0 INTRODUZIONE

Finora l'oggetto principale del nostro lavoro è stata la nozione di spazio affine E, di dimensione finita.

Ora, introduciamo la nuova struttura di "spazio affine euclideo", ottenuta fissando in $\bar{E}$ una moltiplicazione scalare.

Questo nuovo concetto è fondamentale, costituendo una tappa importante per la costruzione di un modello matematico dello spazio fisico, cioé, per una formulazione assiomatica della Geometria Euclidea.

Questa nuova struttura induce, in modo naturale, gli isomorfismi tra $\bar{E}^*$ ed $\bar{E}$, permettendo, così, l'identificazione degli elementi di $\bar{E}^*$ con elementi del duale di $\bar{E}$. Allora, è possibile definire l'isomorfismo di "Legendre" tra gli spazi TE e T^*E.

Tale applicazione è un isomorfismo di fibrato, ossia induce una biiezione tra le basi ed un isomorfismo tra le fibre.

La metrica induce anche un isomorfismo tra il fibrato dei vettori verticali e quello dei covettori orizzontali.

Si potrebbero definire altri isomorfismi, ma non sarebbero generalizzabili al caso delle varietà differenziabili.

In questo capitolo definiamo,anche, altre applicazioni importanti (per esempio, la "funzione metrica", la"co-funzione metrica", il "differenziale verticale", ...).

In Meccanica, la funzione metrica assume il ruolo di "energia cinetica", mentre l'isomorfismo di Legendre stabilisce l'equivalenza tra l'espressione di moto sullo spazio delle "fasi" (equazioni di Lagrange) e delle "cofasi" (equazioni di Hamilton).

Tutte le nozioni qui introdotte sulla metrica sono facilmente generalizzabili alle varietà differenziabili.

1 METRICA

0 Sia E uno spazio affine, di dimensione finita.

In questo paragrafo, introduciamo la nuova struttura di "spazio affine euclideo" ottenuta fissando in $\bar{E}$ una moltiplicazione scalare $\underline{g}$, ossia un tensore simmetrico non degenere, del 2° ordine .

Dopo aver ricordato alcune nozioni introdotte nel capitolo o, definiamo l'importante "isomorfismo di Legendre".

Tale applicazione viene trasportata, mediante l'applicazione tangente, sugli spazi affini TTE e TT^*E.

La metrica induce anche gli isomorfismi $\underset{\sim}{g}$ e $\tilde{g}$ tra lo spazio verticale νTTE e lo spazio orizzontale oT^*TE, l'uno inverso dell'altro.

Tali applicazioni si estendono, dunque, alle varietà differenziabili.

Definiamo poi la "funzione metrica" $g : TE \to \mathbb{R}$ la quale, in Meccanica, assume il ruolo di "energia cinetica".

In Meccanica, invece, l'isomorfismo di Legendre stabilisce l'equivalenza tra lo spazio delle "fasi" (equazioni di Lagrange) e delle "cofasi" (equazioni di Hamilton).

La funzione metrica g permette di definire il suo "differenziale verticale" $d_v g$.

Diamo poi una proposizione che sarà importante in seguito, in quanto permetterà di esprimere in coordinate la connessione affine Γ , mediante la metrica. Tale proposizione diventa, nel caso delle varietà differenziabili, la definizione di "connessione(riemanniana o) metrica".

Precisiamo infine, conformemente alle nuove notazioni, l'isomorfismo di Hodge che mette in relazione i volumi dei sottospazi di dimensione p di E con i volumi dei sottospazi ortogonali di dimensione $n-p$, con $p < n$, (se $\dim E = n$) .

4.1.1. DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO AFFINE EUCLIDEO ogni coppia

$$(E, \underline{g})$$

dove

- E è uno spazio affine, di dimensione finita .
- $\underline{g} \in \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$ è un tensore simmetrico non degenere, del 2° ordine .

Si dice che lo spazio affine è PROPRIAMENTE EUCLIDEO se $\underline{g}$ è definita positiva .

D'ora in poi, scriveremo E al posto di $(E,\underline{g})$, se non ci sarà pericolo di confusione.

Sia, dunque, E uno spazio affine euclideo, di dimensione finita.

Ricordiamo alcune nozioni introdotte all'inizio.

4.1.2. Il tensore

$$\underline{g} \in \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$$

è detto TENSORE METRICO (COVARIANTE) .

Esso è identificato alla forma bilineare $\underline{g} \in L^2(E) \cong E^* \otimes E^*$, data da

$$\underline{g}(\bar{u},\bar{v}) \equiv \bar{u} \cdot \bar{v}, \qquad \forall\ \bar{u},\bar{v} \in \bar{E}\ .$$

4.1.3. Il tensore

$$\bar{g} \in \bar{E} \otimes \bar{E}$$

dato da

$$\bar{g}(\underline{u},\underline{v}) \equiv \underline{u} \cdot \underline{v} \quad , \qquad \forall\ \underline{u},\underline{v} \in \bar{E}^{*}\ ,$$

è detto TENSORE METRICO (CONTROVARIANTE) .

4.1.4. Il tensore metrico induce gli isomorfismi

1)
$$'\underline{g} : \bar{E} \to \bar{E}^{*}$$

dato da
$$'\underline{g} : \bar{x} \mapsto \underline{x}$$

dove

$$\langle \underline{x},\bar{v} \rangle \equiv \bar{x} \cdot \bar{v} \quad , \qquad \forall\ \bar{v} \in \bar{E}\ .$$

2)
$$'\bar{g} : \bar{E}^{*} \to \bar{E}$$

dato da

$$'\bar{g} : \underline{x} \mapsto \bar{x}$$

dove

$$\langle \bar{x},\underline{\nu} \rangle \equiv \underline{x} \cdot \underline{\nu} \quad , \qquad \forall\ \underline{\nu} \in \bar{E}^{*}\ .$$

Dunque, è

$$('\underline{g})^{-1} = {}'\bar{g} \quad .$$

I tensori metrici controvariante e covariante sono legati tra loro dalla relazione

$$\bar{g} = T('\underline{g}^{-1},{}'\underline{g}^{-1})(\underline{g}) \quad .$$

4.1.5. DEFINIZIONE

Dicesi CAMPO TENSORIALE METRICO LIBERO COVARIANTE (risp. CONTROVARIANTE) l'applicazione costante (indicata con lo stesso simbolo)

$$\underline{g} : E \to \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$$

data da $\underline{g} : p \mapsto \underline{g}$

(risp. $\bar{g} : E \to \bar{E} \otimes \bar{E}$

data da $\bar{g} : p \mapsto \bar{g}$).

Dicesi CAMPO TENSORIALE METRICO APPLICATO COVARIANTE (risp. CONTROVARIANTE) l'applicazione (indicata con lo stesso simbolo)

$$\underline{g} : E \to T_2E$$

data da $\underline{g} : p \mapsto (p,\underline{g})$

(risp. $\bar{g} : E \to T^2E$

data da $\bar{g} : p \mapsto (p,\bar{g})$).

4.1.6. Dopo aver ricordato alcune nozioni, introduciamo l'importante "isomorfismo di Legendre".

DEFINIZIONE

Dicesi ISOMORFISMO DI LEGENDRE l'applicazione

$$\hat{g}: TE \to T^*E$$

data da $\hat{g}: (p,\bar{u}) \mapsto (p,\underline{u})$

dove

$$\underline{u} \equiv {}'\underline{g}(\bar{u}) .$$

Dunque, tale isomorfismo è una estensione di $'\underline{g}$. Tale applicazione è un isomorfismo di fibrati, ossia induce una biiezione tra le basi ed un'isomorfismo tra le fibre.

L'isomorfismo di Legendre viene trasportato, mediante l'applicazione tangente, agli spazi affini TTE e TT^*E. Dunque, abbiamo l'applicazione

$$T\hat{g}: TTE \to TT^*E$$

data da
$$T\hat{g}: (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\underline{u};\bar{v},\underline{w}) \; .$$

4.1.7. La metrica induce anche un isomorfismo tra il fibrato dei vettori verticali e quello dei covettori orizzontali. Altri isomorfismi analoghi potrebbero essere definiti, ma non sarebbero generalizzabili al caso delle varietà differenziabili.

DEFINIZIONE

Indichiamo con $\underset{\sim}{g}$ l'applicazione

$$\underset{\sim}{g} : \nu TTE \to o T^*TE$$

data da
$$\underset{\sim}{g} : (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\; \underline{w},\underline{o}) \qquad .$$

Indichiamo con $\tilde{g}$ l'applicazione inversa

$$\tilde{g} : o\, T^*TE \to \nu TTE$$

data da
$$\tilde{g} : (p,\bar{u};\; \underline{v},\underline{o}) \mapsto (p,\bar{u};\; \bar{o},\bar{v}) \qquad .$$

4.1.8. Introduciamo ora la " funzione metrica" g la quale, in Meccanica, assume il ruolo di "energia cinetica".

DEFINIZIONE

Dicesi FUNZIONE METRICA l'applicazione differenziabile

$$g : TE \to \mathbb{R}$$

data da
$$g : (p,\bar{u}) \mapsto \frac{1}{2}\, \underline{g}\,(p)(\bar{u},\bar{u}) \equiv \frac{1}{2}\,\bar{u}\cdot\bar{u} \quad .$$

Dicesi CO-FUNZIONE METRICA l'applicazione differenziabile

$$g^* : T^*E \to \mathbb{R}$$

data da
$$g^* : (p,\underline{u}) \mapsto \frac{1}{2}\,\bar{g}(p)(\underline{u},\underline{u}) \equiv \frac{1}{2}\,\underline{u}\cdot\underline{u} \quad .$$

Dunque, è
$$g^* = g \circ \hat{g}^{-1}$$

$$g = g^* \circ \hat{g} \quad .$$

Si noti che è
$$\dot{g}\,(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \bar{u}\cdot\bar{w} \quad , \forall\,(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE \; .$$

4.1.9. DEFINIZIONE Sia $g : TE \to \mathbb{R}$ la funzione metrica.

Dicesi DIFFERENZIALE VERTICALE di g l'applicazione

$$d_V g : TE \to o\, T^*TE$$

data da
$$d_V g : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\underline{u},o) \quad .$$

4.1.10. Le precedenti applicazioni sono legate tra loro mediante i seguenti diagrammi .

$$\begin{tikzcd}
 & TE & \\
\nu TTE \arrow[ur, "p_{TE}"] \arrow[rr, dashed, "\underset{\sim}{g}"] \arrow[d, "\pi"'] & & oT^*TE \arrow[ul, "q_{TE}"'] \arrow[d, "\pi"] \\
TE \arrow[rr, "\hat{g}"] \arrow[dr, "p_E"'] & & T^*E \arrow[dl, "q_E"] \\
 & E &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & TE \arrow[dl, "\bar{V}"'] \arrow[dr, "d_v g"] \arrow[d, phantom, "g"] & \\
\nu TTE \arrow[rr, "\underset{\sim}{g}"'] \arrow[dr, "\dot{g}"'] & {} & oT^*TE \arrow[dl, "{<,>}"] \\
 & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

4.1.11. La seguente proposizione sarà importante perché permetterà di esprimere, in coordinate, la connessione affine Γ tramite la metrica. Inoltre, questa proposizione diventa, nel caso delle varietà differenziabili, la definizione di "connessione (riemanniana o) metrica".

PROPOSIZIONE

E'

1) $D\underline{g} = o$.

2) $\dot{g} \circ \urcorner = o$,

dove $\urcorner$ è l'applicazione

$$\urcorner : TTE \to oTTE$$

data da $$\urcorner : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{v},\bar{o}) \quad .$$

3) $\dot{g} \circ \Gamma = \dot{g}$,

dove Γ è la connessione affine

$$\Gamma : TTE \to \nu TTE$$

data da

$$\Gamma : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \quad .$$

D.

1) Ovvia, essendo $\underline{g}$ costante.

2) $(\dot{g} \circ \daleth)(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \dot{g}(p,\bar{u};\bar{v},\bar{o}) = \bar{u} \cdot \bar{o} = o \quad , \forall(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE.$

3) $(\dot{g} \circ \Gamma)(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \dot{g}(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{w} = \dot{g}(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \quad , \quad \forall(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE$

4.1.12. Continuando il riassunto di alcune nozioni introdotte all'inizio, conformemente alle nuove notazioni, ricordiamo che indichiamo con

$$\underline{\eta} \in \Lambda^n \bar{\bar{E}}^*$$

la FORMA VOLUME UNITARIA (se dim E = n) .

4.1.13. Diamo, allora, la seguente definizione .

DEFINIZIONE

Dicesi CAMPO TENSORIALE LIBERO DELLE FORME VOLUME UNITARIE l'applicazione costante (indicata ancora con lo stesso simbolo)

$$\underline{\eta} : E \to \Lambda^n \bar{\bar{E}}^*$$

data da $\quad \underline{\eta} : p \mapsto \underline{\eta} \quad .$

Dicesi CAMPO TENSORIALE APPLICATO DELLE FORME VOLUME UNITARIE l'applicazione (indicata ancora con lo stesso simbolo)

$$\underline{\eta} : E \to \Lambda_n E$$

data da $\quad \underline{\eta} : p \mapsto (p,\underline{\eta}) \quad .$

4.1.14. Infine, indichiamo ancora con $*$ l'applicazione

$$* : \Lambda_p E \to \Lambda_{n-p} E$$

data da

$$* : (p,\underline{t}) \mapsto (p, i_{\bar{t}}\, \underline{\eta})$$

detta ISOMORFISMO DI HODGE. Tale isomorfismo gode della proprietà

$$** \equiv (-1)^{p(n-p)} \quad , \text{con} \quad p < n \; .$$

Inoltre, tale isomorfismo induce delle tecniche di calcolo, indispensabili per poter definire alcuni operatori differenziali (per esempio il "rotore", la "divergenza", ecc...) .

Ricordiamo anche la forma volume unitaria

$$\bar{\eta} \in \Lambda^n \bar{E}$$

mediante la quale si definiscono i relativi campi delle forme volume unitarie liberi ed applicati.