traduzione in coordinate "rispetti" tutte le proprietà topologiche dello spazio (aperti, ecc...).

Consideriamo, dunque, un sistema di coordinate $x : E \to \mathbb{R}^n$.

5.1.2. Diamo ora la nozione di "funzione coordinata" di x, sem plicemente componendo x con una funzione coordinata naturale su $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE

Dicesi FUNZIONE COORDINATA I-MA di x l'applicazione

$$x^i \equiv \pi^i \circ x : E \to \mathbb{R}$$

data da
$$x^i : p \mapsto (\pi^i \circ x)(p)$$

(dove $\pi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è la i-ma funzione coordinata naturale (o i-ma proiezione) del prodotto $\mathbb{R}^n$) .

Naturalmente, le funzioni coordinate di x sono n.

Se $p \in E$, gli n numeri $x^1(p),\ldots,x^n(p)$ si dicono le "coordinate"di p.

Assegnare un sistema di coordinate è equivalente ad assegnare la n-pla delle funzioni coordinate. In base a ciò, si scrive anche

$$x \equiv (x^1,\ldots,x^n)$$

mettendo, così, in risalto l'equivalenza tra sistema di coordinate e la n-pla delle funzioni coordinate. Dunque, il seguente diagramma è commutativo.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{R} \\
E \arrow[r, "x"] \arrow[urr, "x^1"] \arrow[drr, "x^n"'] & \mathbb{R}^n \arrow[ur, "\pi^1"] \arrow[dr, "\pi^n"'] & \vdots \\
 & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

Si osservi che le funzioni $x^1,\dots,x^n$ sono continue, perché sono continue l'applicazione x e le proiezioni $\pi^1,\dots,\pi^n$. Però la continuità di $x^1,\dots,x^n$ non garantisce la continuità di x.

5.1.3. Diamo ora la nozione di "curva coordinata" di E, semplicemente componendo x^{-1} con una curva coordinata naturale di $\mathbb{R}^n$. Tale nozione, in un certo senso, è"duale" alla precedente.

DEFINIZIONE Sia $p \in E$.

Dicesi CURVA COORDINATA J-MA, passante per p, di E l'applicazione

$$x_{jp} : \mathbb{R} \to E$$

data da
$$x_{jp} : \lambda \mapsto x^{-1}(x^1(p),\dots,x^j(p) + \lambda,\dots,x^n(p)) \; ,$$

ossia, data da

$$x_{jp} \equiv x^{-1} \circ c_{jp}$$

(dove $c_{jp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è la j-ma curva coordinata naturale di $\mathbb{R}^n$, passan te per $x(p) = c_{jp}$ (o), data da

$$c_{jp}(\lambda) \equiv (x^{1}(p),\ldots,x^{j}(p)+\lambda,\ldots,x^{n}(p)) \quad , \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Il termine "passante per p" è giustificato dal fatto che per $\lambda = o$, è

$$x_{jp}(o) = x^{-1}(x^{1}(p),\ldots,x^{j}(p),\ldots,x^{n}(p)) = p \ .$$

Dunque, la j-ma curva coordinata passante per p assegna, ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il punto di E ottenuto bloccando tutte le coordinate, tranne la j-ma ed incrementando questa, di λ, a partire da $x^{j}(p)$.

Naturalmente, le curve coordinate, passanti per p, sono n.

Si noti che le curve $x_{1p},\ldots,x_{np}$ sono continue, perché sono continue l'applicazione x^{-1} e le iniezioni $c_{1p},\ldots,c_{np}$.

5.1.4. Se $c : \mathbb{R} \to E$ è una curva, si ponga

$$c^{1} \equiv x^{1} \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ldots, \qquad c^{n} \equiv x^{n} \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ .$$

Allora, la curva c è determinata dalle sue n "componenti" $c^{1},\ldots,c^{n}$.

Dunque, il seguente diagramma è commutativo .

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \arrow[r, "c"] \arrow[urr, "c^{1}"] \arrow[drr, "c^{n}"'] & E \arrow[ur, "x^{1}"'] \arrow[dr, "x^{n}"] & \vdots \\ & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

5.1.5. Se poi $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione, allora f è determinata dalla funzione

$$f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

essendo

$$f = (f \circ x^{-1}) \circ x .$$

Dunque, il seguente diagramma è commutativo .

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^n \arrow[dr, "f \circ x^{-1}"] & \\
E \arrow[ur, "x"] \arrow[rr, "f"] & & \mathbb{R} \\
 & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "x^{-1}"] \arrow[ur, "f \circ x^{-1}"'] &
\end{tikzcd} .$$

Abbiamo anche

$$f \circ c = (f \circ x^{-1}) \circ (x \circ c) = (f \circ x^{-1}) \circ (c^1,\dots,c^n) .$$

5.1.6. Possiamo dare una definizione più generale di curva coordinata.

DEFINIZIONE

Dicesi CURVA COORDINATA J-MA di E l'applicazione

$$x_j : \mathbb{R} \times E \to E$$

data da
$$x_j : (\lambda, p) \mapsto x_{jp}(\lambda) \quad ,$$

ossia, data da

$$x_j \equiv x^{-1} \circ s_j \circ (id_{\mathbb{R}} \times x) : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \to E$$

(dove $s_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è l'applicazione data da

$$s_j(\lambda; \mu^1,\dots,\mu^n) \equiv (\mu^1,\dots,\mu^j+\lambda ,\dots,\mu^n) \quad , \forall\ (\lambda;\mu^1,\dots,\mu^n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)\ \underline{.}$$

5.1.7. PROPOSIZIONE Sia $p \in E$.

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, è

$$(x^i \circ x_{jp})(\lambda) = x^i(p) + \lambda\delta^i_j \ .$$

D. Infatti, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, è

$$(x^i \circ x_{jp})(\lambda) = x^i(x^{-1}(x^1(p),\dots, x^j(p) + \lambda,\dots,x^n(p)\ ) =$$

$$= \pi^i(x(x^{-1}(x^1(p),\dots, x^j(p) + \lambda,\dots,x^n(p))\ )\ ) =$$

$$= x^i(p) + \lambda\delta^i_j \quad \underline{.}$$

5.1.8. DEFINIZIONE

Un sistema di coordinate $x : E \to \mathbb{R}^n$ si dice differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) se x e x^{-1} sono differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$) $\underline{.}$

5.1.9. Dunque, la seguente proposizione fa vedere che le funzioni e le curve coordinate di E sono differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$) .

PROPOSIZIONE Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) .

Allora le funzioni coordinate e le curve coordinate di E sono differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$) .

D. Infatti le funzioni coordinate o le curve coordinate sono ottenute componendo x o x^{-1} con applicazioni di classe $\mathcal{C}^\infty$. Allora il risultato segue dalla regola della catena $\underline{.}$

2 BASI INDOTTE DA UN SISTEMA DI COORDINATE

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n e sia $x \equiv (x^1,\dots,x^n) : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E, differenziabile.

In questo paragrafo, facciamo vedere che, essendo x differenziabile (e quindi, per 5.1.7. lo sono anche le curve e le funzioni coordinate), esso induce, per ogni punto p di E, una base di $\bar{E}$ e una di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra. Più in generale, otteniamo una base per i campi di vettori e covettori su E.

Tali basi, generalmente, variano da punto a punto. Vedremo, nel capitolo successivo, che se x è un sistema di coordinate cartesiano, allora esse non dipendono dal punto di applicazione.

5.2.1. Le n funzioni coordinate

$$x^1 : E \to \mathbb{R}, \dots, x^n : E \to \mathbb{R}$$

sono differenziabili. Dunque, possiamo considerare le loro derivate

$$Dx^1 : E \to \bar{E}^*, \dots , Dx^n : E \to \bar{E}^*$$

e i loro differenziali

$$dx^1 : E \to T^*E , \dots , dx^n : E \to T^*E$$

dati da $dx^1 : p \to (p,Dx^1(p))$, ..., $dx^n : p \to (p,Dx^n(p))$.

Inoltre, le n curve coordinate

$$x_1 : \mathbb{R} \times E \to E \ , \ \dots \ , \ x_n : \mathbb{R} \times E \to E$$

sono differenziabili. Possiamo, dunque, considerare le loro derivate

$$\delta x_1 : E \to \bar{E} \ , \ \dots. \ , \ \delta x_n : E \to \bar{E}$$

date da $\delta x_1 : p \to Dx_{1p}(o), \dots, \delta x_n : p \to Dx_{np}(o)$

e i loro differenziali

$$\partial x_1 : E \to TE \ , \ \dots \ , \ \partial x_n : E \to TE$$

dati da $\partial x_1 : p \to (p, \delta x_1(p)), \dots, \partial x_n : p \to (p, \delta x_n(p))$.

Abbiamo, così, n campi di vettori ed n campi di covettori liberi ed applicati su E.

5.2.2. Dimostriamo ora che, per ogni punto $p \in E$, gli n vettori $\delta x_1(p), \dots, \delta x_n(p)$ e gli n covettori $Dx^1(p), \dots, Dx^n(p)$ costituiscono, rispettivamente, una base di $\bar{E}$ e una di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

PROPOSIZIONE Sia $p \in E$.

Allora

$$B(p) \equiv \{\delta x_1(p), \dots, \delta x_n(p)\} \quad e \quad B^*(p) \equiv \{Dx^1(p), \dots, Dx^n(p)\}$$

sono basi di $\bar{E}$ e di $\bar{E}^*$, rispettivamente. Inoltre, l'una è la base duale dell'altra, ossia

$$\langle Dx^i(p) \ , \ \delta x_j(p) \rangle = \delta^i_j \qquad , \ \forall \ 1 \leq i,j \leq n \ .$$

D. Per la regola della catena, l'applicazione

$$x^i \circ x_{jp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

data da $$x^i \circ x_{jp} : \lambda \to x^i(p) + \lambda\delta^i_j$$

è differenziabile ed è

$$< Dx^i(p) \; , \; \delta x_j(p) > \equiv < Dx^i(x_{jp}(o)) \; , \; Dx_{jp}(o) >= \delta^i_j \; .$$

Dimostriamo ora che gli n vettori $\delta x_1(p), \ldots, \delta x_n(p)$ di $\bar{E}$ e gli n covettori $Dx^1(p),\ldots,Dx^n(p)$ di $\bar{E}^*$ sono linearmente indipendenti.

Sia

$$\alpha^1(p)\;\delta x_1(p) + \ldots + \alpha^n(p)\delta x_n(p) = \bar{o} \qquad \text{con } \alpha^1(p),\ldots, \alpha^n(p) \in \mathbb{R} \; .$$

Allora, è

$$\alpha^i(p) =< Dx^i(p), \bar{o} > = o \qquad , \qquad \forall\; 1 \leq i \leq n \; .$$

Sia

$$\beta_1(p)Dx^1(p) + \ldots + \beta_n(p)Dx^n(p) = \underline{o} \quad , \text{ con } \beta_1(p),\ldots, \beta_n(p) \in \mathbb{R}.$$

Allora è

$$\beta_j(p) =< \underline{o} \; , \; \delta x_j(p) > = o \qquad , \qquad \forall\; 1 \leq j \leq n \; .$$

Dunque, $B(p)$ e $B^*(p)$ essendo costituiti da un numero di elementi indipendenti, pari alla dimensione di E, costituiscono una base di $\bar{E}$

e una base di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

Naturalmente, gli insiemi

$$B(p) \equiv \{\partial x_1(p),\dots,\partial x_n(p)\} \quad e \quad B^*(p) \equiv \{ dx^1(p),\dots, dx^n(p)\}$$

costituiscono una base per i vettori applicati di TE e una per i covettori applicati di T^*E, l'una duale dell'altra.

3 ESPRESSIONE IN COORDINATE DEI CAMPI TENSORIALI

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n e sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E, differenziabile.

Abbiamo visto che se x è differenziabile, esso induce, per ogni punto di E, una base per i vettori di $\bar{E}$ e una per i covettori di $\bar{E}^*$ l'una duale dell'altra.

Allora, è possibile esprimere, in coordinate, gli elementi di $\bar{E}$ e $\bar{E}^*$ mediante tali basi. In particolare, possiamo dare la rappresentazione matriciale delle derivate rispetto a queste basi. Le matrici di rappresentazione dei tensori, così introdotte, acquistano talvolta un interessante significato legato al sistema di coordinate. Per esempio, le "derivate parziali" di una funzione risultano essere proprio gli elementi di matrice della sua derivata.

Sia, dunque, $B(p) \equiv \{\delta x_1(p),\ldots,\delta x_n(p)\}$ una base di $\bar{E}$ e $B^*(p) \equiv \{Dx^1(p),\ldots,Dx^n(p)\}$ una base di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra. Indicheremo i campi liberi ed applicati con gli stessi simboli.

5.3.1. PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} : E \to \bar{E}$ un campo vettoriale libero su E e $\underline{X} : E \to \bar{E}^*$ un campo covettoriale libero su E.

Allora, per ogni $p \in E$, è

$$\bar{X}(p) = X^i(p)\,\delta x_i(p) \quad , \qquad \text{con } X^1(p),\ldots,X^n(p) \in \mathbb{R},$$

$$\underline{X}(p) = X_i(p) Dx^i(p) \quad , \qquad \text{con } X_1(p),\ldots,X_n(p) \in \mathbb{R},$$

dove

$$X^i(p) \equiv \langle Dx^i(p) \;,\; \bar{X}(p) \rangle$$

$$X_i(p) \equiv \langle \underline{X}(p), \; \delta x_i(p) \rangle \quad .$$

Scriviamo anche

$$\bar{X} = X^i \; \delta x_i \;,$$

$$\underline{X} = X_i \; Dx^i \;.$$

Considerati i campi applicati $\bar{X} : E \to TE$ e $\underline{X} : E \to T^*E$ su E, abbiamo anche le seguenti espressioni

$$\bar{X} = X^i \partial x_i$$

$$\underline{X} = X_i dx^i \quad ,$$

dove

$$X^i \equiv \langle \; dx^i \;,\; \bar{X} \rangle \equiv \langle Dx^i \;,\; \bar{X} \rangle \;,$$

$$X_i \equiv \langle \; \underline{X} \;,\; \partial x_i \; \rangle \equiv \langle \underline{X} \;,\; \delta x_i \; \rangle \quad \underline{.}$$

5.3.2. Dunque, l'espressione in coordinate di un'equazione differenziale del 1° ordine $\bar{X} : E \to TE$ su E, è

$$\bar{X} = X^i \partial x_i \quad .$$

Facciamo, ora, uno studio in coordinate delle applicazioni differenziabili più interessanti.

1) CASO $f : \mathbb{R} \to E$.

5.3.3. PROPOSIZIONE Sia f una curva differenziabile . Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) = p \in E$.

Allora, è

$$Df(\lambda) = Df^i(\lambda)\ \delta x_i(p)$$

ossia

$$Df = Df^i(\delta x_i \circ f)$$

D. Assegnare f equivale ad assegnare le n funzioni reali differenziabili (5.1.4.)

$$f^i \equiv x^i \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \ \forall\ 1 \leq i \leq n\ .$$

Allora, posto

$$Df(\lambda) = \alpha^i(\lambda)\delta x_i(p) \qquad , \qquad \text{con } \alpha^1(\lambda), \dots, \alpha^n(\lambda) \in \mathbb{R},$$

per la regola della catena, è

$$\alpha^i(\lambda) \equiv \langle Dx^i(p), Df(\lambda)\rangle = D(x^i \circ f)\ (\lambda) \equiv Df^i(\lambda)\ .$$

Abbiamo anche

$$df = Df^i(\partial x_i \circ f)$$

con

$$Df^i \equiv \langle dx^i, df\rangle \equiv \langle Dx^i, Df\rangle \quad .$$

5.3.4. Dunque, possiamo caratterizzare una curva integrale di una equazione differenziale del 1° ordine .

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} = X^i \partial x_i$ un'equazione differenziale del 1° ordine su E. Sia $c : \mathbb{R} \to E$ una curva differenziabile.

Allora c è una curva integrale di $\bar{X}$ se e solo se è

$$X^i \circ c = Dc^i \quad , \quad \forall\ 1 \leq i \leq n \quad \dot{-}$$

2) CASO $f : E \to \mathbb{R}$.

5.3.6. PROPOSIZIONE Sia f una funzione differenziabile.

Allora, per ogni $p \in E$, è

$$Df(p) = (\partial x_i .\ f)\ Dx^i(p) \quad ,$$

ossia

$$Df = (\partial x_i .\ f)\ Dx^i \ .$$

D. Infatti, posto

$$Df(p) = \beta_i(p) Dx^i(p) \quad , \text{ con } \beta_1(p), \ldots, \beta_n(p) \in \mathbb{R},$$

per la regola della catena, è

$$\beta_i(p) \equiv \langle Df(p), \delta x_i(p) \rangle = D(f \circ x_{ip})(o) \equiv (\partial x_i . f)(p) \quad \dot{-}$$

Abbiamo anche

$$df = (\partial x_i .\ f)\ dx^i$$

dove

$$(\partial x_i .\ f) \equiv \langle df, \partial x_i \rangle \equiv \langle Df, \delta x_i \rangle$$

5.3.5. Diamo, allora, la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Dicesi DERIVATA PARZIALE di f, rispetto alla i-ma curva coordinata di E, l'applicazione

$$(\partial x_i . f) : E \to \mathbb{R}$$

data da

$$(\partial x_i . f) : p \to D(f \circ x_{ip})(o) \qquad \dot{-}$$

Ossia, $(\partial x_i . f)$ è la derivata della funzione reale di una variabile reale ottenuta facendo variare in f solo la i-ma coordinata.

5.3.7. Possiamo ora caratterizzare un integrale primo di una equazione differenziale del 1° ordine.

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} = X^i \partial x_i$ un'equazione differenziale del 1° ordine su E. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) f è un integrale primo di $\bar{X}$.

b) E'

$$(\partial x_i . f)\, X^i = o \qquad , \forall\ 1 \leq i \leq n$$

D. a) $\Longleftrightarrow$ b).

E' $\langle df, \bar{X} \rangle = o$ $\quad f$ è un integrale 1° di $\bar{X}$;

inoltre:

$\langle df, \bar{X} \rangle = \langle (\partial x_i . f) dx^i \quad , X^j \partial x_j \rangle = (\partial x_i . f)\, X^i$.

5.3.8. Dalla regola della catena segue un interessante risultato.

PROPOSIZIONE Siano $c : \mathbb{R} \to E$ ed $f : E \to \mathbb{R}$ due applicazioni differenziabili.

Allora è

$$D(f \circ c) = (\partial x_i . f) \circ c Dc^i .$$

D. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $c(\lambda) \equiv p \in E$. E'

$$D(f \circ c)(\lambda) = Df(p) \circ Dc(\lambda) = (\partial x_i . f)(p) Dc^j(\lambda) \langle Dx^i(p) \quad , \quad \delta x_j(p) \rangle =$$

$$= (\partial x_i . f)(p) Dc^i(\lambda) \qquad \dot{=}$$

3) CASO $f : \mathbb{R} \times E \to E$.

5.3.9. PROPOSIZIONE Sia f un'applicazione differenziabile, tale che $f_o = id_E$.

Allora è

$$\delta f = (\delta f^i) \delta x_i ,$$

$$\partial f = (\delta f^i) \partial x_i ,$$

dove

$$\delta f^i \equiv \langle Dx^i, \delta f\rangle = \langle dx^i, \partial f \rangle \quad .$$

5.3.10. I casi precedenti rientrano come studio, più generale, di una applicazione differenziabile tra due spazi affini di dimensioni finite.

Siano dunque

- E, F due spazi affini di dimensioni n, m, rispettivamente;
- $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile;
- $y \equiv (y^1, \dots, y^m) : F \to \mathbb{R}^m$ un sistema di coordinate su F, differenziabile;
- $p \in E$, $f(p) = q \in F$;
- $B(q) \equiv \{\delta y_1(q), \dots, \delta y_m(q)\}$, $B^*(q) \equiv \{Dy^1(q), \dots, Dy^m(q)\}$ due basi, rispettivamente, di $\bar{F}$ e $\bar{F}^*$, l'una duale dell'altra.

Allora sussiste la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE

Gli insiemi

$$B^*(p) \otimes B(q) \equiv \{Dx^1(p) \otimes \delta y_1(q), \dots, Dx^j(p) \otimes \delta y_i(q), \dots, Dx^n(p) \otimes \delta y_m(q)\}$$

$$B(p) \otimes B^*(q) \equiv \{\delta x_1(p) \otimes Dy^1(q) \;, \dots \dots, \delta x_j(p) \otimes Dy^i(q), \dots, \delta x_n(p) \otimes Dy^m(q)\}$$

costituiscono una base di $\bar{E}^* \otimes \bar{F}$ e di $\bar{E} \otimes \bar{F}^*$, l'una duale dell'altra.

Allora è

$$Df(p) = (\partial x_j . \; f^i)(p)\; Dx^j(p) \otimes \delta y_i(q)$$

dove si è posto

- $f^i \equiv y^i \circ f : E \to R$,

- $(\partial x_j . \; f^i)(p) = \langle Dy^i(q) \; , \; Df(p)\; (\delta x_j(p))\rangle$.

Sinteticamente, scriviamo anche

$$Df = (\partial x_j . \; f^i)\; Dx^j \otimes (\delta y_j \circ f) \qquad \dot{-}$$

4 SISTEMI DI COORDINATE INDOTTI SUGLI SPAZI TANGENTI E COTANGENTI

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n. Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E che, per semplicità, supporremo di classe $\mathscr{C}^\infty$.

E' possibile estendere, in modo naturale, tale sistema di coordinate allo spazio affine TE, stabilendo una biiezione tra esso e $\mathbb{R}^{2n}$. Riusciamo nel nostro scopo considerando l'applicazione tangente di x. In tal modo, ad ogni elemento $(p,\bar{u})$ di TE, si fa corrispondere le n coordinate $x(p) \equiv (x^1(p),\dots,x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ e le n componenti secondo la base $B(p) \equiv \{\delta x_1(p),\dots,\delta x_n(p)\}$ di $\bar{E}$, indotta da x.

Allo stesso modo, tramite l'applicazione cotangente di x, si dà su T^*E un sistema di coordinate indotto da x.

Si osservi che su TE e T^*E vi sono anche sistemi di coordinate non provenienti da sistemi su E.

5.4.1. PROPOSIZIONE

L'applicazione tangente di x

$$Tx : TE \to \mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

data da

$$Tx : (p,\bar{u}) \mapsto (x(p), \langle Dx(p),\bar{u}\rangle)$$

è un sistema di coordinate su TE di classe $\mathscr{C}^\infty$.

D. L'applicazione Tx è una biiezione, la cui inversa è $T(x^{-1})$. Inoltre, Tx e $T(x^{-1})$ sono di classe $\mathscr{C}^\infty$ $\underline{\cdot}$

Si noti che la prima n-pla caratterizza univocamente il punto $p \in E$ di applicazione, tramite x, mentre la seconda caratterizza univocamente il vettore $\bar{u} \in \bar{E}$.

Studiamo le funzioni coordinate di Tx.

5.4.2. Ricordiamo che, dato il fibrato tangente $\tau E \equiv (TE, p_E, E)$ di E, il rilevamento $(\check{x} : TE \to \mathbb{R}^n)$ di x secondo p_E è dato da

$$\check{x}(p,\bar{u}) \equiv x(p) \qquad , \text{ per ogni } (p,\bar{u}) \in TE.$$

Inoltre l'applicazione $\dot{x} : TE \to \mathbb{R}^n$ è data da

$$\dot{x}(p,\bar{u}) \equiv \langle Dx(p),\bar{u} \rangle \qquad , \text{ per ogni } (p,\bar{u}) \in TE .$$

5.4.3. Dunque, abbiamo la seguente proposizione .

PROPOSIZIONE

E'

$$Tx = (\check{x} , \dot{x}) .$$

Più precisamente è

$$Tx \equiv ((Tx)^1, \ldots,(Tx)^n; (Tx)^{\bar{1}},\ldots,(Tx)^{\bar{n}}) = (\check{x}^1,\ldots,\check{x}^n; \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) ,$$

mettendo così in risalto l'equivalenza tra il sistema di coordinate su TE e la 2n-pla $(\check{x}^1,\ldots,\check{x}^n; \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$.

Allora le funzioni coordinate su TE sono le 2n applicazioni differenziabili

$$(Tx)^i \equiv \pi^i \circ p^1 \circ Tx : TE \to \mathbb{R}$$

$$(Tx)^{\bar{i}} \equiv (Tx)^{n+i} \equiv \pi^i \circ p^2 \circ Tx : TE \to \mathbb{R} \quad ,$$

$\forall\ 1 \leq i \leq n$,

date da $\quad (Tx)^i(p,\bar{u}) = x^i(p)$

$\quad (Tx)^{\bar{i}}(p,\bar{u}) = \langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle$,

per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$

(dove $p^1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $p^2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono le proiezioni date da

$$p^1(\lambda\ ,\mu\ ) \equiv \lambda \quad , \quad p^2(\lambda,\mu) \equiv \mu \quad , \forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ ) .$$

D. Infatti, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$(Tx)^i(p,\bar{u}) \equiv (\pi^i \circ p^1 \circ Tx)(p,\bar{u}) = (\pi^i \circ x)(p) \equiv x^i(p)$$

$$(Tx)^{\bar{i}}(p,\bar{u}) \equiv (\pi^i \circ p^2 \circ Tx)(p,\bar{u}) = \pi^i(Dx(p)(\bar{u})) = D(\pi^i \circ x)(p)(\bar{u}) \equiv$$

$$\equiv \langle Dx^i(p),\bar{u}\ \rangle \quad \underline{.}$$

5.4.4. Studiamo ora le curve coordinate di TE.

PROPOSIZIONE

Le curve coordinate su TE sono le 2n applicazioni differenziabili

$$(Tx)_i \simeq \check{x}_i : \mathbb{R} \times TE \to TE$$

$$(Tx)_{\bar{i}} \simeq \dot{x}_i : \mathbb{R} \times TE \to TE$$

date da

$$(Tx)_i(\lambda;p,\bar{u}) = (Tx)^{-1}(x^1(p),\ldots,x^i(p)+\lambda,\ldots,x^n(p);<Dx^1(p),\bar{u}>\ldots,<Dx^n(p),\bar{u}>)$$

$$(Tx)_{\bar{i}}(\lambda;p,\bar{u})=(Tx)^{-1}(x^1(p),\ldots,x^n(p);<Dx^1(p),\bar{u}>,\ldots,<Dx^i(p),\bar{u}>+\lambda,\ldots<Dx^n(p),\bar{u}>)$$

Si noti che il simbolo corretto è $(Tx)_i$ e $(Tx)_{n+i}$. La notazione $\check{x}_i$ e $\dot{x}_i$ è un abuso di linguaggio; però in seguito per semplicità di notazione, faremo uso solo dei simboli $\check{x}_i$ e $\dot{x}_i$.

Fissato $(p,\bar{u}) \in TE$, si hanno le $2n$ curve coordinate passanti per $(p,\bar{u})$

$$\check{x}_{i(p,\bar{u})} : \mathbb{R} \to TE$$

$$\dot{x}_{i(p,\bar{u})} : \mathbb{R} \to TE,$$

date da

$$\check{x}_{i(p,\bar{u})}(\lambda) \equiv x_i(\lambda;p,\bar{u}) \quad ,$$

$$\dot{x}_{i(p,\bar{u})}(\lambda) \equiv \dot{x}_i(\lambda;p,\bar{u}) \quad ,$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Sostanzialmente la i-ma curva coordinata $\check{x}_{i(p,\bar{u})}$, passante per $(p,\bar{u}) \in TE$, assegna, ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il punto $(q,\bar{u}) \in TE$ ottenuto bloccando tutte le coordinate, esclusa la i-ma ed incrementando questa di λ a partire da $\check{x}^i(p,\bar{u})$.

Invece la n+i-ma curva coordinata $\dot{x}_{i(p,\bar{u})}$, passante per $(p,\bar{u})$ assegna, ad ogni λ, il punto $(p,\bar{v}) \in TE$ ottenuto bloccando tutte le coordinate, esclusa la n+i-ma ed incrementando questa di λ a partire da $\dot{x}^i(p,\bar{u})$.

5.4.5. Poiché le 2n funzioni coordinate $\check{x}^1,\ldots,\check{x}^n; \dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n$ di Tx e le 2n curve coordinate $\check{x}_1,\ldots,\check{x}_n; \dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n$ su TE sono differenziabili, possiamo definire una base per i campi di covettori su TE e una base per i campi di vettori su TE, l'una duale dell'altra, indotte da Tx.

Dunque, per la regola della catena, le 2n funzioni coordinate di Tx

$$\check{x}^i : TE \to \mathbb{R} \qquad , \qquad \dot{x}^i : TE \to \mathbb{R}$$

date da

$$\check{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto x^i(p) \qquad , \qquad \dot{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto \langle Dx^i(p),\bar{u} \rangle$$

sono differenziabili. Possiamo, quindi, considerare i loro differenziali

$$d\check{x}^i : TE \to T^*TE \qquad , \qquad d\dot{x}^i : TE \to T^*TE$$

dati da

$$d\check{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};D\check{x}^i(p,\bar{u}) \quad , \quad d\dot{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};D\dot{x}^i(p,\bar{u})) \quad .$$

L'espressione esplicita di $D\check{x}^i(p,\bar{u})$ e di $D\dot{x}^i(p,\bar{u})$ verrà data in seguito (5.5.3.) , (5.5.4) .

Per la regola della catena, la 2n curve coordinate su TE

$$\check{x}_i : \mathbb{R} \times TE \to TE \quad , \quad \dot{x}_i : \mathbb{R} \times TE \to TE$$

sono differenziabili. Dunque, possiamo considerare i loro differenziali

$$\partial\check{x}_i : TE \to TTE \quad , \quad \partial\dot{x}_i : TE \to TTE$$

dati da

$$\partial\check{x}_i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\delta\check{x}_i(p,\bar{u})) \quad , \quad \partial\dot{x}_i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\delta\dot{x}_i(p,\bar{u})) \quad .$$

L'espressione esplicita di $\delta\check{x}_i(p,\bar{u})$ e di $\delta\dot{x}_i(p,\bar{u})$ verrà data in seguito (5.5.6.), (5.5.7.) .

Dunque, abbiamo 2n campi di covettori su TE

$$\{d\check{x}^1,\dots,d\check{x}^n;\ d\dot{x}^1,\dots,d\dot{x}^n\}$$

e due campi di vettori su TE

$$\{\partial\check{x}_1,\dots,\partial\check{x}_n;\ \partial\dot{x}_1,\dots,\partial\dot{x}_n\} \quad .$$

Essi costituiscono (5.2.2.) una base per i campi di covettori e di vettori su TE , l'una duale dell'altra.

5.4.6. PROPOSIZIONE Sia $f : \mathbb{R} \to E$ una curva differenziabile.

Allora è

$$\dot{x}^i \circ df = \langle dx^i , df \rangle \equiv Df^i \quad .$$

D. Infatti, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, è

$$(\dot{x}^i \circ df)(\lambda) = \dot{x}^i (f(\lambda), Df(\lambda)) \equiv \langle Dx^i (f(\lambda)), Df(\lambda) \rangle = \langle Dx^i , Df \rangle (\lambda) =$$
$$= \langle dx^i , df \rangle (\lambda) \quad \dot{-}$$

5.4.7. PROPOSIZIONE Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Allora è

$$\dot{f} = (\partial \check{x}_i . f)\dot{x}^i \quad .$$

D. Infatti, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$f(p,\bar{u}) \equiv \langle Df(p), \bar{u} \rangle = (\partial x_i . f)(p) \langle Dx^i (p), \bar{u} \rangle = [(\partial \check{x}_i . f)\dot{x}^i] (p,\bar{u}) \quad \dot{-}$$

5.4.8. PROPOSIZIONE Sia $f : \mathbb{R} \times E \to E$ un'applicazione differenziabi_ le tale che $f_o = id_E$.

Allora è

$$\dot{x}^i \circ \partial f = \langle dx^i , \partial f \rangle \equiv D_1 (x^i \circ f)_o \quad .$$

D. Infatti, per ogni $p \in E$, è

$$(\dot{x}^i \circ \partial f)(p) = \dot{x}^i(p, \delta f(p) \equiv \langle Dx^i(p), \delta f(p)\rangle = \langle Dx^i, \delta f\rangle(p) =$$

$$= \langle dx^i, \partial f\rangle \ (p) \qquad \dot{-}$$

5.4.9. PROPOSIZIONE Sia F uno spazio affine di dimensione m. Sia $y \equiv (y^1,\dots,y^m) : F \to \mathbb{R}^m$ un sistema di coordinate su F di classe C^∞. Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile.

Allora è

$$\check{y}^i \circ Tf = \check{f}^i$$

$$\dot{y}^i \circ Tf = (\partial x_j . f^i)\ \dot{x}^j \ .$$

D. Infatti, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$(\check{y}^i \circ Tf)(p,\bar{u}) = \check{y}^i(f(p),Df(p)(\bar{u})) \equiv y^i(f(p)) = f^i(p) = \check{f}^i(p,\bar{u}) \quad .$$

$$(\dot{y}^i \circ Tf)(p,\bar{u}) = \dot{y}^i(f(p),Df(p)(\bar{u})) \equiv \dot{y}^i(q,Df(p)(\bar{u})) = \langle Dy^i(q), Df(p)(\bar{u})\rangle =$$

$$= (\partial x_j . f^i)(p)\langle Dy^i(q),(Dx^j(p) \otimes \delta y_i(q))(\bar{u})\rangle =$$

$$= (\partial x_j . f^i)(p) \langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle = [(\partial \check{x}_j . f^i)\dot{x}^j](p,\bar{u}) \qquad \dot{-}$$

5.4.10. Estendiamo, in modo naturale, il sistema di coordinate x allo spazio T^*E, stabilendo così una biiezione tra esso e $\mathbb{R}^{2n}$.

PROPOSIZIONE

L'applicazione cotangente di x

$$T^*x : T^*E \to \mathbb{R}^{2n}$$

data da

$$T^*x : (p,\underline{u}) \mapsto (x(p),\ \underline{u} \circ Dx^{-1}(x(p)))$$

è un sistema di coordinate su T^*E di classe $\mathcal{C}^\infty$.

D. L'applicazione T^*x è una biiezione, la cui inversa è $T^*(x^{-1})$. Inoltre, T^*x e $T^*(x^{-1})$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Si noti che la prima n-pla caratterizza univocamente il punto $p \in E$ di applicazione, tramite x, mentre la seconda caratterizza univocamente il covettore $\underline{u} \in \bar{E}^*$.

Studiamo le funzioni coordinate di T^*x .

5.4.11. Ricordiamo che, dato il fibrato cotangente $\tau^*E \equiv (T^*E, q_E, \bar{E})$ di E, il rilevamento $(\hat{x} : T^*E \to \mathbb{R}^n)$ di x secondo q_E è dato da

$$\hat{x}(p,\underline{u}) \equiv x(p) \qquad , \text{ per ogni } (p,\underline{u}) \in T^*E .$$

Inoltre, abbiamo le n applicazioni $\dot{x}_i : T^*E \to \mathbb{R}$ date da

$$\dot{x}_i(p,\underline{u}) \equiv \langle \underline{u} \ ,\ \delta x_i(p) \rangle \ , \text{ per ogni } (p,\underline{u}) \in T^*E .$$

5.4.12. PROPOSIZIONE

Le funzioni coordinate su T^*E sono le 2n applicazioni differenziabili

$$(T^*x)^i \equiv \pi^i \circ p^1 \circ T^*x : T^*E \to \mathbb{R} \quad ,$$

$$(T^*x)_{\bar{i}} \equiv (T^*x)_{n+i} \overset{1)}{\equiv} < \bar{e}_i , p^2 \circ T^*x > : T^*E \to \mathbb{R} ,$$

$\forall\ 1 \leq i \leq n$,

date da

$$(T^*x)^i(p,\underline{u}) = x^i(p) \quad ,$$

$$(T^*x)_{\bar{i}}(p,\underline{u}) = < \underline{u}, \delta x_i(p) >$$

per ogni $(p,\underline{u}) \in T^*E$.

Dunque, è

$$T^*x \equiv ((T^*x)^1, \ldots, (T^*x)^n; (T^*x)_{\bar{1}}, \ldots, (T^*x)_{\bar{n}}) = (\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n; \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$$

mettendo così in risalto l'equivalenza tra il sistema di coordinate su T^*E e la 2n-pla $(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n; \dot{x}_1, \ldots \dot{x}_n)$ di coordinate.

D. Infatti, per ogni $(p,\underline{u}) \in T^*E$, è

$$(T^*x)^i(p,\underline{u}) \equiv (\pi^i \circ p^1 \circ T^*x)(p,\underline{u}) = (\pi^i \circ x)(p) \equiv x^i(p) ,$$

$$(T^*x)_{\bar{i}}(p,\underline{u}) \equiv \ <\bar{e}_i , p^2 \circ T^*x> (p,\underline{u}) = <\bar{e}_i , \underline{u} \circ Dx^{-1}(x(p)) \ > \equiv$$

1) Considerata la i-ma curva coordinata naturale di $\mathbb{R}^n$, passante per $x(p) \equiv c_{ip}(o)$

$$c_{ip} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

data da
$$c_{ip} : \lambda \mapsto (x^1(p), \ldots, x^i(p)+\lambda, \ldots, x^n(p)) ,$$

abbiamo $Dc_{ip}(o) = \bar{e}_i$, dove $\bar{e}_i$ è lo i-mo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

$$\equiv \underline{u} \circ Dx^{-1}(x(p))(\bar{e}_i) = \underline{u} \circ D(x^{-1} \circ c_{ip})(o) = \underline{u} \circ \delta x_i(p)) \equiv$$

$$\equiv < \underline{u} \ , \ \delta x_i(p) > \ \underline{.}$$

5.4.13. Diamo ora le 2n curve coordinate su T^*E .

PROPOSIZIONE

Le curve coordinate su T^*E sono le 2n applicazioni differenziabili

$$(T^*x)_i \simeq \hat{x}_i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E$$
$$(T^*x)^{\bar{i}} \simeq \dot{x}_i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E$$

date da

$$(T^*x)_i(\lambda;\ p,\underline{u}) = (T^*x)^{-1}(x^1(p),..,x^i(p)+\lambda,..,x^n(p);<\underline{u},\delta x_1(p)>,..,<\underline{u},\delta x_n(p)$$

$$(T^*x)^{\bar{i}}(\lambda;p,\underline{u})=(T^*x)^{-1}(x^1(p),..,x^n(p);<\underline{u},\delta x_1(p)>,..,<\underline{u},\delta x_i(p)>+\lambda,..,<\underline{u},\delta x_n(p)$$

Si noti che il simbolo corretto è $(T^*x)_i$ e $(T^*x)^{n+i}$. La notazione $\dot{x}_i$ e $\dot{x}^i$ è un abuso di linguaggio; però,in seguito, per semplicità di notazione, faremo uso solo dei seimboli $\hat{x}_i$, $\dot{x}^i$.

Fissato (p,u) ϵ T^*E, si hanno le 2n curve coordinate passanti per (p,u)

$$\dot{x}_{i(p,\underline{u})} : \mathbb{R} \to T^*E$$

$$x_{i(p,\underline{u})} : \mathbb{R} \to T^*E$$

date da

$$\hat{x}_{i(p,\underline{u})}(\lambda) \equiv \hat{x}_i(\lambda;p,\underline{u}) \;,$$

$$\dot{x}_{i(p,\underline{u})}(\lambda) \equiv \dot{x}_i(\lambda;p,\underline{u}) \;,$$

$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Sostanzialmente la i-ma curva coordinata $\hat{x}_{i(p,\underline{u})}$, passante per $(p,\underline{u}) \in T^*E$, assegna, ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il punto $(q,\underline{u}) \in T^*E$ ottenuto bloccando tutte le coordinate, esclusa la i-ma ed incrementando questa di λ a partire da $\hat{x}^i(p,\underline{u})$.

Invece, la n+i-ma curva coordinata $\dot{x}_{i(p,\underline{u})}$, passante per $(p,\underline{u}) \in T^*E$, assegna ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il punto $(p,\underline{v}) \in T^*E$ ottenuto bloccando tutte le coordinate, esclusa la n+i-ma ed incrementando questa di λ a partire da $\dot{x}_i(p,\underline{u})$.

5.4.14. Poiché le 2n funzioni coordinate $\hat{x}^1,\ldots\hat{x}^n;\ \dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n$ di T^*x e le 2n curve coordinate $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n;\dot{x}_1,\ldots\dot{x}_n$ su T^*E sono differenziabili, possiamo definire una base per i campi di covettori su T^*E e una per i campi di vettori su T^*E, l'una duale dell'altra.

Dunque, per la regola della catena, le 2n funzioni coordinate di T^*x

$$\hat{x}^i : T^*E \to \mathbb{R} \qquad , \qquad \dot{x}_i : T^*E \to \mathbb{R}$$

date da $\hat{x}^i : (p,\underline{u}) \mapsto x^i(p) \qquad , \qquad \dot{x}_i = (p,\underline{u}) \mapsto < \underline{u},\ \delta x_i(p) >$

sono differenziabili. Possiamo, quindi, considerare i loro differenziali

$$d\hat{x}^i : T^*E \to T^*T^*E \qquad , \qquad d\dot{x}_i : T^*E \to T^*T^*E$$

dati da

$$d\hat{x}^i : (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};D\hat{x}^i(p,\underline{u})) \;, \qquad d\dot{x}_i : (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\; D\dot{x}_i(p,\underline{u}))\,.$$

L'espressione esplicita di $D\hat{x}^i(p,\underline{u})$ e $D\dot{x}_i(p,\underline{u})$ verrà data in seguito (5.5.9), (5.5.10.).

Per la regola della catena, le 2n curve coordinate su T^*E

$$\hat{x}_i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E \quad , \quad \dot{x}_i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E$$

sono differenziabili. Dunque, possiamo considerare i loro differenziali

$$\partial\hat{x}_i : T^*E \to TT^*E \qquad , \quad \partial\dot{x}_i : T^*E \to TT^*E$$

dati da $\partial\hat{x}_i : (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\delta\hat{x}_i(p,\underline{u}))$, $\partial\dot{x}_i : (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\delta\dot{x}_i(p,\underline{u}))$.

L'espressione esplicita di $\delta\hat{x}_i(p,\underline{u})$ e $\delta\dot{x}_i(p,\underline{u})$ verrà data in seguito (5.5.12) , (5.5.13).

Dunque, abbiamo 2n campi di covettori su T^*E

$$\{d\hat{x}^1,\dots,d\hat{x}^n;\; d\dot{x}_1,\dots d\dot{x}_n\}$$

e 2n campi di vettori su T^*E

$$\{\partial\hat{x}_1,\dots,\partial\hat{x}_n \;;\; \partial\dot{x}_1,\dots,\; \partial\dot{x}_n\} \quad .$$

Essi costituiscono (5.2.2.) una base per i campi di covettori e vettoti su T^*E, l'una duale dell'altra.

5.4.15. PROPOSIZIONE Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Allora è

$$\dot{x}_i \circ df = \langle df, \partial x_i \rangle \equiv D_1(f \circ x_i)_0 \equiv \partial x_i . f \quad .$$

D. Infatti, per ogni $p \in E$, è

$$(\dot{x}_i \circ df)(p) = \dot{x}_i(p, Df(p)) \equiv \langle Df(p), \delta x_i(p) \rangle = \langle df, \partial x_i \rangle (p) \quad \dot{-}$$

5.4.16. PROPOSIZIONE Sia $f : \mathbb{R} \times E \to E$ un'applicazione differenziabile.

Allora è

$$\dot{f} = (\delta \hat{f}^i)\, \dot{x}_i$$

D. Infatti, per ogni $(p,\underline{u}) \in T^*E$, è

$$\dot{f}\,(p,\underline{u}) \equiv \langle \underline{u}, \delta f(p) \rangle = \delta f^i(p) \langle \underline{u}, \delta x_i(p) \rangle = \left[(\delta \hat{f}^i) \dot{x}_i \right] (p,\underline{u}) \quad \dot{-}$$

5 DERIVATE DELLE BASI

0 Sia E uno spazio di dimensione n. Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E, di classe $\mathcal{C}^\infty$. Siano $B(p) \equiv \{\delta x_1(p),..,\delta x_n(p)\}$ e $B^*(p) \equiv \{Dx^1(p),..,Dx^n(p)\}$ le basi di $\bar{E}$ e $\bar{E}^*$, indotte da x.

Abbiamo visto (1.5.3.) che $B^*(p) \otimes B(p)$ e $B(p) \otimes B^*(p)$ sono le basi di $\bar{E}^* \otimes \bar{E}$ e $\bar{E} \otimes \bar{E}^*$, indotte da $B(p)$, l'una duale dell'altra e che $B^*(p) \otimes B^*(p)$ e $B(p) \otimes B(p)$ sono le basi di $\bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$ e $\bar{E} \otimes \bar{E}$ indotte da $B(p)$ l'una duale dell'altra.

Dunque, possiamo esprimere ogni tensore misto di tipo (1,1) e ogni tensore covariante del 2° ordine secondo tali basi.

In particolare, essendo x di classe $\mathcal{C}^\infty$, possiamo esprimere i tensori

$$D\delta x_1(p),...,D\delta x_n(p) \in \bar{E}^* \otimes \bar{E}$$

e i tensori

$$DDx^1(p) \equiv D^2x^1(p),...,DDx^n(p) \equiv D^2x^n(p) \in \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*.$$

5.5.1. PROPOSIZIONE

Per ogni $1 \le i \le n$, è

$$D\delta x_i(p) = \Gamma^k_{ij}(p)\, Dx^j(p) \otimes \delta x_k(p) ,$$

per ogni $1 \le k \le n$, è

$$D^2x^k(p) = -\Gamma^k_{ij}(p)\, Dx^i(p) \otimes Dx^j(p) ,$$

dove gli n^3 numeri

$$\Gamma^k_{ij}(p) \equiv \langle D\delta x_i(p), (\delta x_j(p), Dx^k(p))\rangle = -\langle D^2x^k(p), (\delta x_i(p), \delta x_j(p))\rangle \equiv -c^k_{ij}(p$$

si dicono SIMBOLI DI CHRISTOFFEL .

Dunque, è

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \quad .$$

D. Dimostriamo la relazione tra i coefficienti c^k_{ij} e i simboli di Christoffel Γ^k_{ij} .

E'

$$\langle Dx^i(p), \delta x_j(p)\rangle = \delta^i_j$$

Allora, per la regola di Leibnitz, è

$$0 = D\delta^i_j = D\langle Dx^i(p), \delta x_j(p)\rangle \overset{1)}{=} \langle D^2x^i(p), \delta x_j(p)\rangle + \langle Dx^i(p), D\delta x_j(p) \quad =$$

$$= \langle c^i_{hk}(p)\, Dx^h(p) \otimes Dx^k(p)\;, \delta x_j(p)\rangle + \langle Dx^i(p), \Gamma^r_{jh}(p)\, Dx^h(p) \otimes \delta x_r(p) \quad =$$

$$= [c^i_{hk}(p)\langle Dx^k(p), \delta x_j(p)\rangle + \Gamma^r_{jh}(p)\langle Dx^i(p), \delta x_r(p)\rangle] Dx^h(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^i_{hj}(p) + \Gamma^i_{jh}(p) \overset{2)}{=} c^i_{jh}(p) + \Gamma^i_{jh}(p) \Rightarrow \Gamma^i_{jh}(p) = -c^i_{jh}(p) \quad \dot{-}$$

---

1) $E \xrightarrow{(Dx^i, \delta x_j)} \bar{E}^* \otimes \bar{E} \xrightarrow{\langle\,,\,\rangle} \mathbb{R}$

$p \mapsto (Dx^i(p)\;, \delta x_j(p)) \mapsto \langle Dx^i(p), \delta x_j(p)\rangle.$

2) L'uguaglianza è lecita in quanto $D^2x^i(p)$ è simmetrica.

In un sistema di coordinate cartesiano, i simboli di Christoffel sono nulli.

Ciò è dovuto al fatto che le basi indotte da tale sistema sono costanti punto per punto.

5.5.2. Ricordiamo che i differenziali delle funzioni coordinate $\check{x}^i$, $\dot{x}^i$ di Tx sono i 2n campi di covettori su TE

$$d\check{x}^i : TE \to T^*TE \qquad\qquad d\dot{x}^i : TE \to T^*TE$$

dati da $\quad d\check{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};D\check{x}^i(p,\bar{u})), \quad d\dot{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};D\dot{x}^i(p,\bar{u}))$.

Esplicitiamo, allora, le derivate $D\check{x}^i(p,\bar{u})$ e $D\dot{x}^i(p,\bar{u})$.

5.5.3. PROPOSIZIONE Sia $\check{x}^i : TE \to \mathbb{R}$ la i-ma funzione coordinata di Tx data da $\check{x}^i(p,\bar{u}) \equiv x^i(p)$, $\forall\ (p,\bar{u}) \in TE$.

Allora, è

$$<D\check{x}^i(p,\bar{u})\ ,\ (\bar{v},\bar{w})> = <Dx^i(p),\bar{v}>\ ,\ \forall\ (\bar{v},\bar{w}) \in \bar{E}x\bar{E}\ .$$

D. Per comodità , rifacciamo la dimostrazione già data in 3.1.8. .

E'

$$<D\check{x}^i(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})> = <D_1\check{x}^i(p,\bar{u}),\bar{v}> + <D_2\check{x}^i(p,\bar{u}),\bar{w}> =$$

$$= <D(x^i \circ p_E \circ j_{\bar{u}})(p),\bar{v}> + <D(x^i \circ p_E \circ j_p)(\bar{u}),\bar{w}> =$$

$$= <Dx^i(p),\bar{v}> + <\underline{o},\bar{w}> = <Dx^i(p),\bar{v}>\ \underline{.}$$

5.5.4. PROPOSIZIONE Sia $\dot{x}^i : TE \to \mathbb{R}$ la n+i-ma funzione coordinata di Tx data da

$$\dot{x}^i(p,\bar{u}) \equiv \langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle \quad , \quad \forall\ (p,\bar{u}) \in TE\ .$$

Allora è

$$\langle D\dot{x}^i(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})\rangle = -\ \Gamma^i_{jk}(p)\langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle\langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle+\langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle\ ,$$

$\forall(\bar{v},\bar{w}) \in \bar{E} \times \bar{E}$.

D. Per comodità rifacciamo la dimostrazione già data in 3.1.8..E'

$$\langle D\dot{x}^i(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})\rangle = \langle D_1\dot{x}^i(p,\bar{u})\ ,\ \bar{v}\rangle + \langle D_2\dot{x}^i(p,\bar{u})\ ,\ \bar{w}\rangle =$$

$$=\langle D\dot{x}^i_{\bar{u}}(p),\bar{v}\rangle + \langle D\dot{x}^i_p(\bar{u}),\bar{w}\rangle \overset{1)}{=} \langle D^2x^i(p)(\bar{v}),\bar{u}\rangle + \langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle =$$

$$= -\Gamma^i_{jk}(p)\ \langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle\ \langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle + \langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle \quad \dot{-}$$

5.5.5. Ricordiamo che i differenziali delle curve coordinate $\check{x}_i$, $\dot{x}_i$ su TE sono i $2n$ campi di vettori su TE

$$\partial\check{x}_i : TE \to TTE \qquad\qquad ,\partial\dot{x}_i : TE \to TTE$$

1a) $E \xrightarrow{Dx^i} \bar{E}^* \xrightarrow{\langle\, ,\bar{z}\rangle} \mathbb{R}$

$q \mapsto Dx^i(q) \mapsto \langle Dx^i(q),\bar{z}\rangle$.

Dunque, è $\langle\ ,\bar{z}\ \rangle \circ Dx^i \equiv \dot{x}^i_{\bar{z}} \Rightarrow \langle D^2x^i(q),\bar{z}\rangle = D\dot{x}^i_{\bar{z}}(q)$

1b) $\bar{E} \xrightarrow{\langle Dx^i(q),\rangle} \mathbb{R}$

$\bar{z} \mapsto \langle Dx^i(q),\bar{z}\rangle$.

Dunque, è $\langle Dx^i(q),\rangle \equiv \dot{x}^i_q \Rightarrow \langle Dx^i(q),\bar{z}\rangle = D\dot{x}^i_q(\bar{z})$.

dati da $\partial\acute{x}_i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\delta\check{x}_i(p,\bar{u}))$, $\partial\dot{x}_i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\delta\dot{x}_i(p,\bar{u}))$.

Esplicitiamo, allora, le derivate $\delta\check{x}_i(p,\bar{u})$ e $\delta\dot{x}_i(p,\bar{u})$.

5.5.6. PROPOSIZIONE Sia $\check{x}_i : \mathbb{R} \times TE \to TE$ la i-ma curva coordinata su TE.

Allora è

$$<(\underline{\nu} ,\underline{\omega}), \delta\check{x}_i(p,\bar{u}) > = \Gamma^h_{ik}(p) <Dx^k(p),\bar{u}><\underline{\omega},\delta x_h(p)> +< \underline{\nu}, \delta x_i(p)>,$$

$\forall (\underline{\nu}, \underline{\omega}) \in \bar{E}^* \times \bar{E}^*$.

D. E'

$$\check{x}_i(\lambda;p,\bar{u}) = (Tx)^{-1}(x^1(p),\ldots,x^i(p)+\lambda,\ldots,x^n(p);<Dx^1(p),\bar{u}>, \ldots,<Dx^n(p),\bar{u}>) =$$

$$=(Tx)^{-1}(x^1(p),\ldots,x^i(p)+\lambda,\ldots,x^n(p);<Dx^1(x_i(\lambda,p)),\bar{v}>,\ldots<Dx^n(x_i(\lambda,p)),\bar{v}>).$$

Dunque, determiniamo quel vettore $\bar{v}$, nel punto trasformato $x_i(\lambda,p)$, avente le stesse componenti di $\bar{u}$, nel punto p.

Per ogni $1\leq j\leq n$, è

$$<Dx^j(x_i(\lambda,p)),\bar{v}> \overset{1)}{=} <Dx^j(p),\bar{v}>+<D^2x^j(p)(\delta x_i(p))\lambda \ , \bar{v}> + \bar{o}(o,\lambda) =$$

---

1) Sia $f : \mathbb{R} \to \bar{E}^*$ un'applicazione differenziabile. Allora, è

$$f(o+\lambda) = f(o) + Df(o)\lambda + \bar{o}(o,\lambda) .$$

Nel nostro caso si è posto $f \equiv Dx^j$.

$$= \langle Dx^j(p),\bar{v}\rangle - \lambda\Gamma^j_{ik}(p)\ \langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle + \bar{o}(o,\lambda)\ .$$

Dunque è

$$\bar{v} = \bar{u} + \lambda\Gamma^h_{ik}(p)\ \langle Dx^k(p),\bar{u}\rangle\ \delta x_h(p) + \bar{o}'(o,\lambda)\ .$$

Allora è

$$\check{x}_i(\lambda;p,\bar{u}) = (x_i(\lambda,p),\bar{u} + \lambda\Gamma^h_{ik}(p)\ \langle Dx^k(p),\ \bar{u}\rangle\ \delta x_h(p) + \bar{o}'(o,\lambda\ )\ )\quad ,$$

e quindi

$$\delta\check{x}_i(p,\bar{u}) \equiv D_1\check{x}_i(o;p,\bar{u}) \overset{2)}{=} (\delta x_i(p),\ \Gamma^h_{ik}(p)\langle Dx^k(p),\bar{u}\rangle\ \delta x_h(p))\quad ,$$

da cui l'asserto $\underline{.}$

5.5.7. PROPOSIZIONE Sia $\dot{x}_i : \mathbb{R} \times TE \to TE$ la n+i-ma funzione coordinata su TE.

Allora è

$$\langle (\ \underline{\nu}\ ,\ \underline{\omega}),\ \delta\dot{x}_i(p,\bar{u})\rangle\ = \langle\ \underline{\omega},\ \delta x_i(p)\rangle\quad ,\quad \forall(\ \underline{\nu},\underline{\omega})\ e\ \bar{E}^*x\bar{E}^*$$

D. E'

$$\dot{x}_i(\lambda;p,\bar{u}) = (Tx)^{-1}(x^1(p),..,x^n(p);\langle Dx^1(p),\bar{u}\rangle,..,\langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle+\lambda,..,\langle Dx^n(p),\bar{u}\rangle\ ) =$$

2) Calcolando la derivata, si vede che l'infinitesimo $\bar{o}'(o,\lambda)$ tende a zero più velocemente di λ.

$$= (Tx)^{-1}(x^1(p),\dots,x^n(p);\langle Dx^1(p),\bar{u}+\lambda\delta x_i(p)\rangle,\dots,\langle Dx^i(p),\bar{u}+\lambda\delta x_i(p)\rangle,\dots,$$

$$\dots,\langle Dx^n(p),\bar{u}+\lambda\delta x_i(p)\rangle\ ) =$$

$$= (p,\ \bar{u} + \lambda\delta x_i(p))\ .$$

e quindi

$$\delta\dot{x}_i(p,\bar{u}) \equiv D_1\ \dot{x}_i(o;p,\bar{u}) = (\bar{o}\ ,\ \delta x_i(p)\ )\ .$$

Dunque, è

$$\langle(\underline{\nu},\underline{\omega}),\delta\dot{x}_i(p,\bar{u})\rangle = \langle\ \underline{\nu},\bar{o}\rangle + \langle\ \underline{\omega},\delta x_i(p)\rangle\ = \langle\ \underline{\omega}\ ,\ \delta x_i(p)\rangle \quad \underline{\cdot}$$

5.5.8. Ricordiamo che i differenziali delle funzioni coordinate $\hat{x}^i,\dot{x}_i$ di T^*x sono i 2n campi di covettori su T^*E

$$d\hat{x}^i\ :\ T^*E\to T^*T^*E \qquad ,\quad d\dot{x}_i\ :\ T^*E \to T^*T^*E$$

dati da

$$d\hat{x}^i\ :(p,\underline{u})\mapsto(p,\underline{u};D\hat{x}^i(p,\underline{u}))\ ,\quad d\dot{x}_i:(p,\underline{u})\mapsto(p,\underline{u};D\dot{x}_i(p,\underline{u}))$$

Esplicitiamo allora le derivate $D\hat{x}^i(p,\underline{u})$ e $D\dot{x}_i(p,\underline{u}\ )$.

5.5.9. PROPOSIZIONE Sia $\hat{x}^i\ :\ T^*E\ \to \mathbb{R}$ la i-ma curva coordinata di T^*x data da $\hat{x}^i(p,\underline{u}) = x^i(p)$, $\forall\ (p,\underline{u}) \in T^*E$.

Allora è

$$\langle D\hat{x}^i(p,\underline{u})\ ,\ (\bar{v},\underline{\omega})\rangle = \langle Dx^i(p),\bar{v}\rangle \quad ,\ \forall(\bar{v}\ ,\ \underline{\omega}\ ) \in \bar{E}\times\bar{E}^*\ .$$

D. Per comodità, rifacciamo la dimostrazione già data in 3.1.8.. E'

$$< D\hat{x}^i(p,\underline{u}),(\bar{v},\underline{\omega}) > =<D_1\hat{x}^i(p,\underline{u}),\bar{v}>+<D_2\hat{x}^i(p,\underline{u}) , \underline{\omega} > =$$

$$=<D(x^i\circ q_E\circ j_{\underline{u}})(p),\bar{v}>+<D(x^i\circ q_E\circ j_p)(\underline{u}), \underline{\omega}> =$$

$$=<Dx^i(p),\bar{v}>+<\bar{o}, \underline{\omega}> = <Dx^i(p),\bar{v}> \;\underline{.}$$

5.5.10. PROPOSIZIONE Sia $\dot{x}_i : T^*E \to \mathbb{R}$ la n+i-ma funzione coordinata di T^*x .

Allora è

$$<D\dot{x}_i(p,\underline{u}),(\bar{v},\underline{\omega})> = \Gamma^k_{ij}(p)<Dx^j(p),\bar{v}>< \underline{u},\delta x_k(p)> +< \underline{\omega} ,\delta x_i(p)> ,$$

$\forall\ (\bar{v}, \underline{\omega}) \in \bar{E} \times \bar{E}^*$.

D. Per comodità, rifacciamo la dimostrazione già data in 3.1.8..E'

$$<D\dot{x}_i(p,\underline{u}),(\bar{v},\underline{\omega})> = <D\dot{x}_{i\underline{u}}(p),\bar{v}> + <D\dot{x}_{ip}(\underline{u}), \underline{\omega} > \overset{1)}{=}$$

1a) $E \xrightarrow{\delta x_i} \bar{E} \xrightarrow{<\underline{\nu},>} \mathbb{R}$

$q \mapsto \delta x_i(q) \mapsto <\underline{\nu},\delta x_i(q)>$.

Dunque, è

$$\dot{x}_{i\underline{\nu}}= <\underline{\nu},>\circ\ \delta x_i \Rightarrow D\dot{x}_{i\underline{\nu}}(q) = < \underline{\nu},D\delta x_i(q) > .$$

1b) $\bar{E}^* \xrightarrow{<,\delta x_i(q)>} \mathbb{R}$

$\underline{\nu} \mapsto <\underline{\nu} ,\delta x_i(q)>$.

Dunque, è

$$\dot{x}_{iq} = <,\delta x_i(q)> \Rightarrow D\dot{x}_{iq}(\underline{\nu}) =< \underline{\nu},\delta x_i(q)> \quad .$$

$=\langle D\delta x_i(p),(\underline{u},\bar{v})\rangle + \langle\underline{\omega},\delta x_i(p)\rangle$ $\quad \underline{\cdot}$

5.5.11. Ricordiamo che i differenziali delle curve coordinate su T^*E sono 2n campi di vettori su T^*E

$$\partial\hat{x}_i : T^*E \to TT^*E \quad , \quad \partial\dot{x}_i : T^*E \to TT^*E$$

dati da $\quad \partial\hat{x}_i:(p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\delta\hat{x}_i(p,\underline{u}))$, $\quad \partial\dot{x}_i:(p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u})\ \delta\dot{x}_i(p,\underline{u}))$.

Esplicitiamo allora le derivate $\delta\hat{x}_i(p,\underline{u})$ e $\delta\dot{x}_i(p,\underline{u})$.

5.5.12. PROPOSIZIONE Sia $x_i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E$ la i-ma curva coordinata su T^*E .

Allora è

$$\langle(\underline{\nu},\bar{w}),\delta\hat{x}_i(p,\underline{u})\rangle = -\Gamma^{k}_{ih}(p)\langle\underline{u},\delta x_k(p)\rangle\langle Dx^h(p),\bar{w}\rangle + \langle\underline{\nu},\delta x_i(p)\rangle \quad ,$$

$\forall(\underline{\nu},\bar{w}) \in \bar{E}^* \times \bar{E}$.

D. E'

$$\dot{x}_i(\lambda;p,\underline{u})=(T^*x)^{-1}(x^1(p),..,x^i(p)+\lambda,..,x^n(p);\langle\underline{u},\delta x_1(p)\rangle,..,\langle\underline{u},\delta x_n(p)\rangle\ ) =$$

$$=(T^*x)^{-1}(x^1(p),..,x^i(p)+\lambda,..,x^n(p);\langle\underline{\omega},\delta x_1(x_i(\lambda,p))\rangle,..\langle\underline{\omega},\delta x_n(x_i(\lambda,p))$$

Dunque, determiniamo quel covettore $\underline{\omega}$, nel punto trasformato $x_i(\lambda,p)$, avente le stesse componenti di $\underline{u}$, nel punto p.

Per ogni $1 \leq j \leq n$, è

$$< \underline{\omega}, \delta x_j (x_i(\lambda,p)) > = < \underline{\omega}, \delta x_j(p) > + < \underline{\omega}, D\delta x_j(p)(\delta x_i(p)(\delta x_i(p))\lambda > + \bar{o}(o,\lambda) =$$

$$= < \underline{\omega}, \delta x_j(p) > + \lambda \Gamma^k_{ji}(p) < \underline{\omega}, \delta x_k(p) > + \bar{o}(o,\lambda) \; .$$

Dunque è

$$\underline{\omega} = \underline{u} - \lambda \Gamma^{\;k}_{hi}(p) < \underline{u}, \delta x_k(p) > Dx^h(p) + \bar{o}'(o,\lambda) \; .$$

Allora è

$$\grave{x}_i(\lambda;p,\underline{u}) = (x_i(\lambda,p) \; , \; \underline{u} - \lambda \Gamma^k_{ih}(p) < \underline{u}, \delta x_k(p) > Dx^h(p) + \bar{o}'(o,\lambda) \;) \; ,$$

e quindi

$$\delta \hat{x}_i(p,\underline{u}) \equiv D_1 \hat{x}_i(o;p,\underline{u}) \overset{1)}{=} (\delta x_i(p) \quad , \; -\Gamma^k_{ih}(p) < \underline{u}, \delta x_k(p) > Dx^h(p) \;),$$

da cui l'asserto $\underline{\cdot}$

5.5.13. PROPOSIZIONE Sia $\dot{x}^i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E$ la n+i-ma curva coordinata su T^*E

Allora è

$$<(\underline{\nu},\bar{w}) \; , \delta \dot{x}^i (p,\underline{u}) > = < Dx^i(p), \bar{w} > \; , \qquad \forall \; (\underline{\nu},\bar{w}) \in \bar{E}^* x \bar{E}$$

D. E'

$$\dot{x}^i(\lambda;p,\underline{u}) = (T^*x)^{-1}(x^1(p),..,x^n(p); < \underline{u}, \delta x_1(p) >, .. , < \underline{u}, \delta x_i(p) > + \lambda, .. , < \underline{u}, \delta x_n(p) \quad) =$$

$$= (T^*x)^{-1}(x^1(p),..,x^n(p); < \underline{u} + \lambda Dx^i(p), \delta x_1(p) >, .. , < u + \lambda Dx^i(p), \delta x_i(p) \; , ... ,$$

---

1)Calcolando la derivata, si vede che l'infinitesimo $\bar{o}'(o,\lambda)$tende a zero più velocemente di λ.

$$\ldots,<\underline{u}+\lambda Dx^{i}(p),\delta x_{n}(p)>)$$

$$= (p,\ u + \lambda\ D\ x^{i}(p)\ ),$$

e quindi

$$\delta\dot{x}_{i}(p,\underline{u}) \equiv D_{1}\dot{x}_{i}(o;p,\underline{u}) = (\bar{o},\ Dx^{i}(p)\ )\quad .$$

Dunque, è

$$<(\underline{\nu},\bar{w}),\delta\dot{x}_{i}(p,\underline{u})> =< \underline{\nu},\bar{o} >+ <Dx^{i}(p),\bar{w}> = <Dx^{i}(p),\bar{w} > \quad \underline{\cdot}$$

Tali risultati serviranno per esplicitare le funzioni coordiante sui secondi spazi tangenti e cotangenti di E, indotte da x .

6 CALCOLO DELLE DERIVATE SECONDE

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n. Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E, di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Facciamo uno studio delle derivate seconde di alcune applicazioni differenziabili che, per semplicità, supporremo di classe $\mathcal{C}^\infty$(è sufficiente che siano differenziabili due volte).

Nel caso di una funzione si ritrova il classico teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione.

Si noti, come talvolta si possa ottenere un interessante significato legato al sistema di coordinate.

In questo paragrafo, ci interessiamo anche al calcolo delle derivate dei campi differenziabili di vettori e covettori e, più in generale, di un campo tensoriale r volte controvariante ed s volte covariante.

Siano, dunque, $B \equiv \{\delta x_1,\dots,\delta x_n\}$ e $B^* \equiv \{Dx^1,\dots,Dx^n\}$ le basi, indotte da x, per i campi di vettori e di covettori su E, rispettivamente, l'una duale dell'altra.

Calcoliamo le derivate seconde di alcune applicazioni $\mathcal{C}^\infty$.

1) CASO $f : \mathbb{R} \to E$.

5.6.1. PROPOSIZIONE Sia f una curva $\mathcal{C}^\infty$. Consideriamo la derivata $Df : \mathbb{R} \to \bar{E}$, ossia l'applicazione $\mathcal{C}^\infty$ data da

$$Df = Df^i(\delta x_i \circ f)$$

con $f^i \equiv x^i \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Allora è

a) $$D^2 f = [\,D^2 f^i + (\Gamma^i_{jk} \circ f) Df^j Df^k\,](\delta x_i \circ f) \quad .$$

b) $$d^2 f = Df^i(\partial \check{x}_i \circ df) + D^2 f^i(\partial \dot{x}_i \circ df) \quad .$$

c) $$\Gamma \circ d^2 f = [\,D^2 f^i + (\Gamma^i_{jk} \circ f) Df^j Df^k\,]\,(\partial \dot{x}_i \circ df) \quad .$$

D. a). Infatti, per le regole di Leibnitz e della catena, è

$$D^2 f \equiv D(Df) = D^2 f^i(\delta x_i \circ f) + Df^i(D\delta x_i \circ f)(Df) =$$

$$= D^2 f^i(\delta x_i \circ f) + Df^i[\,\Gamma^j_{ik}\, Dx^k \otimes \delta x_j) \circ f\,](Df) =$$

$$= D^2 f^i(\delta x_i \circ f) + (\Gamma^j_{ik} \circ f) Df^i Df^k(\delta x_j \circ f) =$$

$$= [\,D^2 f^i + (\Gamma^i_{jk} \circ f)\, Df^j Df^k\,](\delta x_i \circ f) \quad .$$

b). Posto $df \equiv g$, $(\check{x}^i, \dot{x}^j) \equiv y^{(ij)}$, allora il risultato segue dalla nota relazione

$$dg = Dg^i(\partial y_i \circ g)$$

con $g^i \equiv y^i \circ g$.

c) E'

$$(\Gamma \circ d^2 f) = (f, Df)\ ;\ \bar{o},\ D^2 f$$

$$= [\dot{\check{x}}^i \circ (f, Df; \bar{o}, D^2 f)](\partial \check{x}_i \circ df) + [\ddot{x}^i \circ (f, Df; \bar{o}, D^2 f\,](\partial \dot{x}_i \circ df\,)$$

$$= [\ddot{x}^i \circ (f\ , Df\ ;\ \bar{o}, D^2 f\ )](\partial \dot{x}_i \circ df) =$$

$$= \langle D\ddot{x}^i \circ f, D^2 f\rangle(\partial \dot{x}_i \circ df) = [D^2 f^i + (\Gamma^i_{jk} \circ f) Df^j Df^k\,](\partial \dot{x}_i \circ df) .$$

$$= \{[\,D^2f^i + (\Gamma^i_{jk}\circ f)Df^jDf^k\,](\partial\dot{x}_i\circ df)\} \qquad \dot{-}$$

La relazione c) si può ottenere, più semplicemente, tenendo presente l'isomorfismo canonico

$$\nu T_{(p,\bar{u})}\, TE \approx T_pE \quad .$$

Infatti, tale isomorfismo si traduce, in un sistema di coordinate, nel fatto che le componenti, secondo la base $\{\partial\dot{x}_1(p,\bar{u}),\dots,\partial\dot{x}_n(p,\bar{u})\}$ di $\nu\, T_{(p,\bar{u})}TE$, di $(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w})$ sono le componenti di $(p,\bar{w})$, secondo la base $\{\partial x_1(p),\dots,\partial x_n(p)\}$ di T_pE .

Il termine $\Gamma\circ d^2f$ gioca un ruolo importante, nella Meccanica Analitica.

2) CASO $f : E \to \mathbb{R}$.

5.6.2. PROPOSIZIONE Sia f una funzione differenziabile almeno due volte. Sia $Df : E \to \bar{E}^*$ l'applicazione differenziabile data da

$$Df = (\partial x_i.f)Dx^i$$

con $\partial x_i.f \equiv D(f \text{ o } x_i)_\circ : E \to \mathbb{R}$.

Allora è

$$D^2f = [\,(\partial x_i.\,\partial x_j.f) - \Gamma^k_{ij}(\partial x_k.f)]\; Dx^i \otimes Dx^j \; .$$

D. Posto $\partial x_i.f \equiv \alpha_i$, allora per la regola di Leibnitz, è

$$D^2f \equiv D(Df) = D(\alpha_i Dx^i) = D\alpha_i \otimes Dx^i + \alpha_i D^2x^i =$$

$$=(\partial x_j . \alpha_i)Dx^j \otimes Dx^i - \alpha_i \Gamma^i_{hk} Dx^h \otimes Dx^k =$$

$$=(\partial x_j . \partial x_i . f)Dx^j \otimes Dx^i - \Gamma^k_{ij}(\partial x_k . f)Dx^i \otimes Dx^j =$$

$$=[(\partial x_i . \partial x_j . f) - \Gamma^k_{ij}(\partial x_k . f)]Dx^i \otimes Dx^j \qquad \dot{-}$$

L'ultima relazione è dovuta alla simmetria della forma bilineare D^2f, permettendo così lo scambio degli indici i e j. Dunque, è

$$(\partial x_i . \partial x_j . f) = (\partial x_j . \partial x_i . f) \quad ,$$

che esprime appunto il noto teorema di Schwarz dell'Analisi Classica.

5.6.3. Calcoliamo ora la derivata di un campo di vettori su E, differenziabile.

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} : E \to \bar{E}$ un campo vettoriale differenziabile dato da

$$\bar{X} = X^i \, \delta x_i \; .$$

Allora è

$$D\bar{X} = [(\partial x_j . X^i) + \Gamma^i_{jk} X^k] \, Dx^j \otimes \delta x_i \; .$$

D. Per la regola di Leibnitz, è

$$D\bar{X} = D(X^i \delta x_i) = DX^i \otimes \delta x_i + X^i \, D\delta x_i =$$

$$= (\partial x_j . X^i)Dx^j \otimes \delta x_i + \Gamma^k_{ij} \, X^i Dx^j \otimes \delta x_k =$$

$$=[(\partial x_j . X^i) + \Gamma^i_{kj} X^k]\, Dx^j \otimes \delta x_i \qquad \underset{-}{\cdot}$$

5.6.4. Calcoliamo ora la derivata di un campo di covettori su E, differenziabile.

PROPOSIZIONE Sia $\underline{X} : E \to \bar{E}^*$ un campo di covettori differenziabile dato da

$$\underline{X} = X_i Dx^i \; .$$

Allora è

$$D\underline{X} = [(\partial x_j . X_i) - \Gamma^k_{ij} X_k]\, Dx^j \otimes Dx^i \qquad .$$

D. Per la regola di Leibnitz, è

$$D\underline{X} = D(X_i Dx^i) = DX_i \otimes Dx^i + X_i D^2 x^i =$$

$$= (\partial x_j . X_i) Dx^j \otimes Dx^i - \Gamma^i_{jk} X_i Dx^j \otimes Dx^k =$$

$$= [(\partial x_j . X_i) - \Gamma^k_{ji} X_k]\, Dx^j \otimes Dx^i \qquad \underset{-}{\cdot}$$

5.6.5. Più in generale, diamo la derivata di un campo tensoriale differenziabile.

PROPOSIZIONE Sia $t : E \to \otimes^r_s \bar{E}$ un campo tensoriale r volte controvariante ed s volte covariante, differenziabile dato da

$$t = t^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s}\, \delta x_{i_1} \otimes \dots \otimes \delta x_{i_r} \otimes Dx^{j_1} \otimes \dots \otimes Dx^{j_s}$$

Allora le componenti di $Dt : E \to \otimes^{r}_{s+1}\bar{E}$ sono del tipo

$$Dt^{i_1 \dots i_r}_{kj_1 \dots j_s} = \partial x_k . t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \Gamma^{i_1}_{hk}\, t^{hi_2 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \dots +$$

$$+\Gamma^{i_r}_{hk}\, t^{i_1 \dots i_{r-1}h}_{j_1 \dots j_s} - \Gamma^{h}_{j_1 k}\, t^{i_1 \dots i_r}_{hj_2 \dots j_s} \dots -$$

$$-\Gamma^{h}_{j_s k}\, t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{s-1} h} \qquad \dot{-}$$

7 SISTEMI DI COORDINATE SUI SECONDI SPAZI TANGENTI E COTANGENTI

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n. Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E di classe $\mathcal{C}^\infty$.

E' possibile estendere, in modo naturale, tale sistema di coordinate ai secondi spazi tangenti TTE e TT^*E, stabilendo così una biiezione tra essi e $\mathbb{R}^{4n}$.

Riusciamo nel nostro scopo, considerando le 2-applicazioni tangenti TTx e TT^*x, rispettivamente.

Ancora, in modo naturale, si estende x ai secondi spazi cotangenti T^*TE e T^*T^*E mediante le 2-applicazioni cotangenti T^*Tx e T^*T^*x, rispettivamente.

Sono anche interessanti i sistemi di coordinate, indotti da x, sugli spazi νTTE e σT^*TE.

Si osservi che anche sui secondi spazi tangenti e cotangenti di E vi sono sistemi di coordinate non provenienti da sistemi su E.

5.7.1. PROPOSIZIONE

La 2-applicazione tangente di x

$$TTx : TTE \to \mathbb{R}^{4n}$$

data da $$TTx:(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (Tx(p,\bar{u}) \;,\; D(Tx)(p,\bar{u})(\bar{v},\bar{w}))$$

è un sistema di coordinate su TTE di classe $\mathcal{C}^\infty$.

$\forall (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE$ $\dot{-}$

5.7.3. Abbiamo visto (5.4.3.) che assegnare il sistema di coordinate Tx su TE è equivalente ad assegnare la $2n$-pla $(\check{x}^1,\ldots,\check{x}^n;\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)$. Abbiamo, dunque, la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE. E'

$$TTx = ((T\check{x}),(T\dot{x})) = (\check{\check{x}},\dot{\check{x}};\check{\dot{x}},\ddot{x}) .$$

Più precisamente, è

$$((T\check{x})^1,\ldots,(T\check{x})^n,(T\check{x})^{n+1},\ldots,(T\check{x})^{2n};(T\dot{x})^1,\ldots,(T\dot{x})^n,(T\dot{x})^{n+1},\ldots,(T\dot{x})^{2n}) =$$

$$= (\check{\check{x}}^1,\ldots\check{\check{x}}^n,\dot{\check{x}}^1,\ldots,\dot{\check{x}}^n;\check{\dot{x}}^1,\ldots,\check{\dot{x}}^n,\ddot{x}^1,\ldots,\ddot{x}^n) \quad .$$

D. Per ogni $1 \leq i \leq n$, $(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE$, è

$$\check{\check{x}}^i(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv (x^i \circ p_E \circ p_{TE})(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = x^i(p)$$

$$\dot{\check{x}}^i(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv (\dot{x}^i \circ p_{TE})(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle$$

$$\check{\dot{x}}^i(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv \langle D\check{x}^i(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})\rangle \overset{1)}{=} \langle Dx^i(p),\bar{v}\rangle$$

$$\ddot{x}^i(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv \langle D\dot{x}^i(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})\rangle \overset{2)}{=}$$

$$= -\Gamma^i_{jk}(p)\langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle\langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle + \langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle \; .$$

Si ritrovano così le relazioni (*) $\dot{-}$

---
1) (5.5.3.).
2) (5.5.4.).

5.7.4. Dunque, possiamo esprimere ogni elemento $(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in T_{(p,\bar{u})}TE$ tramite la base

$$\{\partial\check{x}_1,(p,\bar{u}),..,\partial\check{x}_n(p,\bar{u});\ \partial\dot{x}_1(p,\bar{u}),...,\partial\dot{x}_n(p,\bar{u})\}$$

di $T_{(p,\bar{u})}TE$.

PROPOSIZIONE

E'

$$(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w})=\langle Dx^i(p),\bar{v}\rangle\partial\check{x}_i(p,\bar{u})\ -\Gamma^i_{jk}(p)\langle Dx^j(p)\bar{u}\rangle\langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle\partial x_i(p,\bar{u})+\langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle\partial x_i(p,\bar{u}$$

D. Posto $TE \equiv F$, $(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv (q,\bar{z}) \in T_qF$, $(\check{x}^i,\dot{x}^i)\equiv y^i$, allora il risultato segue dalla nota relazione

$$(q,\bar{z}) \equiv \langle Dy^i(q),\bar{z}\rangle\partial y_i(q)\ \ \underline{\cdot}$$

5.7.5. Dunque, possiamo dare l'espressione in coordinate di $\Gamma : TTE \rightarrow \nu TTE$.

PROPOSIZIONE

E'

$$\check{\check{x}}^i \circ \Gamma = \check{\check{x}}^i$$

$$\check{\dot{x}}^i \circ \Gamma = \check{\dot{x}}^i$$

$$\dot{\check{x}}^i \circ \Gamma = 0$$

$$\ddot{x}^i \circ \Gamma = \ddot{x}^i + \check{\Gamma}^i_{jk}\ \dot{x}^j\ \dot{\check{x}}^k \quad .$$

D. Le prime tre relazioni sono ovvie. Inoltre, è

$$(\ddot{x}^i \circ \Gamma)(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle = -\Gamma^i_{jk}(p)\langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle\langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle + \langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle +$$

$$+ \Gamma^i_{jk}(p)\langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle\langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle =$$

$$=(\ddot{x}^i + \check{\Gamma}^i_{jk}\check{\dot{x}}^j\,\dot{\check{x}}^k)(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \qquad \forall (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE \quad .$$

5.7.6. PROPOSIZIONE Sia F uno spazio affine di dimensione m.

Sia $y \equiv (y^1,\dots,y^m) : F \to R^m$ un sistema di coordinate su F, di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile almeno due volte.

Allora è

- $\check{\check{y}}^i \circ TTf = \check{\check{f}}^i$

- $\check{\dot{y}}^i \circ TTf = (\partial x_j.\check{f}^i)\,\check{\dot{x}}^j$

- $\dot{\check{y}}^i \circ TTf = (\partial x_j.\check{f}^i)\dot{\check{x}}^j$

- $\ddot{y}^i \circ TTf = (\partial x_k.\partial x_j.\check{f}^i)\dot{\check{x}}^k\check{\dot{x}}^j + (\partial x_j.\check{f}^i)\ddot{x}^j$.

D. Segue immediatamente dalla proposizione 5.4.9.

Facciamo ora uno studio in coordinate delle e.d.s.o.

5.7.7. Esprimiamo in coordinate la proposizione 3.3.2. che caratterizza le curve basiche.

PROPOSIZIONE Sia $I \subset R$. Sia $c : I \to TE$ una curva $\mathcal{C}^\infty$ e sia

$$\gamma \equiv p_E \circ c : I \to E.$$

Allora c è una curva basica se e solo se è

$$\dot{x}^i \circ c \equiv c^{\bar{i}} = Dc^i \equiv D(\check{x}^i \circ c) = D(x^i \circ \gamma) \qquad \dot{-}$$

5.7.8. Esprimiamo in coordinate il teorema 3.3.4. che caratterizza una e.d.s.o. .

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ un campo vettoriale $\mathcal{C}^\infty$ dato da

$$\bar{X} = X^i \partial\check{x}_i + X^{\bar{i}} \partial\dot{x}_i \quad .$$

Sia, dunque

$$\check{\check{x}}^i \quad \bar{X} = \check{x}^i \qquad , \qquad \check{\dot{x}}^i \circ \bar{X} = \dot{x}^i \; .$$

Allora le tre condizioni seguenti sono equivalenti.

a) $\bar{X}$ è una e.d.s.o. .

b) E'

$$\bar{X} = \dot{x}^i \; \partial\check{x}_i + X^{\bar{i}} \; \partial\dot{x}_i \; .$$

c) E'

$$\dot{\check{x}}^i \circ \bar{X} = \dot{x}^i \quad ; \; \ddot{x}^i \circ \bar{X} = X^{\bar{i}} \qquad \dot{-}$$

5.7.9. In particolare l'espressione della e.d.s.o. geodetica, è

$$\bar{X}_0 = \dot{x}^i \partial\check{x}_i - \check{\Gamma}^i_{jk} \, \dot{x}^j \dot{x}^k \, \partial\dot{x}_i \quad .$$

5.7.10. Esprimiamo in coordinate il teorema 3.3.6. che caratterizza le soluzioni di una e.d.s.o. .

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} = X^i \partial \check{x}_i + X^{\bar{i}} \partial \dot{x}_i$ una e.d.s.o. e sia $\gamma : I \to E$ una curva $\mathcal{C}^\infty$.

Allora γ è una soluzione di $\bar{X}$ se e solo se è

$$D^2(x^i \circ \gamma) \equiv D^2 \gamma^i \equiv X^{\bar{i}} \circ d\gamma \quad \_$$

5.7.11. Esprimiamo in coordinate la proposizione 3.3.10. che caratterizza un integrale primo di $\bar{X}$, mediante $\bar{X}$.

PROPOSIZIONE. Sia $\bar{X} = X^i \partial \check{x}_i + X^{\bar{i}} \partial \dot{x}_i$ una e.d.s.o. . Sia $f : TE \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$.

Allora f è un integrale primo di $\bar{X}$ se e solo se è

$$\dot{x}^i \partial \check{x}_i . f + X^{\bar{i}} \, \partial \dot{x}_i . f = o \quad .$$

D. Segue da 3.3.2. e 3.3.10. _

5.7.12. Diamo ora il sistema di coordinate su $TT^{*}E$, indotto da x.

PROPOSIZIONE

La 2-applicazione tangente di x

$$TT^{*}x : TT^{*}E \to \mathbb{R}^{4n}$$

data da
$$TT^{*}x : (p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \mapsto (T^{*}(x), D(T^{*}x)(p,\underline{u})(\bar{v},\underline{\omega}))$$

è un sistema di coordinate su $TT^{*}E$ di classe $\mathscr{C}^{\infty}$ $\underline{.}$

Per ottenere l'espressione esplicita di $TT^{*}x$, in termini di funzioni coordinate, procediamo nel modo seguente.

5.7.13. PROPOSIZIONE Sia $T^{*}x = ((T^{*}x)^{1},\ldots,(T^{*}x)^{n};(T^{*}x)_{n+1},\ldots,(T^{*}x)_{2n})$ il sistema di coordinate su $T^{*}E$, indotto da x.

Allora è

$$TT^{*}x = ((\overset{\vee}{T^{*}x}), (\overset{\bullet}{T^{*}x})) =$$

$$= (\check{\hat{x}}^{1},\ldots,\check{\hat{x}}^{n},\check{\dot{x}}_{1},\ldots,\check{\dot{x}}_{n};\dot{\hat{x}}^{1},\ldots,\dot{\hat{x}}^{n},\ddot{x}_{1},\ldots,\ddot{x}_{n}) .$$

Dunque, le funzioni coordinate di $TT^{*}x$ sono le $4n$ applicazioni differenziabili

$$(TT^{*}x)^{i} = (\overset{\vee}{T^{*}x})^{i} = \check{\hat{x}}^{i} \quad : TT^{*}E \to \mathbb{R}$$

$$(TT^{*}x)_{n+i} = (\overset{\vee}{T^{*}x})_{n+i} = \check{\dot{x}}_{i} \quad : TT^{*}E \to \mathbb{R}$$

$$(TT^{*}x)^{2n+i} = (\overset{\bullet}{T^{*}x})^{i} = \dot{\hat{x}}^{i} \quad : TT^{*}E \to \mathbb{R}$$

$$(TT^*x)_{3n+i} = (\dot{T}^*x)_{n+i} = \ddot{x}_i : TT^*E \to \mathbb{R}$$

$\forall\ 1 \leq i \leq n$,

date da

$$\check{\hat{x}}^i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = x^i(p)$$

$$\check{\dot{x}}_i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = \langle\underline{u},\delta x_i(p)\rangle$$

$$\dot{\hat{x}}^i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = \langle Dx^i(p),\bar{v}\rangle$$

$$\ddot{x}_i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = \Gamma^k_{ij}(p)\ \langle Dx^j(p),\bar{v}\rangle\langle\underline{u},\delta x_k(p)\rangle + \langle\ \underline{\omega}\ ,\delta x_i(p)\rangle\ ,$$

$\forall\ (p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \in TT^*E$.

D. E'

$$\check{\hat{x}}^i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \equiv (x^i \circ q_E \circ p_{T^*E})(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = x^i(p) \quad .$$

$$\check{\dot{x}}_i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \equiv (\dot{x}_i \circ p_{T^*E})(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = \langle\underline{u},\ \delta x_i(p)\rangle\ .$$

$$\dot{\hat{x}}^i(p,u;\bar{v},\underline{\omega}) \equiv \langle D\hat{x}^i(p,\underline{u})\ ,\ (\bar{v},\underline{\omega})\rangle \overset{1)}{=} \langle Dx^i(p),\bar{v}\rangle \quad .$$

$$\ddot{x}_i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \equiv \langle D\dot{x}_i(p,\underline{u}),(\bar{v},\underline{\omega})\rangle \overset{2)}{=} \Gamma^k_{ij}(p)\langle Dx^j(p),\bar{v}\rangle\langle\underline{u},\delta x_k(p)\rangle + \langle\underline{\omega},\delta x_i(p)\rangle\ .$$

5.7.14. Dunque, possiamo esprimere ogni elemento $(p,\underline{u},\bar{v},\underline{\omega}) \in T_{(p,\underline{u})}T^*E$

nella base

$$\{\partial\hat{x}_1(p,\underline{u}),..,\partial\hat{x}_n(p,\underline{u});\partial\dot{x}_1(p,\underline{u}),...,\partial\dot{x}_n(p,\underline{u})\}$$

di $T_{(p,\underline{u})}T^*E$.

1)(5.5.3.)
2)(5.5.10.)

PROPOSIZIONE

E'

$$(p,\underline{u};\ \bar{v},\underline{\omega}) = \langle Dx^i(p,\bar{v}\rangle\ \partial\hat{x}_i(p,\underline{u}) + \Gamma^k_{ij}(p)\langle Dx^j(p),\bar{v}\rangle\langle\underline{u},\delta x_k(p)\rangle\partial\dot{x}_i(p,\underline{u}) +$$

$$+ \langle\ \underline{\omega}\ ,\delta x_i(p)\rangle\partial\dot{x}_i(p,\underline{u}) \quad .$$

D. Posto $T^*E \equiv F$, $(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \equiv (q,\bar{z})\in T_qF$, $(\hat{x}^i,\dot{x}_i) \equiv y^i$, allora

il risultato segue dalla nota relazione

$$(q,\bar{z}) = \langle Dy^i(q),\ \bar{z}\rangle\ \partial y_i(q) \quad \underline{\cdot}$$

5.7.15. Diamo ora il sistema di coordinate su T^*TE, indotto da x.

PROPOSIZIONE

La 2-applicazione cotangente di x

$$T^*Tx : T^*TE \to \mathbb{R}^{4n}$$

data da $$T^*Tx:(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \mapsto (Tx(p,\bar{u}),(\underline{\nu},\underline{\omega}) \circ D(Tx)^{-1}(Tx(p,\bar{u})))$$

è un sistema di coordinate su T^*TE di classe $\mathcal{C}^\infty$ $\underline{\cdot}$

Per ottenere l'espressione esplicita di T^*Tx, in termini di funzioni coordinate, procediamo nel modo seguente.

5.7.16. PROPOSIZIONE Sia $Tx = ((Tx)^1,..,(Tx)^n;(Tx)^{n+1},..,(Tx)^{2n})$

il sistema di coordinate su TE, indotto da x.

Allora è

$$T^*Tx = ((\widehat{Tx})^1,\ldots,(\widehat{Tx})^{2n};(\dot{Tx})_1,\ldots,(\dot{Tx})_{2n}) \simeq$$

$$= (\hat{\check{x}}^1,\ldots,\hat{\check{x}}^n,\hat{\dot{x}}^1,\ldots,\hat{\dot{x}}^n;\ \dot{\check{x}}_1,\ldots\dot{\check{x}}_n,\ddot{x}_1,\ldots,\ddot{x}_n) .$$

Dunque, le funzioni coordinate di T^*Tx sono le 4n applicazioni differenziabili

$$(T^*Tx)^i = (\widehat{Tx})^i = \hat{\check{x}}^i \qquad : T^*TE \to \mathbb{R}$$

$$(T^*Tx)^{n+i} = (\widehat{Tx})^{n+i} = \hat{\dot{x}}^i \qquad : T^*TE \to \mathbb{R}$$

$$(T^*Tx)_{2n+i} \overset{1)}{=} (\dot{Tx})_i \overset{2)}{\simeq} \dot{\check{x}}_i \quad : T^*TE \to \mathbb{R}$$

$$(T^*Tx)_{3n+i} \overset{1)}{=} (\dot{Tx})_{n+i} \overset{2)}{\simeq} \ddot{x}_i \quad : T^*TE \to \mathbb{R} \quad ,$$

$\forall\ 1 \leq i \leq n$,

date da

$$\hat{\check{x}}^i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) = x^i(p)$$

$$\hat{\dot{x}}^i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) = \langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle$$

---

1) Si osservi che $(\dot{Tx})_i$ ($\forall\ 1 \leq i \leq 2n$) è ottenuto eseguendo l'operazione "$\cdot$" su $(Tx)_i$ e non la proiezione i-ma su $(\dot{Tx})$, perché $(\dot{Tx})$ non ha significato.

2) La notazione corretta è $(\dot{Tx})_i$ e $(\dot{Tx})_{n+i}$, invece il simbolo $\dot{\check{x}}_i$ e $\ddot{x}_i$ è un abuso di linguaggio, in quanto $\check{x}_i$ non dipende solo da "ν" e $\dot{x}^i$ non dipende solo da " $\cdot$ " .

$$\dot{\check{x}}_i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) = \Gamma^k_{ij}(p)<Dx^j(p),\bar{u}> <\underline{\omega},\delta x_k(p)> +< \underline{\nu},\delta x_i(p) >$$

$$\ddot{x}_i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) =< \underline{\omega} ,\delta x_i(p)> \quad ,$$

$\forall\ (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \in T^*TE$.

D. E'

$$\hat{\check{x}}^i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \equiv (x^i \circ p_E \circ q_{TE})(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) = x^i(p) \ .$$

$$\hat{\dot{x}}^i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \equiv (\dot{x}^i \circ q_{TE})(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) =< Dx^i(p),\bar{u} >$$

$$\dot{\check{x}}_i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \equiv <(\underline{\nu},\underline{\omega}),\delta\check{x}_i(p,\bar{u})>=$$
$$=\Gamma^k_{ij}(p)<Dx^j(p),\bar{u}><\underline{\omega},\delta x_k(p)> + < \underline{\nu},\delta x_i(p)>$$

$$\ddot{x}_i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \equiv <(\underline{\nu},\underline{\omega}),\delta\dot{x}_i(p,\bar{u})> = <\underline{\omega}, \delta x_i(p)> \quad \underline{\cdot}$$

5.7.17. Dunque, possiamo esprimere ogni elemento $(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \in T^*_{(p,\bar{u})}TE$ nella base

$$\{d\check{x}^1(p,\bar{u}),\ldots,d\check{x}^n(p,\bar{u});d\dot{x}^1(p,\bar{u}),\ldots,d\dot{x}^n(p,\bar{u})\}$$

di $T^*_{(p,\bar{u})}TE$.

PROPOSIZIONE

E'

$$(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) =\Gamma^k_{ij}(p) <Dx^j(p),\bar{u}><\underline{\omega},\delta x_k(p)>d\check{x}^i(p,\bar{u})+< \underline{\nu},\delta x_i(p)> d\check{x}^i(p,\bar{u}) +$$

$+ < \underline{\omega}, \delta x_i(p) > d\dot{x}^i(p,\bar{u})$.

D. Posto $TE \equiv F$, $(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \equiv (q,\underline{z}) \in T^*_q F$, $(\check{x}^i,\dot{x}^i) \equiv y^i$, allora il risultato segue dalla nota relazione

$$(q,\underline{z}) \equiv <\underline{z},\delta y_i(q)> \; dy^i(q) \quad \underline{.}$$

5.7.18. Diamo ora il sistema di coordinate su T^*T^*E, indotto da x.

PROPOSIZIONE

La 2-applicazione cotangente di x

$$T^*T^*x : T^*T^*E \to \mathbb{R}^{4n}$$

data da

$$T^*T^*x : (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \mapsto (T^*x(p,\underline{u}),(\underline{\nu},\bar{w})\circ D(T\overset{*}{x})^{-1}(T^*x(p,\underline{u})) \,)$$

è un sistema di coordinate su T^*T^*E di classe $\mathcal{C}^\infty$ $\underline{.}$

Per ottenere l'espressione esplicita di T^*T^*x, in termini di funzioni coordinate, procediamo nel modo seguente.

5.7.10. PROPOSIZIONE. E'

$$T^*T^*x = ((\widehat{T^*x})^1,\ldots,(\widehat{T^*x})^n,(\widehat{T^*x})_{n+1};(\widehat{T^*x})_{2n};(\dot{T^*x})_1,\ldots,(\dot{T^*x})_n,(\dot{T^*x})^{n+1},\ldots,(\dot{T^*x})^{2n} \;)$$

$$\simeq(\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^n \;,\; \hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n;\; \dot{\hat{x}}_1,\ldots,\dot{\hat{x}}_n,\ddot{x}^1,\ldots,\ddot{x}^n \;) \;.$$

Dunque, le funzioni coordinate di T^*T^*x sono le 4n applicazioni differenziabili

$$(T^*T^*x)^i = (\widehat{T^*x})^i = \hat{x}^i \qquad : T^*T^*E \to \mathbb{R}$$

$$(T^*T^*x)_{n+i} = (\widehat{T^*x})_{n+i} = \hat{x}_i \qquad : T^*T^*E \to \mathbb{R}$$

$$(T^*T^*x)_{2n+i} \overset{1)}{=} (\dot{T^*x})_i \overset{2)}{\cong} \dot{\hat{x}}_i \qquad : T^*T^*E \to \mathbb{R}$$

$$(T^*T^*x)^{2n+i} \overset{1)}{=} (\dot{T^*x})^{n+i} \overset{2)}{\cong} \ddot{x}^i \qquad : T^*T^*E \to \mathbb{R} \ ,$$

$\forall\ 1 \leq i \leq n$,

$$\hat{x}^i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = x^i(p)$$

$$\hat{x}_i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = < \underline{u},\delta x_i(p)>$$

$$\dot{\hat{x}}_i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = -\Gamma^k_{ij}(p)<Dx^j(p),\bar{w}><\underline{u},\delta x_k(p)> + < \underline{\nu},\delta x_i(p) >$$

$$\ddot{x}^i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = < Dx^i(p),\bar{w} > ,$$

$\forall (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \in T^*T^*E$.

---

1) si osservi che $(\dot{T^*x})_i$ ($\forall$ $1\leq i \leq 2n$) è ottenuto eseguendo l'operazione "$\cdot$" su $(T^*x)_i$ e non la proiezione i-ma su $(\dot{T^*x})$, poiché $(\dot{T^*x})$ non ha significato.

2) La notazione corretta è $(\dot{T^*x})_i$ e $(\dot{T^*x})_{n+i}$, invece il simbolo $\dot{\hat{x}}_i$ e $\ddot{x}^i$ è un abuso di linguaggio, poiché $\hat{x}^i$ non dipende solo da "$\wedge$" e $\dot{x}_i$ non dipende solo da "$\cdot$" .

D. E'

$$\hat{x}^i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \equiv (x^i \circ q_E \circ q_{T^*E})(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = x^i(p)$$

$$\hat{\dot{x}}^i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \equiv (x_i \circ q_{T^*E})(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = < \underline{u},\delta x_i(p)>$$

$$\dot{\hat{x}}_i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \equiv <(\underline{\nu},\bar{w}),\delta\hat{x}_i(p,\underline{u})> \overset{1)}{=}$$

$$= -\Gamma_{ij}^k(p)<Dx^j(p),\bar{w}><\underline{u},\delta x_k(p)> + < \underline{\nu},\delta x_i(p)>$$

$$\ddot{x}^i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \equiv <(\underline{\nu},\bar{w}), \delta\dot{x}_i(p,\underline{u})> \overset{2)}{=} <Dx^i(p),\bar{w}> \qquad \underline{\cdot}$$

5.7.20. Dunque, possiamo esprimere ogni elemento $(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w})\epsilon T^*_{(p,\underline{u})}T^*E$ nella base

$$\{d\hat{x}^1(p,\underline{u}),\dots,d\hat{x}^n(p,\underline{u});\ d\dot{x}_1(p,\underline{u}),\dots,\ d\dot{x}_n(p,\underline{u})\}$$

di $T^*_{(p,\underline{u})}T^*E$.

PROPOSIZIONE

E'

$$(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = -\Gamma_{ij}^k(p)<Dx^j(p),\bar{w}> <\underline{u},\delta x_k(p)>d\hat{x}^i(p,\underline{u}) + <\underline{\nu},\delta x_i(p)>d\hat{x}^i(p,\underline{u}) +$$

$$+ <Dx^i(p),\bar{w}>\ d\dot{x}_i(p,\underline{u}) \quad .$$

D. Posto $T^*E \equiv F,(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \equiv (q,\underline{z})\epsilon\ T^*_qF$, $(\hat{x}^i,\dot{x}_i) \equiv y^i$,

---

1) (5.5.12.) .

2) (5.5.13.) .

allora il risultato segue dalla nota relazione

$$(q,\underline{z}) \equiv \langle \underline{z}, \delta y_i(q) \rangle \; dy^i(q) \qquad \underline{\cdot}$$

5.7.21. E' interessante lo studio del sistema di coordinate su νTTE, indotto da x.

PROPOSIZIONE

L'applicazione

$$\nu TTx \equiv \hat{p}^3 \circ TTx \circ j \; : \nu TTE \to TTE \to \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{3n}$$

è un sistema di coordinate sullo spazio verticale νTTE di classe $\mathcal{C}^\infty$ (dove $\hat{p}^3 : \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{3n}$ è l'applicazione data da

$$\hat{p}^3(\lambda,\mu;\xi,\eta) \equiv (\lambda,\mu,\eta), \qquad \forall(\lambda,\mu;\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{4n} ,$$

e dove $j : \nu TTE \to TTE$ è l'inclusione naturale) .

D. L'applicazione νTTx così definita è una biiezione, la cui inversa è $(\nu TTx)^{-1} = j^{-1} \circ (TTx)^{-1} \circ (\hat{p}^3)^{-1} : \mathbb{R}^{3n} \to \nu TTE$.

Inoltre, νTTx e $(\nu TTx)^{-1}$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$, essendo le relative composizioni costituite da applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$ $\underline{\cdot}$

Dunque, le funzioni coordinate di νTTx sono le 3n applicazioni differenziabili

$$(\check{x}^1,..,\check{x}^n , \dot{x}^1,..,\dot{x}^n , \ddot{x}^1,..,\ddot{x}^n)$$

date da

$$\overset{\vee}{x}^i(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = x^i(p)$$

$$\dot{\overset{\vee}{x}}^i(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = < Dx^i(p),\bar{u} >$$

$$\ddot{x}^i(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = < Dx^i(p),\bar{w} > \quad ,$$

$\forall\ (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \in \nu TTE$.

5.7.22. Possiamo, quindi, esprimere ogni elemento $(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \in \nu T_{(p,\bar{u})}TE$ nella base $\{\partial\dot{x}_1(p,\bar{u}),\dots,\partial\dot{x}_n(p,\bar{u})\}$ di $\nu T_{(p,\bar{u})}TE$.

Dunque, da 5.7.4. segue che

$$(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = <Dx^i(p),\bar{w}>\partial\dot{x}_i(p,\bar{u}) \ .$$

5.7.23. E' interessante anche lo studio del sistema di coordinate su oT^*TE, indotto da x.

PROPOSIZIONE

L'applicazione

$$oT^*Tx \equiv \hat{p^4} \circ T^*Tx \circ j^* : oT^*TE \to \mathbb{R}^{3n}$$

è un sistema di coordinate sullo spazio orizzontale oT^*TE, di classe $\mathcal{C}^\infty$ (dove $\hat{p^4} : \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{3n}$ è l'applicazione data da

$$\hat{p^4}(\lambda,\mu\,;\xi,\eta)\equiv(\lambda,\mu,\xi)\ ,\ \forall(\lambda,\mu;\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{4n}\ ,$$

e dove $j^*: oT^*TE \to T^*TE$ è l'applicazione naturale) .

D. L'applicazione oT^*Tx così definita è una biiezione, la cui inversa è $(oT^*Tx)^{-1} = (j^*)^{-1} \circ (T^*Tx)^{-1} \circ (\hat{p^4})^{-1} : \mathbb{R}^{3n} \to o\,T^*TE$.

Inoltre oT^*Tx e $(oT^*Tx)^{-1}$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$, essendo le relative composizioni costituite da applicazioni di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Dunque, le funzioni coordinate di oT^*Tx sono le 3n applicazioni differenziabili

$$(\hat{\check{x}}^1,\ldots,\hat{\check{x}}^n\ ,\ \hat{\dot{x}}^1,\ldots,\hat{\dot{x}}^n,\ \ \dot{\check{x}}_1,\ldots,\dot{\check{x}}_n\ )$$

date da

$$\hat{\check{x}}^i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) = x^i(p)$$

$$\hat{\dot{x}}^i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) = \langle\, Dx^i(p),\bar{u}\,\rangle$$

$$\dot{\check{x}}_i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) = \langle\, \underline{\nu},\delta x_i(p)\rangle\ \ ,$$

$\forall(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) \in o\,T^*TE$.

5.7.24. Possiamo, quindi, esprimere ogni elemento $(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) \in oT^*_{(p,\bar{u})}TE$ nella base

$$\{d\check{x}^1(p,\bar{u}),\ldots,d\check{x}^n(p,\bar{u})\}$$

di $oT^*_{(p,\bar{u})}TE$.

Dunque, da 5.7.10 segue che

$$(p,\bar{u};\nu,o) = \underline{\nu},\delta x_i(p) > d\check{x}^i(p,\bar{u})$$

8 CALCOLO DELLA METRICA

0 Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione n. Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e siano $B \equiv \{\delta x_1,..,\delta x_n\}$ e $B^* \equiv \{Dx^1,..,Dx^n\}$ le basi, indotte da x, per i campi di vettori e di covettori su E, l'una duale dell'altra.

Possiamo applicare anche su $\underline{g}$ le solite regole algebriche con le basi B e B^*. Dunque si possono rivedere, in termini matriciali, tutte le nozioni del 4° capitolo, espresse mediante basi qualsiasi.

Le matrici (g_{ij}) e (g^{hk}) date, quindi, da

$$g_{ij} \equiv \delta x_i \cdot \delta x_j \qquad , \; g^{hk} \equiv Dx^h \cdot Dx^k \quad ,$$

che sono l'una inversa dell'altra, sono molto interessanti poiché sono utilizzate per l'espressione e per il calcolo in coordinate dei campi $\underline{g}$ e $\bar{g}$, della funzione metrica g e della co-funzione metrica g^*, delle applicazioni $\underset{\sim}{g}$ e $\tilde{g}$, ecc... .

Si noti che la connessione affine Γ non dipende dalla metrica (è definita anche se E non è euclideo), ma solo dalla struttura affine, anche se la sua espressione in coordinate, può essere data in modo tale da far comparire le matrici (g_{ij}) e (g^{hk}). Ciò dipende dal fatto che i simboli di Christoffel possono essere espressi anche tramite la derivata delle componenti di un qualsiasi campo tensoriale costante del 2° ordine, simmetrico e non degenere. La simmetria permette lo scambio degli indici delle matrici (g_{ij}) e (g^{hk}), la proprietà "non degenere" permette il passaggio dalla matrice (g_{ij}) alla sua inversa.

5.8.1. PROPOSIZIONE Sia $\underline{g} : E \to \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$ e $\bar{g} : E \to \bar{E} \otimes \bar{E}$ il campo tensoriale metrico covariante e controvariante, rispettivamente.

Allora è

$$\underline{g} = g_{ij} Dx^i \otimes Dx^j$$

$$\bar{g} = g^{hk} \, \delta x_h \otimes \delta x_k$$

dove

$$g_{ij} \equiv \underline{g}(\delta x_i, \delta x_j) \equiv \delta x_i \cdot \delta x_j : E \to \mathbb{R}$$

$$g^{hk} \equiv \bar{g}(Dx^h, Dx^k) \equiv Dx^h \cdot Dx^k : E \to \mathbb{R} \,.$$

In termini di campi tensoriali applicati, abbiamo anche

$$\underline{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

$$\bar{g} = g^{hk} \, \partial x_h \otimes \partial x_k$$

dove

$$g_{ij} \equiv \underline{g}(\partial x_i, \partial x_j) \equiv \partial x_i \cdot \partial x_j = \delta x_i \cdot \delta x_j : E \to \mathbb{R}$$

$$g^{hk} = \bar{g}(dx^h, dx^k) \equiv dx^h \cdot dx^k = Dx^h \cdot Dx^k : E \to \mathbb{R} \,.$$

Dunque, è anche

$$\hat{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \,, \quad \hat{g}^{-1} = g^{hk} \partial x_h \otimes \partial x_k \,\dot{-}$$

5.8.2. Allora, poiché $\underline{g}$ e $\bar{g}$ sono simmetrici ricordiamo i seguenti risultati.

COROLLARIO

E'

$$g_{ij} = g_{ji} \quad , \; g^{hk} = g^{kh} \; .$$

Inoltre è

$$(g^{hk}) = (g_{hk})^{-1}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \qquad \dot{-}$$

5.8.3. Scriviamo ora le relazioni che permettono di esprimere ogni campo vettoriale in forma controvariante o in forma covariante. Scriviamo, inoltre, il prodotto scalare di due campi di vettori e di covettori.

PROPOSIZIONE Si considerino i campi $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{T}E$, $\underline{X}, \underline{Y} \in {}^*E$

dati da

$$\bar{X} = X^i \partial x_i \qquad , \; \underline{X} = X_j dx^j$$

$$\bar{Y} = \underline{Y}^h \partial x_h \qquad , \; \underline{Y} = Y_k dx^k \quad .$$

Allora è

$$X^i = g^{ij} X_j$$

$$X_j = g_{ji} X^i \quad .$$

Inoltre è

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = g_{ih} X^i Y^h$$

$$\underline{X} \cdot \underline{Y} = g^{jk} \, X_j Y_k \qquad \dot{-}$$

5.8.4. Ricordiamo che è

$$\underline{\eta} = \sqrt{\det(g_{ij})} \;\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

dove il numero reale non nullo $\sqrt{\det(g_{ij})}$ è la misura orientata del poliedro costituito dai vettori, nell'ordine, $\partial x_1, \ldots, \partial x_n$.

Ossia è

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \underline{\eta}(\partial x_1, \ldots, \partial x_n) \quad .$$

5.8.5. Esprimiamo ora in coordinate le applicazioni $\underset{\sim}{g}$ e $\tilde{g}$.

PROPOSIZIONE Si considerino le applicazioni

$$\underset{\sim}{g} : \nu TTE \to oT^*TE \qquad , \qquad \tilde{g} : oT^*TE \to \nu TTE$$

date da $\underset{\sim}{g} : (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\underline{w},\underline{o})$, $\quad \tilde{g}:(p,\bar{u};\underline{v},\underline{o}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{v})$.

Allora è

$$\underset{\sim}{g} = \check{g}_{ij} d\dot{x}^i \otimes d\check{x}^j$$

$$\tilde{g} = \check{g}^{ji} \quad \partial\check{x}_j \otimes \partial\dot{x}_i \qquad .$$

D. Il seguente diagramma

$$
\begin{tikzcd}
\nu T_{(p,\bar{u})}TE \arrow[r] \arrow[d, "\underset{\sim}{g}"'] & T_pE \arrow[d, "\underline{g}"] \\
oT^*_{(p,\bar{u})}TE \arrow[r] & T^*_pE
\end{tikzcd}
$$

dato da

$$
\begin{tikzcd}
(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\underset{\sim}{g}"'] & (p,\bar{w}) \arrow[d, mapsto, "\underline{g}"] \\
(p,\bar{u};\underline{w},\underline{o}) \arrow[r, mapsto] & (p,\underline{w})
\end{tikzcd}
$$

è commutativo. Inoltre, poiché è

$$< dx^i, \partial x_j > = \delta^i_j \quad ,$$

allora, per gli isomorfismi canonici

$$\nu T_{(p,\bar{u})}TE \approx T_pE \quad , \quad oT^*_{(p,\bar{u})}TE \approx T^*_pE$$

è anche

$$<d\dot{x}^i, \partial\check{x}_j> = o \quad , \quad <d\dot{x}^i, \partial\dot{x}_j> = \delta^i_j$$

$$<d\check{x}^i, \partial\check{x}_j> = \delta^i_j \quad , \quad <d\check{x}^i, \partial\dot{x}_j> = o \quad .$$

Ora, essendo

$$(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) =< Dx^i(p),\bar{w}> \partial\dot{x}_i(p,\bar{u}) \quad ,$$

$(p,\bar{u};\underline{w},\underline{o}) = \langle \underline{w}, \delta x_j(p)\rangle \; d\check{x}^j(p,\bar{u})$,

proviamo l'asserto. E'

$$\underset{\sim}{g}(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = \check{g}_{ij}(p,\bar{u})d\dot{x}^i(p,\bar{u}) \otimes d\check{x}^j(p,\bar{u})(\langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle \partial\dot{x}_i(p,\bar{u}) =$$

$$= g_{ij}(p) \langle Dx^i(p),\bar{w} \rangle d\check{x}^j(p,\bar{u}) = \langle \underline{w},\delta x_j(p)\rangle \; d\check{x}^j(p,\bar{u}) .$$

E'

$$\tilde{g}(p,\bar{u};\underline{w},\underline{o}) = \check{g}^{ji}(p,\bar{u})\partial\check{x}_j(p,\bar{u}) \otimes \partial\dot{x}_i(p,\bar{u})(\langle \underline{w},\delta x_j(p)\rangle d\check{x}^j(p,\bar{u}) \;) =$$

$$= g^{ji}(p)\langle \underline{w},\delta x_j(p)\rangle \; \partial\dot{x}_i(p,\bar{u}) = \langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle \partial\dot{x}_i(p,\bar{u}) \quad \underline{\cdot}$$

5.8.6. Diamo ora l'espressione in coordinate della funzione metrica g e della co-funzione metrica g^* .

PROPOSIZIONE Si consideri la funzione metrica

$$g : TE \to \mathbb{R}$$

data da
$$g : (p,\bar{u}) \mapsto \frac{1}{2}\, \underline{g}(p)(\bar{u},\bar{u}) \equiv \frac{1}{2}\, \bar{u} \cdot \bar{u} \quad .$$

Allora è

$$g = \frac{1}{2}\, \check{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \quad .$$

Si consideri la co-funzione metrica

$$g^* : T^*E \to \mathbb{R}$$

data da $\qquad g^*:(p,\underline{u}) \mapsto \frac{1}{2}\,\bar{g}(p)(\underline{u},\underline{u}) \equiv \frac{1}{2}\;\underline{u}\cdot\underline{u}$.

Allora è

$$g^* = \frac{1}{2}\,\hat{g}^{hk}\,\dot{x}_h\,\dot{x}_k$$

D. Per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$g(p,\bar{u}) = \left(\frac{1}{2}\,g_{ij}(p)Dx^i(p)\otimes Dx^j(p)\right)(\bar{u},\bar{u}) = \frac{1}{2}\,g_{ij}(p)\langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle\langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,\check{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\right)(p,\bar{u}) \quad .$$

Per ogni $(p,\underline{u}) \in T^*E$, è

$$g^*(p,\underline{u}) = \left(\frac{1}{2}\,g^{hk}(p)\delta x_h(p)\otimes\delta x_k(p)\right)(\underline{u},\underline{u}) = \frac{1}{2}\,g^{hk}(p)\langle\underline{u},\delta x_h(p)\rangle\langle\underline{u},\delta x_k(p)\rangle =$$

$$=\left(\frac{1}{2}\,\hat{g}^{hk}\,\dot{x}_h\,\dot{x}_k\right)(p,\underline{u}) \qquad \dot{-}$$

5.8.7. COROLLARIO

E'

$$\dot{g} = \frac{1}{2}\,(\partial x_h\cdot\check{\check{g}}_{ij})\dot{\check{x}}^h\check{\ddot{x}}^i\check{\dot{x}}^j + \check{\check{g}}_{ij}\check{\dot{x}}^i\,\ddot{x}^j \quad .$$

D. E'

$$\dot{g} \equiv Dg = \frac{1}{2}(\partial x_h\cdot\check{\check{g}}_{ij})\,\dot{\check{x}}^h\check{\ddot{x}}^i\check{\ddot{x}}^j + \frac{1}{2}\,\check{g}_{ij}\ddot{x}^i\check{\dot{x}}^j + \frac{1}{2}\,\check{\check{g}}_{ij}\check{\dot{x}}^i\ddot{x}^j =$$

$$= \frac{1}{2}(\partial x_h\cdot\check{\check{g}}_{ij})\check{\dot{x}}^h\check{\ddot{x}}^i\dot{x}^j + \check{g}_{ij}\check{\dot{x}}^j\ddot{x}^j \qquad \dot{-}$$

5.8.8. La seguente proposizione è importante perché fornisce le relazioni tra le funzioni coordinate di Tx e le funzioni coordinate di T^*x.

PROPOSIZIONE

$\forall\ 1 \leq i \leq n$, è

$$\text{(a)} \begin{cases} \hat{x}^i \circ \hat{g} = \check{x}^i \\ \dot{x}_i \circ \hat{g} = \check{g}_{ij}\dot{x}^j = \partial\dot{x}_i.g \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \check{x}^i \circ \hat{g}^{-1} = \hat{x}^i \\ \dot{x}^i \circ \hat{g}^{-1} = \hat{g}^{ij}\dot{x}_j = \partial\dot{x}^i.g^* \end{cases} .$$

D. Dimostriamo le relazioni (a). Per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$(\hat{x}^i \circ \hat{g})(p,\bar{u}) = x^i(p) = \check{x}^i(p,\bar{u}) ,$$

$$(\dot{x}_i \circ \hat{g})(p,\bar{u}) = \langle \underline{u}, \delta x_i(p)\rangle = g_{ij}(p)\langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle = (\check{g}_{ij}\dot{x}^j)(p,\bar{u}) ,$$

inoltre, derivando l'espressione di g, è

$$\partial\dot{x}_i.g = \frac{1}{2}\check{g}_{ij}\dot{x}^j + \frac{1}{2}\check{g}_{ij}\dot{x}^i = \check{g}_{ij}\dot{x}^j .$$

Dimostriamo le relazioni (b). Per ogni $(p,\underline{u}) \in T^*E$, è

$$(\check{x}^i \circ \hat{g}^{-1})(p,\underline{u}) = x^i(p) = \hat{x}^i(p,\underline{u}) ,$$

$$(\dot{x}^i \circ \hat{g}^{-1})(p,\underline{u}) = \langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle = g^{ij}\langle \underline{u}, \delta x_j(p)\rangle = (\hat{g}^{ij}\dot{x}_j)(p,\underline{u}) ,$$

inoltre, derivando l'espressione di g^*, è

$$\partial\dot{x}^i.g^* = \frac{1}{2}\hat{g}^{ij}\dot{x}_j + \frac{1}{2}\hat{g}^{ij}\dot{x}_i = \hat{g}^{ij}\dot{x}_j \quad \dot{-}$$

5.8.9. La seguente proposizione è importante perché fornisce le relazioni tra le funzioni coordinate di TTx e le funzioni coordinate di TT^*x.

PROPOSIZIONE

$\forall\ 1 \leq i \leq n$, è

$$(a)\quad \begin{cases} \check{\hat{x}}^i \circ T\hat{g} = \check{x}^i \\ \check{\dot{x}}_i \circ T\hat{g} = \check{g}_{ij}\check{\dot{x}}^j = (\partial \check{\dot{x}}_i . g) \\ \dot{\hat{x}}^i \circ T\hat{g} = \dot{\check{x}}^i \\ \ddot{x}_i \circ T\hat{g} = (\partial x_k . \check{g}_{ij})\check{\dot{x}}^k \check{\dot{x}}^j + \check{g}_{ij}\ddot{x}^j \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} \check{x}^i \circ T\hat{g}^{-1} = \check{\hat{x}}^i \\ \check{\dot{x}}^i \circ T\hat{g}^{-1} = \hat{g}^{ij}\dot{x}_j = (\partial \check{\dot{x}}^i . g^*) \\ \dot{\check{x}}^i \circ T\hat{g}^{-1} = \dot{\hat{x}}^i \\ \ddot{x}^i \circ T\hat{g}^{-1} = (\partial x_k . \hat{g}^{ij})\dot{\hat{x}}^k \check{\dot{x}}_j + \check{\hat{g}}^{ij}\ddot{x}_j \end{cases}$$

D. Sia $f : E \to F$ un'applicazione $\mathcal{C}^\infty$. Sia $y^i : F \to \mathbb{R}^m$ un sistema di coordinate su F, di classe $\mathcal{C}^\infty$. Ricordiamo le relazioni

$$(c)\quad \begin{cases} \check{y}^i \circ Tf = \check{f}^i \\ \dot{y}^i \circ Tf = (\partial x_j . \check{f}^i)\dot{x}^j \end{cases}$$

dove $f^i \equiv y^i \circ f$.

Allora le relazioni (a) si ottengono da (c) ponendo

$f \equiv \hat{g}$ e $y^i \equiv (\hat{x}^i, \dot{x}_i)$; invece le relazioni (b) sono ottenute ponendo

$f \equiv \hat{g}^{-1}$ e $y^i \equiv (\check{x}^i, \dot{x}^i)$ $\underline{\cdot}$

5.8.10. Concludiamo questo interessante paragrafo con l'espressio̲ne in coordinate dei simboli di Christoffel .

PROPOSIZIONE Si consideri il generico simbolo di Christoffel

$$\Gamma^k_{ij} \equiv D\delta x_i (Dx^k, \delta x_j) = -D^2 x^k (\delta x_i, \delta x_j) \quad .$$

Allora è

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kh} (\partial x_i . g_{hj} + \partial x_j . g_{ih} - \partial x_h . g_{ij}) \quad .$$

Tale relazione è detta UGUAGLIANZA DI CHRISTOFFEL .

D. Sia $\underline{g} = g_{ij} Dx^i \otimes Dx^j$ il campo tensoriale metrico costante del 2° ordine, simmetrico e non degenere. Allora, è

$$o = D\underline{g} = (\partial x_h . g_{ij}) Dx^h \otimes Dx^i \otimes Dx^j - g_{ij} \Gamma^i_{hk} Dx^h \otimes Dx^k \otimes Dx^j - g_{ij} \Gamma^j_{hk} Dx^i \otimes Dx^h \otimes Dx^k =$$

$$= (\partial x_h . g_{ij} - g_{kj} \Gamma^k_{hi} - g_{hk} \Gamma^k_{ij}) \, Dx^h \otimes Dx^i \otimes Dx^j \ .$$

Dunque è

(a) $\qquad \partial x_h \cdot g_{ij} - g_{kj}\Gamma^k_{hi} - g_{hk}\Gamma^k_{ij} = o \qquad .$

Posto

$$\Gamma_{h,ij} \equiv g_{hk}\ \Gamma^k_{ij} \qquad , \qquad \text{(forma covariante)}$$

poiché $\underline{g}$ è non degenere, è anche

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kh}\ \Gamma_{h,ij} \qquad \text{(forma controvariante)} \ .$$

Dalla relazione (a) segue

(b) $\qquad \Gamma_{j,hi} + \Gamma_{h,ij} = \partial x_h \cdot g_{ij}$

e permutando gli indici è anche

(c) $\qquad \Gamma_{i,jh} + \Gamma_{j,hi} = \partial x_j \cdot g_{hi}$

(d) $\qquad \Gamma_{h,ij} + \Gamma_{i,jh} = \partial x_i \cdot g_{hj} \ .$

Queste tre relazioni esprimono la condizione affinché risulti $D\underline{g} = o$.

Dunque, sommando algebricamente le relazioni b),c),d) e ricordando che $\underline{g}$ è simmetrico, è

$$\Gamma_{h,ij} = \frac{1}{2}\left(\partial x_i \cdot g_{hj} + \partial x_j \cdot g_{ih} - \partial x_h \cdot g_{ij}\right)$$

ovvero

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kh}(\partial x_i . g_{hj} + \partial x_j . g_{ih} - \partial x_h . g_{ij}) \qquad \dot{-}$$

Si noti che la connessione affine Γ non dipende dalla metrica (è definita anche se E non è euclideo), ma solo dalla struttura affine, anche se la sua espressione in coordinate è stata data in modo da far comparire le matrici (g_{ij}) e (g^{hk}). Ciò dipende dal fatto che i simboli di Christoffel possono essere espressi anche tramite la derivata delle componenti di un qualsiasi campo tensoriale costante del 2° ordine, simmetrico e non degenere.

9 CAMBIAMENTO DI COORDINATE

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n. Siano $x \equiv (x^1,..,x^n) : E \to \mathbb{R}^n$ e $y \equiv (y^1,...,y^n) : E \to \mathbb{R}^n$ due sistemi di coordinate su E, di classe $\mathcal{C}^\infty$. Siano, inoltre, $B \equiv \{\delta x_1,...,\delta x_n\}$, $B' \equiv \{\delta y_1,...,\delta y_n\}$ e $B^* \equiv \{Dx^1,...,Dx^n\}$, $B'^* \equiv \{Dy^1,...,Dy^n\}$ basi, rispettivamente, per i campi di vettori e di covettori su E, indotte da x e y, le une duali delle altre.

Parte di questo paragrafo è stato svolto, più in generale, precedentemente (5.3.). In tal caso daremo, semplicemente, i risultati.

Sono molto interessanti le "matrici jacobiane"$(\partial x_j . y^i)$, $(\partial y_i . x^j)$ l'una inversa dell'altra, che permettono il passaggio da un sistema di coordinate all'altro. Più precisamente, la matrice $(\partial x_j . y^i)$ lega gli elementi delle basi B^* e B'^*, mentre $(\partial y_i . x^j)$ lega gli elementi delle basi B e B'.

Dunque, possiamo dare le relazioni tra le funzioni coordinate di Tx e Ty, di T^*x e T^*y ecc... .

Molto interessante è la relazione che lega i simboli di Christoffel dati nei due sistemi di coordinate x e y.

Si noti un meccanismo pratico mnemonico.

5.9.1. PROPOSIZIONE

E'

$$Dy^i = (\partial x_j . y^i) Dx^j$$

$$\delta y_i = (\partial y_i . x^j) \delta x_j \quad .$$

Dunque, è anche

$$dy^i = (\partial x_j . y^i) dx^j$$

$$\partial y_i = (\partial y_i . x^j) \partial x_j \quad ,$$

dove

$$\partial x_j . y^i = \langle Dy^i, \delta x_j \rangle = \langle dy^i, \partial x_j \rangle = \dot{y}^i \circ \partial x_j = \dot{x}_j \circ dy^i \equiv D_1(y^i \circ x_j)_o$$

$$\partial y_i . x^j = \langle Dx^j \ \delta y_i \rangle = \langle dx^j, \partial y_i \rangle = \dot{x}^j \circ \partial y_i = \dot{y}_i \circ dx^j \equiv D_1(x^j \circ y_i)_o \quad \dot{-}$$

Le matrici

$$(\partial x_j . y^i) \quad , \quad (\partial y_i . x^j)$$

sono dette MATRICI JACOBIANE dei cambiamenti di coordinate relativamente alle basi indotte da tali coordinate.

Si noti che tali matrici sono l'una inversa dell'altra perché i due cambiamenti di coordinate sono l'uno inverso dell'altro.

Nel capitolo successivo daremo le loro espressioni esplicite nei vari sistemi di coordinate cartesiano,sferico, cilindrico.

5.9.2. Dunque possiamo dare le relazioni tra le n funzioni coordinate $\dot{x}^1,..,\dot{x}^n$ di T x e le n funzioni coordinate $\dot{y}^1,..\dot{y}^n$ di T y.

PROPOSIZIONE

E' $\quad \dot{x}^j = (\partial y_i \overset{\vee}{.} x^j)\dot{y}^i \quad , \quad \dot{y}^i = (\partial x_j \overset{\vee}{.} y^i)\dot{x}^j \quad \dot{-}$

5.9.3. Dunque possiamo dare le relazioni tra le n funzioni coordinate $\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n$ di T^*x e le n funzioni coordinate $\dot{y}_1,\ldots,\dot{y}_n$ di T^*y .

PROPOSIZIONE

E'

$$\dot{x}_j = (\partial x_j \overset{\wedge}{.} y^i)\dot{y}_i \quad , \quad \dot{y}_i = (\partial y_i \overset{\wedge}{.} x^j)\dot{x}_j \quad \dot{-}$$

5.9.4. Dunque possiamo dare le relazioni tra le $3n$ funzioni coordinate $\overset{\vee}{\dot{x}}{}^1,\ldots\overset{\vee}{\dot{x}}{}^n$, $\overset{\smile}{\dot{x}}{}^1,\ldots\overset{\smile}{\dot{x}}{}^n$, $\ddot{x}^1,\ldots\ddot{x}^n$ di TTx e le $3n$ funzioni coordinate $\overset{\vee}{\dot{y}}{}^1,\ldots,\overset{\vee}{\dot{y}}{}^n$, $\overset{\smile}{\dot{y}}{}^1,\ldots,\overset{\smile}{\dot{y}}{}^n$, $\ddot{y}^1\ldots,\ddot{y}^n$ di TTy .

PROPOSIZIONE

E'
$$\begin{cases} \overset{\vee}{\dot{y}}{}^i = (\partial x_j \overset{\vee}{.} y^i)\ \overset{\vee}{\dot{x}}{}^j \\ \overset{\smile}{\dot{y}}{}^i = (\partial x_j . y^i)\overset{\smile}{\dot{x}}{}^j \\ \ddot{y}^i = (\partial x_k . \partial x_j \overset{\vee}{.} y^i)\overset{\smile}{\dot{x}}{}^k \overset{\vee}{\dot{x}}{}^j + (\partial x_j . y^i)\ddot{x}^j \end{cases} \quad .$$

D. Infatti, per ogni $(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE$, è

$$\overset{\vee}{\dot{y}}{}^{i}(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \langle Dy^{i}(p),\bar{u}\rangle = (\partial x_{j}.y^{i})(p)\ \langle Dx^{j}(p),\bar{u}\rangle =$$

$$= [\ (\partial x_{j}.y^{i})\overset{\vee}{\dot{x}}{}^{j}\ ](p,\bar{u};\bar{v},\bar{w})\ ;$$

$$\dot{\check{y}}^{i}(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \langle Dy^{i}(p),\bar{v}\rangle = (\partial x_{j}.y^{i})(p)\ \langle Dx^{j}(p),\ \bar{v}\rangle =$$
$$= [\ (\partial \check{x}_{j}.y^{i})\dot{\check{x}}^{j}\ ](p,\bar{u};\bar{v},\bar{w})\ ;$$

$$\ddot{y}^{i}(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = D^{2}y^{i}(p)(\bar{u},\bar{v}) + Dy^{i}(p)(\bar{w}) = [\ D((\partial x_{j}.y^{i})\,Dx^{j})(p)](\bar{u},\bar{v}) +$$

$$+ Dy^{i}(p)(\bar{w}) =$$

$$=((\partial x_{k}.\partial x_{j}.y^{i})(p)Dx^{k}(p) \otimes Dx^{j}(p))(\bar{u},\bar{v})+(\partial x_{j}.y^{i})(p)D^{2}x^{j}(p)(\bar{u},\bar{v})+$$

$$+ (\partial x_{j}.y^{i})(p)Dx^{j}(p)(\bar{w}) =$$

$$=((\partial x_{k}.\partial \check{x}_{j}.y^{i})\overset{\vee}{\dot{x}}{}^{k}\dot{\check{x}}^{j} + (\partial \check{x}_{j}.y^{i})\ddot{x}^{j})\ (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \qquad \underline{\cdot}$$

Studiamo ora alcuni casi di applicazioni differenziabili .

1) CASO $f : \mathbb{R} \to E$.

5.9.5. PROPOSIZIONE Sia f una curva differenziabile.

Allora è

$$D(y^{i} \circ f) = (\partial x_{j}.y^{i}) \circ f\ D(x^{j} \circ f)$$

D. E' un caso particolare di 5.3.8. $\underline{\cdot}$

2) CASO $f : E \to \mathbb{R}$.

5.9.6. PROPOSIZIONE Sia f una funzione differenziabile .

Allora è

$$\partial x_j.f = (\partial x_j.y^i)(\partial y_i.f) \quad .$$

D. Infatti è

$$\partial x_j.f = (\partial x_j.f)(\partial y_i.y^i) = (\partial x_j.y^i)(\partial y_i.f) \quad \dot{-}$$

5.9.7. Troviamo ora la relazione che lega i simboli di Christoffel nei due sistemi di coordinate .

PROPOSIZIONE Si considerino i generici simboli di Christoffell

$$'\Gamma^j_{hk} \equiv D\delta y_h(Dy^j,\ \delta y_k) \quad , \quad \Gamma^i_{\ell m} \equiv D\delta x_\ell(Dx^i, \delta x_m) \ .$$

Allora è

$$'\Gamma^j_{hk} = \Gamma^i_{\ell m}(\partial x_i.y^j)(\partial y_h.x^\ell)(\partial y_k.x^m)+(\partial x_i.y^j)(\partial y_h\partial y_k.x^i) \quad .$$

D. E'

$$'\Gamma^j_{hk} \equiv D((\partial y_h.x^\ell)\delta x_\ell)((\partial x_i.y^j)Dx^i,\ (\partial y_k.x^m)\delta x_m) =$$

$$=[\ (\partial y_k.\partial y_h.x^\ell)Dy^k \times \delta x_\ell+(\partial y_h.x^\ell)D\delta x_\ell]((\partial x_i.y^j)Dx^i,(\partial y_k.x^m)\ \delta x_m) =$$

$$=[\ (\partial y_k.\partial y_h.x^i)Dy^k \otimes \delta x_i+(\partial y_h.x^\ell)D\delta x_\ell]\ (\partial x_i.y^j)Dx^i,(\partial y_k.x^m)\delta x_m) =$$

$$= (\partial x_i.y^j)(\partial y_h.\partial y_k.\ x^i)(\partial x_m.y^k)(\partial y_k.x^m) +$$

$$+ (\partial x_i . y^j)(\partial y_h . x^\ell)(\partial y_k . x^m) D\delta x_\ell (Dx^i, \delta x_m) =$$

$$= \Gamma^{\,i}_{\ell m} (\partial x_i . y^j)(\partial y_h . x^\ell)(\partial y_k . x^m) + (\partial x_i . y^j)(\partial y_h . \partial y_k . x^i) \quad \dot{-}$$

Si noti che la trasformazione dei simboli di Christoffel (che sono le componenti di Γ) non è lineare, in quanto Γ non è un tensore su E ma su TE.

5.9.8. Concludiamo il paragrafo con la relazione tra le matrici della metrica nei due sistemi di coordinate.

PROPOSIZIONE Si considerino

$$g'_{ij} \equiv \underline{g}(\delta y_i, \delta y_j) \equiv \delta y_i \cdot \delta y_j \quad , \; g_{hk} \equiv \underline{g}(\delta x_h, \delta x_k) \equiv \delta x_h \cdot \delta x_k \, .$$

Allora è

$$g'_{ij} = (\partial y_i . x^h)(\partial y_j . x^k) g_{hk} \quad .$$

D. Infatti è

$$g'_{ij} \equiv \delta y_i \cdot \delta y_j = [(\partial y_i . x^h)\delta x_h] \cdot [(\partial y_j . x^k)\delta x_k] =$$

$$= (\partial y_i . x^h)(\partial y_j . x^k) g_{hk} \quad \dot{-}$$