0 INTRODUZIONE

Uno "spazio affine" è un qualsiasi insieme su cui operano gli elementi di uno spazio vettoriale, detti "vettori liberi", tramite le cosiddette "traslazioni". Sostanzialmente esso è uno spazio vettoriale, dove si è tolto il privilegio del vettore nullo: quindi, in un tale spazio tutti i punti sono "equivalenti".

La nozione di "spazio affine" è alla base di una visione moderna della geometria euclidea. Infatti, un modello semplice ed elegante della geometria euclidea può essere costituito da uno spazio affine con una forma bilineare simmetrica definita positiva.

La nozione di spazio affine è parimenti alla base di una visione moderna della fisica classica e relativistica. Infatti, possiamo rappresentare gli spazi degli eventi, delle posizioni, degli istanti, ecc... mediante spazi affini.

Nelle esposizioni più tradizionali dell'analisi, della geometria e della fisica, al posto degli spazi affini si usano spazi vettoriali o più in particolare $\mathbb{R}^n$. Noi riteniamo più soddisfacente il nostro punto di vista sotto vari aspetti. Infatti, non privilegiando punti o direzioni particolari, o basi particolari, possiamo centrare gli aspetti sostanziali delle ulteriori nozioni che andremo ad introdurre, senza fare uso di elementi spuri. Per esempio, possiamo trattare le applicazioni geometriche della teoria senza fare uso di sistemi di coordinate e le applicazioni fisiche senza fare uso dei sistemi di riferimento.

In questo capitolo, dopo la nozione di spazio affine, si danno le principali regole di calcolo con le quali si caratterizzano gli elementi di tale spazio.

Diamo, quindi, il concetto di "dimensione" di uno spazio affine, tra mite quella del suo spazio vettoriale.

Definiamo poi i "sottospazi affini", come i sottoinsiemi di uno spazio affine, che conservano ancora tale struttura.

Si osservi che la nozione di spazio "prodotto cartesiano" permetterà di introdurre gli spazi tangenti e cotangenti di uno spazio affine.

Dato uno spazio affine $(E,\bar{E},\tau)$, definiamo lo "spazio tangente" TE di E nel modo seguente

$$TE \equiv E \times \bar{E} = \bigcup_{p \in E} T_p\bar{E}$$

dove $T_p\bar{E}$ è "lo spazio vettoriale dei vettori applicati in p".

Facciamo notare che TE ha una struttura naturale di spazio affine.

Diamo, quindi, le nozioni di "fibrato tangente e cotangente" di E. Ad esempio, definiamo il fibrato tangente di E come una terna

$$\tau E \equiv (TE\ ,\ p_E,\ E\ )$$

dove $p_E : TE \to E$, data da $p_E: (p,\bar{u}) \mapsto p$, è detta "proiezione".

Le nozioni precedenti saranno iterate, poi, nel 3° paragrafo.

Nel 4° paragrafo, diamo la nozione di campo di vettori e covettori "liberi" ed "applicati".

A tale proposito si consiglia il lettore di leggere la relativa introduzione, in modo da avere chiara la differenza sostanziale tra i termini "libero" ed "applicato".

Relativamente agli insiemi dei campi tensoriali si considerano, poi, delle opportune operazioni con le quali è possibile munire tali insiemi di una struttura di spazio vettoriale.

Facciamo, infine, un notevole esempio di campo tensoriale.

Un punto importante di questo capitolo è rappresentato, senz'altro, dai "sottospazi verticali ed orizzontali", rispettivamente, dello spazio tangente e cotangente di un fibrato banale $\eta \equiv (E \times \bar{F}, \pi, E)$.

Sostanzialmente, il sottospazio verticale $\nu\, T(E\times\bar{F}) \equiv (E\times\bar{F})\times(\bar{o}\times\bar{F})$ di $T(E\times\bar{F})$ è quel sottospazio affine di $T(E\times\bar{F})$, ottenuto bloccando gli incrementi dei punti di E e considerando solo incrementi dei vettori applicati. Osserviamo, allora, che questo sottospazio continua ad esistere sulle "sottovarietà" e sulle "varietà differenziabili"in quanto ha senso confrontare incrementi del vettore nello stesso punto di applicazione. Questo è il motivo per cui diamo più importanza a tale spazio che a quello orizzontale su $T(E\times\bar{F})$.

Invece, il sottospazio orizzontale $\circ\, T^*(E\times\bar{F})\equiv(E\times\bar{F}) \times (\bar{E}^*\times\underline{o})$ di $T^*(E\times\bar{F})$ è lo spazio affine i cui punti sono costituiti dai covettori di $E\times\bar{F}$, che si annullano sui "vettori verticali". Quindi, anche questo sottospazio continua ad esistere sulle varietà differenziabili.

Si osservi che il sottospazio orizzontale $_\circ\, T(E\times\bar{F})\equiv(E\times\bar{F}) \times (\bar{E}\times\bar{o})$ di $T(E\times\bar{F})$ è il supplementare di $\nu T(E\times\bar{F})$ e che il sottospazio verticale $\nu\, T^*(E\times\bar{F})\equiv(E\times\bar{F}) \times (\underline{o}\times\bar{F}^*)$ è il supplementare di $\circ\, T^*(E\times\bar{F})$.

Un maggior approfondimento su queste nozioni, si possono avere leggendo le note riportate nel 6° paragrafo.

Naturalmente, possiamo applicare i risultati precedenti al caso in cui $\bar{F} \equiv \bar{E}$, o $\bar{F} \equiv \bar{E}^*$.

Introduciamo anche le applicazioni Γ e Π dette rispettivamente "connessione affine" e "proiezione naturale". Mentre π è estendibile al caso delle varietà differenziabili, in quanto dipende dalla sola struttura "differenziabile", l'applicazione Γ è una nuova struttura di "connessione" che bisogna aggiungere a quella differenziabile, affinché i sottospazi $\circ T(Ex\bar{F})$ e $\nu T^*(Ex\bar{F})$ abbiano significato anche nel caso delle varietà differenziabili.

Infine, terminiamo questo capitolo dedicando l'ultimo paragrafo alle importanti nozioni di "rilevamento" di funzioni e campi.

Esse possono essere estese al caso delle varietà differenziabili. Inoltre, si riveleranno utili nella trattazione dei sistemi di coordinate sugli spazi tangenti, cotangenti, ecc... .

1 SPAZI AFFINI

0 La prima nozione fondamentale che si incontra è quella di "spazio affine".

In questo paragrafo ne diamo la definizione e le sue primissime conseguenze.

Introduciamo, poi, la "dimensione" di uno spazio affine, le nozioni di "sottospazio", di "quoziente" di uno spazio affine.

Concludiamo, quindi, facendo vedere che il "prodotto cartesiano" di più spazi affini è uno spazio affine.

I.1.1. DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO AFFINE una terna $(E,\bar{E},\tau)$, dove

- E è un insieme, detto lo "spazio dei punti",
- $\bar{E}$ è uno spazio vettoriale, detto lo "spazio vettoriale dei vettori liberi",
- τ è un'applicazione, detta "traslazione"

$$\tau : E \times \bar{E} \to E$$

così indicata $\qquad \tau :(p,\bar{u}) \mapsto p+\bar{u}$

la quale gode delle seguenti proprietà:

E_1) $p + (\bar{u}+\bar{v}) = (p+\bar{u}) + \bar{v} \qquad \forall\, p \in E,\ \bar{u},\bar{v} \in \bar{E};$

E_2) $p + \bar{o} = p \qquad \forall\, p \in E,\ \bar{o} \in \bar{E}\ ;$

E_3) $p+\bar{u} = p \Rightarrow \bar{u} = \bar{o} \qquad$ se $p \in E,\ \bar{u} \in \bar{E}\ ;$

E_4) $\forall\, p \in E \Rightarrow \{p+\bar{u}\}_{\bar{u} \in \bar{E}} = E$ $\dot{-}$

Si vede poi facilmente che, se E_1 vale per un certo p, allora essa vale per ogni $p \in E$.

L'applicazione

$$\tau_{\bar{u}} : E \to E$$

così indicata $\quad \tau_{\bar{u}} : p \mapsto p+\bar{u}$

dicesi "traslazione secondo il vettore $\bar{u}$" .

In seguito, indicheremo uno spazio affine, più semplicemente, con E.

Si badi bene a non confondere lo spazio affine E con lo spazio vettoriale euclideo, indicato con lo stesso simbolo.

I.1.2. PROPOSIZIONE Sia $\bar{u} \in \bar{E}$.

L'applicazione $\tau_{\bar{u}}$ è una biiezione e la biiezione inversa è $\tau_{-\bar{u}}$, ossia è

$$\tau_{\bar{u}} \circ \tau_{-\bar{u}} = id_E = \tau_{-\bar{u}} \circ \tau_{\bar{u}} \quad .$$

D. $\forall \; p \in E$ è

- $\quad (\tau_{\bar{u}} \circ \tau_{-\bar{u}})(p) = \tau_{\bar{u}}(\tau_{-\bar{u}}(p))=\tau_{\bar{u}}(p+(-\bar{u})) = (p+(-\bar{u}))+\bar{u} =$

$$= p+(-\bar{u}+\bar{u}) = p+\bar{o} = p \; ;$$

- $\quad (\tau_{-\bar{u}} \circ \tau_{\bar{u}})(p)=\tau_{-\bar{u}}(\tau_{\bar{u}}(p)) = \tau_{-\bar{u}}(p+\bar{u}) = (p+\bar{u}) + (-\bar{u}) =$

$$\equiv p+(\bar{u}-\bar{u}) = p+\bar{o} = p \quad \underline{.}$$

Sostanzialmente, detti $p,q \in E$, se da p si va a q tramite l'unico $\bar{u}$, allora da q si va a p tramite l'unico $-\bar{u} \in \bar{E}$: è quan to esprime la seguente proposizione.

I.1.3. PROPOSIZIONE Siano $p,q \in E$.

Esiste un unico vettore $\bar{u} \in \bar{E}$, tale che

$$p + \bar{u} = q \quad .$$

D.

L'esistenza è assicurata dalla E_4. Si vede facilmente che tale vettore è unico.

I.1.4. Da questa proposizione discende la seguente definizione.

DEFINIZIONE Sia (p,q) una coppia ordinata di punti di E.

Dicesi DIFFERENZA di q e p l'unico vettore libero

$$\bar{u} = q-p \in \bar{E}$$

tale che $$p + \bar{u} = q \quad \dot{-}$$

I.1.5. PROPOSIZIONE Siano $p,q,r \in E$ e $\bar{u} \in \bar{E}$.

Valgono le seguenti formule:

a) $p-p = \bar{o}$

b) $p = q+(p-q)$

c) $p-q = -(q-p)$

d) $(p+\bar{u}) - q = (p-q)+\bar{u}$

e) $p-q = (p-r) + (r-q)$

f) $q-p = s-r \Rightarrow r-p = s-q \quad \dot{-}$

I.1.6. Il concetto di "dimensione" di uno spazio affine, dato dalla seguente definizione, è importante ed ha un significato profondo, in quanto permette di caratterizzare ogni punto di E con un'unica n-pla di numeri reali. Pertanto, esso risulterà più chiaro allorché introdurremo i sistemi di coordinate su E, ossia, allorché identificheremo punti di E con n-ple di $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE

Si dice che E ha DIMENSIONE n, se $\bar{E}$ ha dimensione n.

I.1.7. Diamo ora un particolare esempio di spazio affine.

PROPOSIZIONE

Ogni spazio vettoriale V è uno spazio affine, assumendo, come spazio vettoriale dei vettori liberi, V stesso ed assumendo, come traslazione, l'applicazione somma vettoriale

$$\tau : V \times V \to V$$

data da
$$\tau : (\bar{u},\bar{v}) \mapsto \bar{u} + \bar{v}$$

I.1.8. DEFINIZIONE Sia $F \subset E$ un sottoinsieme di E.

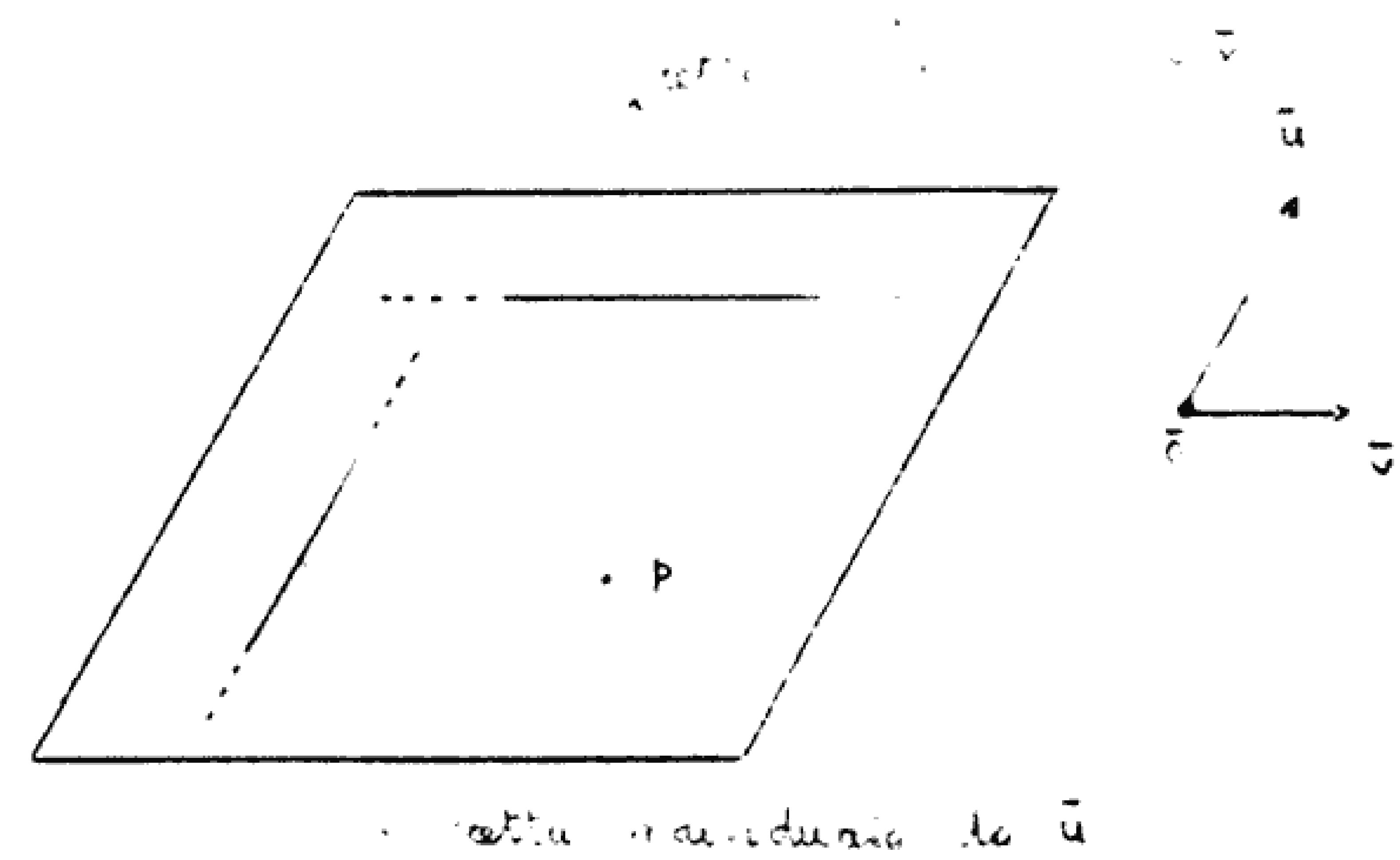
Si dice che F è un SOTTOSPAZIO AFFINE di E se esiste un punto $p \in E$ ed un sottospazio vettoriale $\bar{F} \subset \bar{E}$, tali che

$$F = \{ p + \bar{u} \}_{\bar{u} \in \bar{F}}$$

Si vede che è $\dim F \leq \dim E$.

Per esempio, se $(E, \bar{E} \equiv \{\bar{u},\bar{v},\bar{o}\}, \tau)$ è un piano dello spazio generico, allora i sottospazi affini più importanti di E sono:

1) retta individuata da $\bar{u}$
2) " " " $\bar{v}$
3) ciascun punto p di E, individuato dal vettore nullo.



I.1.9. Diamo, ora, l'importante nozione di spazio "prodotto cartesiano" la quale servirà, per esempio, nello studio degli spazi "tangenti", "cotangenti", ecc... di uno spazio affine.

PROPOSIZIONE Siano $E_1,\ldots,E_n$ spazi affini.

L'insieme "prodotto cartesiano"

$$E \equiv E_1 \times \ldots \times E_n$$

ha una struttura canonica di spazio affine, assumendo, come spazio vettoriale dei vettori liberi, il prodotto

$$\bar{E} \equiv \bar{E}_1 \times \ldots \times \bar{E}_n$$

ed assumendo, come traslazione, l'applicazione

$$\tau : E \times \bar{E} \to E$$

data da $$\tau : (p_1,\ldots,p_n ; \bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n) \mapsto (p_1+\bar{u}_1,\ldots,p_n+\bar{u}_n) .$$

D.

E' una immediata conseguenza delle definizioni di spazio affine e di prodotto.

E'

$$\dim E = \dim E_1 + \ldots + \dim E_n \quad .$$

I.1.10. PROPOSIZIONE . Sia $\bar{F} \subset \bar{E}$ un sottospazio vettoriale di $\bar{E}$.

La terna

$$(E\ ,\ \bar{E}\ ,\ \tau)_{/\bar{F}} = (E/\bar{F}\ ,\ \bar{E}/\bar{F},\ \tau')$$

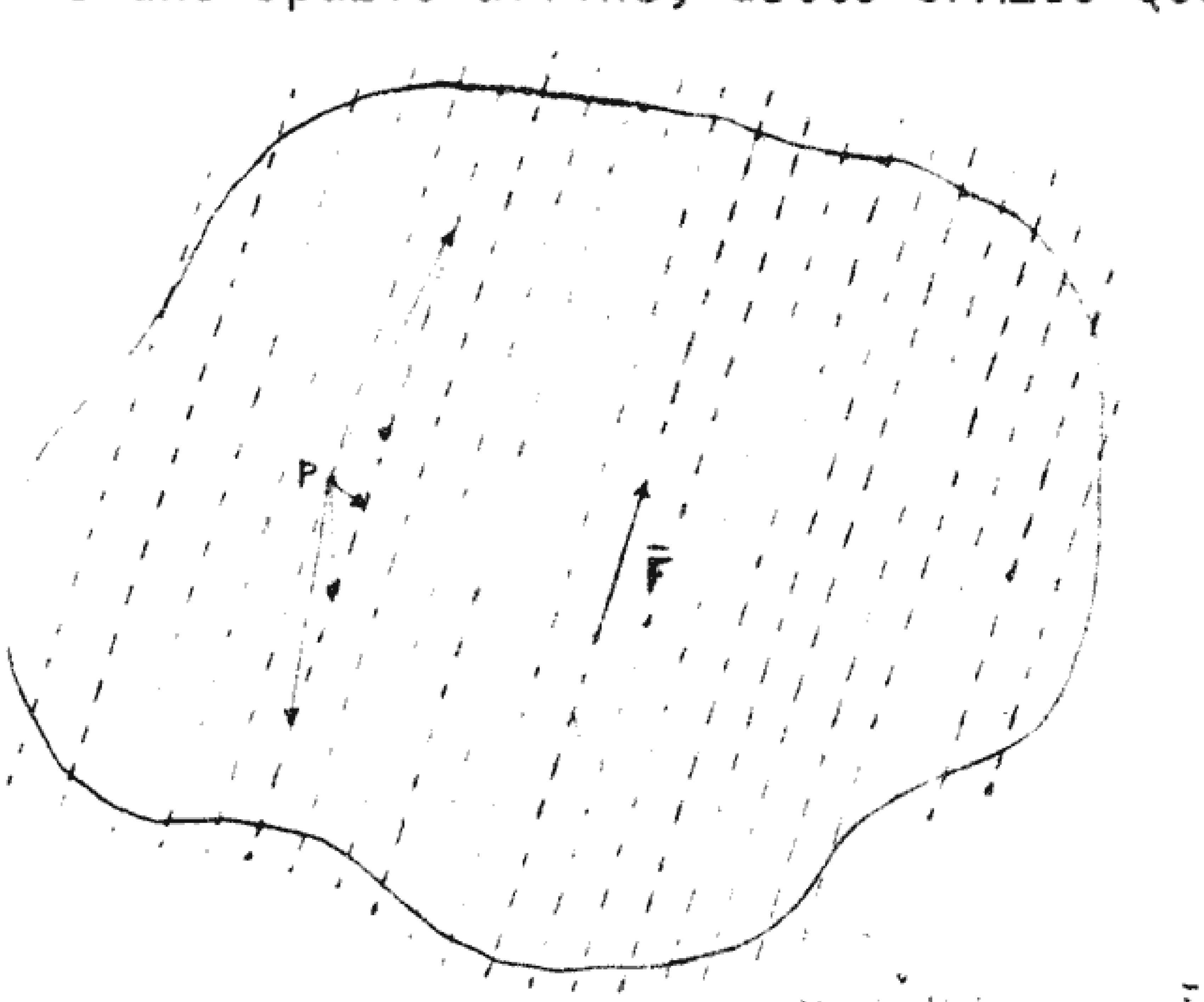
dove

- $E/\bar{F} \equiv \{[\ p\ ]\}_{p \in E} \equiv \{p + \bar{F}\}_{p \in E}$

- $\bar{E}/\bar{F} = \{[\ \bar{u}\ ]\}_{\bar{u} \in \bar{E}} \equiv \{\bar{u} + \bar{F}\}_{\bar{u} \in E}$

- $\tau' : E/\bar{F} \times \bar{E}/\bar{F} \rightarrow E/\bar{F}$ data da $\tau'([\ p\ ]+[\ \bar{u}\ ]) = [\ p+\bar{u}\ ]$

è uno spazio affine, detto SPAZIO QUOZIENTE di E, rispetto ad $\bar{F}$.



Se è $\dim \bar{F} = 1$, ossia se $\bar{F}$ è un qualsiasi vettore libero di $\bar{E}$, allora ogni classe d'equivalenza di $E/\bar{F}$ è costituita da punti di E, tali che la loro differenza sia un vettore libero "parallelo" ad $\bar{F}$. Sicché ogni elemento di $E/\bar{F}$ è una "retta parallela" a quella individuata da $\bar{F}$. Gli elementi di ogni classe d'equivalenza di $\bar{E}/\bar{F}$ sono vettori liberi che "congiungono" punti di una retta con punti di un'altra retta. Inoltre τ' è ben definita perché è indipendente dalla scelta dei rappresentanti della classe.

Si vede che

$$\dim E/\bar{F} = \dim E - \dim F\ .$$

dove F è il sottospazio affine di E, il cui spazio vettoriale dei vettori liberi è $\bar{F}$.

2 SPAZI TANGENTE E COTANGENTE

Sia E uno spazio affine.

Cominciamo questo paragrafo con il concetto di "spazio vettoriale dei vettori applicati" in un punto $p \in E$. Tenendo conto che in E tutti i punti sono equivalenti, evidentemente questo spazio vettoriale viene a coincidere proprio con $\bar{E}$. Se adesso consideriamo l'insieme costituito da tutte le coppie $(p,\bar{u})$ $(\forall\, p \in E \;, \forall\, \bar{u} \in \bar{E})$ si vede che esso è uno spazio affine (e non vettoriale) detto "spazio tangente" di E. Analogo discorso lo possiamo fare per i covettori applicati. Passando, invece, alle sottovarietà di uno spazio affine e alle varietà differenziabili vedremo che occorre ragionare in modo diverso. Ciò dipende, principalmente, dal fatto che con queste ultime nozioni non possiamo parlare di equivalenza fra punti, e quindi, non è possibile confrontare vettori applicati in punti diversi. Nasce, così, l'esigenza di introdurre ulteriori strumenti matematici(connessione...) in modo da permettere un tale confronto.

Concludiamo questo paragrafo, dando delle applicazioni importanti che mettono in relazione gli spazi tangenti e cotangenti di uno spazio affine con quest'ultimo.

I.2.1. DEFINIZIONE Sia $p \in E$.

Dicesi SPAZIO VETTORIALE DEI VETTORI APPLICATI in p, o SPAZIO TANGENTE in p, l'insieme

$$T_pE \equiv \{(p,\bar{u})\}_{\bar{u} \in \bar{E}} \quad .$$

Ogni elemento di T_pE dicesi VETTORE APPLICATO in p, o VETTORE TANGENTE in p.

Dicesi SPAZIO DEI VETTORI APPLICATI, o SPAZIO TANGENTE, l'insieme

$$TE \equiv E \times \bar{E} = \bigcup_{p \in E} T_p E \; .$$

I.2.2. PROPOSIZIONE Siano $p,q \in E$.

Allora, si hanno gli isomorfismi canonici

$$T_p E \approx \bar{E} \approx T_q E$$

dati da $\qquad (p,\bar{u}) \mapsto \bar{u} \mapsto (q,\bar{u}) \qquad \forall\, \bar{u} \in \bar{E} \; .$

Ossia $T_p E$ ha una struttura naturale di spazio vettoriale.

Passando alle varietà differenziabili, tale equivalenza non sussisterà poiché non ha senso confrontare lo stesso vettore in due punti distinti. A ciò si ovvia introducendo sulle varietà una nuova struttura che "connette" vettori applicati in punti diversi.

I.2.3. Invece, TE non è, in generale, uno spazio vettoriale.

COROLLARIO

Lo spazio tangente TE, essendo un prodotto di spazi affini, ha una struttura naturale di spazio affine, assumendo, come spazio vettoriale dei vettori liberi di TE, lo spazio vettoriale

$$\overline{TE} \equiv \bar{E} \times \bar{E}$$

ed assumendo, come traslazione, l'applicazione

$$\tau : TE \times \overline{TE} \to TE$$

data da $\qquad \tau : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p+\bar{v},\bar{u}+\bar{w}) \quad .$

I.2.4. DEFINIZIONE

Dicesi FIBRATO TANGENTE di E la terna

$$\tau E \equiv (TE, p_E, E)$$

dove

- TE è lo spazio tangente,
- p_E è l'applicazione

$$p_E : TE \to E$$

così definita $\qquad p_E : (p,\bar{u}) \mapsto p$

detta "proiezione" $\quad\dot{-}$

I.2.5. La definizione duale alla I.2.1, è espressa nel modo seguente.

DEFINIZIONE Sia $p \in E$.

Dicesi SPAZIO VETTORIALE DEI COVETTORI APPLICATI in p, o SPAZIO COTANGENTE in p, l'insieme

$$T_p^* E \equiv \{p,\underline{u}\}_{\underline{u} \in \bar{E}^*} .$$

Ogni elemento di T_p^*E dicesi COVETTORE APPLICATO in p .

Dicesi SPAZIO DEI COVETTORI APPLICATI, o SPAZIO COTANGENTE, l'insieme

$$T^*E \equiv E \times \bar{E}^* = \bigcup_{p \in E} T_p^* E \quad \dot{-}$$

I.2.6. PROPOSIZIONE

Lo spazio cotangente T^*E, essendo un prodotto di spazi affini, ha una struttura naturale di spazio affine, assumendo, come spazio vettoriale dei covettori liberi di T^*E, lo spazio vettoriale

$$\overline{T^*E} \equiv \bar{E} \times \bar{E}^*$$

ed assumendo, come traslazione, l'applicazione

$$\tau : T^*E \times \overline{T^*E} \to T^*E$$

data da $$\tau : (p,\underline{u} \; ; \; \bar{v},\underline{w}) \mapsto (p+\bar{v}, \; \underline{u}+\underline{w}) \; .$$

I.2.7. DEFINIZIONE

Dicesi FIBRATO COTANGENTE di E la terna

$$\tau^*E \equiv (T^*E \; , \; q_E \; , \; E)$$

dove

- T^*E è lo spazio cotangente,
- q_E è l'applicazione

$$q_E : T^*E \to E$$

così definita $$q_E : (p,\underline{u}) \mapsto p$$

detta "proiezione" .

3 SPAZI TENSORIALI

Questo paragrafo può essere letto in un secondo momento in quanto è una generalizzazione del precedente.

Resta assegnato sempre uno spazio affine E.

Per i simboli di prodotto tensoriale si veda il Capitolo 0.

I.3.1. DEFINIZIONE

Si definisce SPAZIO TENSORIALE (risp. SPAZIO TENSORIALE ESTERNO) di E l'insieme

$$T^r_s E \equiv E \times \otimes^r_s \bar{E} \equiv E \times (\otimes^r \bar{E} \otimes^s \bar{E}^*)$$

(risp. $$\Lambda^r_s E \equiv E \times \Lambda^r_s \bar{E} \equiv E \times (\Lambda^r \bar{E} \otimes \Lambda^s \bar{E}^*)\ )\ .$$

I.3.2. PROPOSIZIONE

Lo spazio tensoriale $T^r_s E$ (risp. $\Lambda^r_s E$) è uno spazio affine, assumendo, come spazio vettoriale dei tensori liberi (risp. come spazio vettoriale dei tensori esterni liberi) lo spazio vettoriale

$$\overline{T^r_s E} \equiv \bar{E} \times \otimes^r_s \bar{E} \qquad (\text{risp. } \overline{\Lambda^r_s E} \equiv \bar{E} \times \Lambda^r_s \bar{E})$$

ed assumendo, come traslazione, l'applicazione

$$\tau : T^r_s E \times \overline{T^r_s E} \to T^r_s E$$

data da $$\tau : (p, t\ ;\ \bar{u}, \bar{t}) \mapsto (p+\bar{u}\ ,\ t+\bar{t})$$

(risp. $$\tau : \Lambda^r_s E \times \overline{\Lambda^r_s E} \to \Lambda^r_s E$$

data da $\tau : (p, t \, ; \, \bar{u}, \bar{t}) \mapsto (p+\bar{u}, \; t+\bar{t})$) .

I.3.3. DEFINIZIONE

Dicesi FIBRATO TENSORIALE di E (risp. FIBRATO TENSORIALE ESTERNO di E la terna

$$\tau^r_s E \equiv (T^r_s E, \; \tau^r_{sE}, \; E)$$

(risp. $\lambda^r_s E \equiv (\Lambda^r_s E, \; \tau^r_{sE}, \; E)$),

dove

- $T^r_s E$ è lo spazio tensoriale (risp. $\Lambda^r_s E$ è lo spazio tensoriale esterno) di E;

- τ^r_{sE} è l'applicazione, detta PROIEZIONE

$$\tau^r_{sE} : T^r_s E \to E$$

così definita $\tau^r_{sE} : (p,t) \mapsto p$

(risp. $\tau^r_{sE} : \Lambda^r_s E \to E$

così definita $\tau^r_{sE} : (p,t) \mapsto p$) .

4 CAMPI DI VETTORI E COVETTORI

0 In questo numero facciamo alcune osservazioni sull'impiego delle nozioni di campo vettoriale "libero" ed "applicato ".

Analoghe osservazioni possono essere fatte per i campi covettoriali.

Negli spazi affini, poiché tutti i punti sono"equivalenti" , si utilizza, principalmente, la prima nozione e si vede che essa è equivalente alla seconda, mediante una semplice regola.

Tale equivalenza sussiste, ancora, per un "sistema di coordinate cartesiane". Infatti, come si vedrà chiaramente nel 6° capitolo, poiché le "curve coordinate" sono delle rette, allora, la base indotta da tale sistema è costante e, quindi, non è necessario precisare il punto di applicazione.

Invece, bisogna tenerne conto quando si ha un sistema di coordinate "non cartesiano", in quanto le basi indotte dalle coordinate non sono costanti.

Infine, per le varietà differenziabili, occorre utilizzare solo la seconda nozione, in quanto la prima non ha significato .

Sia, dunque, E uno spazio affine.

1.4.1 . DEFINIZIONE

Dicesi CAMPO VETTORIALE LIBERO (risp. CAMPO COVETTORIALE LIBERO) un'applicazione

$$\bar{X}^{\ell} : E \to \bar{E}$$

così indicata $\quad \bar{X}^{\ell} : p \mapsto \bar{X}^{\ell}(p)$

(risp. $\quad \underline{X}^{\ell} : E \to \bar{E}^{*}$

così indicata $\quad \underline{X}^{\ell} : p \mapsto \underline{X}^{\ell}(p) \quad$) .

Dicesi CAMPO VETTORIALE APPLICATO (risp. CAMPO COVETTORIALE APPLICATO) un'applicazione

$$\bar{X} : E \to TE$$

data da $\bar{X} : p \mapsto (p, \bar{X}^{\ell}(p))$,

(risp. $\underline{X} : E \to T^{*}E$

data da $\underline{X} : p \mapsto (p, \underline{X}^{\ell}(p))$) .

Si osservi che le definizioni date sono equivalenti, nel senso che, fissato un campo vettoriale libero $\bar{X}^{\ell}$ (risp. un campo covettoriale libero $\underline{X}^{\ell}$), questo determina un campo vettoriale applicato $\bar{X}$ (risp. un campo covettoriale applicato $\underline{X}$) e viceversa, mediante la regola

$$\bar{X} = (id_E, \bar{X}^{\ell})$$

(risp. $\underline{X} = (id_E, \underline{X}^{\ell})$) .

Indichiamo con

$$\mathcal{T}E \equiv \{\bar{X} : E \to TE\}$$

(risp. $\mathcal{T}^{*}E \equiv \{\underline{X} : E \to T^{*}E\}$)

l'insieme dei campi vettoriali (risp. covettoriali) applicati .

Si vede che $\mathcal{T}E$ (risp. $\mathcal{T}^{*}E$) munito delle operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari, date nel modo seguente

$$(\bar{X}+\bar{Y})(p) \equiv \bar{X}(p) + \bar{Y}(p) \qquad \forall\, p \in E$$
$$(\lambda\bar{X})(p) \equiv \lambda\bar{X}(p)$$

(risp. $(\underline{X}+\underline{Y})(p) \equiv \underline{X}(p) + \underline{Y}(p)$, $(\lambda\underline{X})(p) \equiv \lambda\underline{X}(p)$ $\forall\, p \in E$)

è uno spazio vettoriale.

5 CAMPI TENSORIALI

0 Anche questo paragrafo può essere letto in un secondo momento in quanto è una generalizzazione del precedente.

Sia, dunque, E uno spazio affine. Sia $\bar{F} \equiv \otimes^r_s \bar{E}$.

I.5.1. DEFINIZIONE

Dicesi CAMPO TENSORIALE LIBERO un'applicazione

$$t^\ell : E \to \bar{F}$$

così indicata
$$t^\ell : p \mapsto t^\ell(p) \quad .$$

Dicesi CAMPO TENSORIALE APPLICATO un'applicazione

$$t : E \to E \times \bar{F}$$

data da
$$t : p \mapsto (p, t^\ell(p))$$

e soddisfacente a

$$\tau^r_{sE} \circ t = id_E \quad \dot{-}$$

In modo del tutto analogo si definiscono i CAMPI TENSORIALI ESTERNI LIBERI ED APPPLICATI ponendo $\bar{F} \equiv \Lambda^r_s \bar{E}$.

Anche in questo caso le definizioni date sono equivalenti, mediante la regola

$$t = (id_E, t^\ell) \quad .$$

Indichiamo con

$$\mathcal{T}^r_s E \equiv \{ (t : E \to T^r_s E) / \tau^r_{sE} \circ t = id_E \}$$

(risp. $\Omega^r_s E \equiv \{(t : E \to \Lambda^r_s E) \ / \ \tau^r_{sE} \circ t = id_E\}$)

l'insieme dei campi tensoriali applicati (risp. campi tensoriali esterni applicati).

Scriviamo, anche

$$\mathfrak{F}E \equiv \mathcal{T}^o_o E \equiv \Omega^o_o E \equiv \{f : E \to \mathbb{R}\} \quad .$$

I.5.2. DEFINIZIONE

Relativamente agli insiemi di campi tensoriali liberi o applicati su E, si definiscono le operazioni di addizione, moltiplicazione per gli scalari, moltiplicazione per le funzioni, moltiplicazione tensoriale, contrazione, ecc..., mediante le analoghe operazioni relative a tensori di $\bar{E}$, eseguendole punto per punto di E.

In particolare, poniamo

a) $(f+g)(p) \equiv f(p) + g(p) \qquad \forall\, f,g \in \mathfrak{F}E,\ p \in E$

b) $(\lambda\cdot f)(p) \equiv \lambda\cdot f(p) \qquad \forall\, f \in \mathfrak{F}E,\ \lambda \in \mathbb{R},\ p \in E$

c) $(f\cdot g)(p) \equiv f(p) \cdot g(p) \qquad \forall\, f,g \in \mathfrak{F}E,\ p \in E$

d) $(t+t')(p) \equiv t(p) + t'(p) \qquad \forall\, t,t' \in \mathcal{T}^r_s E,\ p \in E$

e) $(\lambda\cdot t)(p) \equiv \lambda\cdot t(p) \qquad \forall\, t \in \mathcal{T}^r_s E,\ \lambda \in \mathbb{R},\ p \in E$

f) $(f\cdot t)(p) \equiv f(p)\cdot t(p) \qquad \forall\, t \in \mathcal{T}^r_s E,\ f \in \mathfrak{F}E,\ p \in E$

g) $(t \otimes t')(p) \equiv t(p) \otimes t'(p) \qquad \forall\, t \in \mathcal{T}^p_q E,\ t' \in \mathcal{T}^r_s E,\ p \in E$

h) $< \underline{t},\bar{t}'>(p) \equiv <\underline{t}(p),\bar{t}'(p)> \qquad \forall\, \underline{t} \in \mathcal{T}^o_1 E\ ,\ \bar{t}' \in \mathcal{T}^1_o E\ ,\ p \in E\ .$

In modo analogo al paragrafo precedente si vede che l'insieme $\mathcal{T}^r_s E$ (risp. $\Omega^r_s E$), con le operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari, costituisce uno spazio vettoriale.

E' utile esprimere i campi tensoriali liberi mediante l'uso di basi, costanti e non.

Allo stesso modo si esprimono i campi tensoriali applicati, in virtù dell'equivalenza tra gli uni e gli altri.

I.5.3. PROPOSIZIONE Sia $\dim E = n$. Sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base di $\bar{E}$ e sia $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \ldots, \underline{\nu}^n\} \subset \bar{E}^*$ la base duale. Si identifichino gli elementi di queste basi con campi tensoriali costanti.

Allora

$$B \ , \ B^* \ , \ B \otimes B, \ \ B \otimes B^* \ , \ B^* \otimes B^*$$

sono basi rispettivamente di

$$\mathcal{T}^1_o E \equiv \mathcal{T} E \ , \ \mathcal{T}^o_1 E \equiv \mathcal{T}^* E \ , \mathcal{T}^2_o E \ , \mathcal{T}^1_1 E, \mathcal{T}^o_2 E \quad .$$

Più in generale

$$t^\ell : E \to \otimes^r_s \bar{E}$$

ha un'unica espressione

$$t^\ell = \sum_{\substack{1 \le i_1 \ldots i_r \le n \\ 1 \le j_1 \ldots j_s \le n}} t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \bar{v}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \bar{v}_{i_r} \otimes \underline{\nu}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \underline{\nu}^{j_s}$$

dove $t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ è la funzione $t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} : E \to \mathbb{R}$

data da $t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \equiv \langle \underline{\nu}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\nu}^{i_r} \otimes \bar{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{v}_{j_s} , t^{\ell} \rangle$

Un altro modo interessante per esprimere i campi tensoriali è quello di usare una base variabile da punto a punto.

Questo metodo si rivelerà utile allorché si introdurranno "sistemi di coordinate non cartesiani". Infatti, si vedrà che tali sistemi di coordinate generano, in modo naturale, delle basi variabili da punto a punto.

I.5.4. Facciamo infine un esempio importante di campo tensoriale.

DEFINIZIONE Sia E uno spazio affine di dimensione n.

Dicesi CAMPO TENSORIALE FONDAMENTALE di E il campo tensoriale costante $\hat{1}$ che associa ad ogni punto $p \in E$ il tensore fondamentale di $\bar{E}$ (vedi 0.5.6).

Sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ una base di campi vettoriali (costanti o no) di $\mathcal{T}E$ e sia $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \dots, \underline{\nu}^n\}$ la base duale di B in $\mathcal{T}^*E$.

Allora, l'espressione di $\hat{1}$ è

$$\hat{1}(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta^i_j \, \bar{v}_i \otimes \underline{\nu}^j \equiv \bar{v}_1 \otimes \underline{\nu}^1 + \dots + \bar{v}_n \otimes \underline{\nu}^n .$$

Dunque, le componenti di $\hat{1}$ sono le funzioni costanti δ^i_j.

Si noti che tali componenti non dipendono dalla scelta della base, sia essa costituita da campi vettoriali costanti o no.

Naturalmente, questa è una proprietà del tutto eccezionale di questo campo tensoriale: il motivo consiste nella sua canonicità.

6 SOTTOSPAZI VERTICALE ED ORIZZONTALE DELLO SPAZIO TANGENTE E COTANGENTE DI UN FIBRATO BANALE.

0 Consideriamo uno spazio affine E ed uno spazio vettoriale $\bar{F}$.

Diamo la nozione di "fibrato banale" η, di"base" E e "fibra" $\bar{F}$.

Definiamo poi, i notevoli "sottospazi verticale ed orizzontale" dello spazio tangente e cotangente di η, osservando che i più importanti sono $\nu\, T(E \times \bar{F})$ e $\circ\, T^{*}(E \times \bar{F})$. Ulteriori osservazioni preferiamo farle nel contesto del discorso, in modo da fornire un quadro chiaro di queste nozioni.

Facciamo, infine, menzione delle applicazioni Γ e Π le quali svolgono un ruolo fondamentale: in particolare, la "connessione affine" Γ.

Tutte queste nozioni possono essere generalizzate alle varietà differenziabili.

1.6.1. Diamo, ora, l'importante nozione di "fibrato banale".

DEFINIZIONE

Dicesi FIBRATO BANALE di "base" E e "fibra" $\bar{F}$ una terna

$$\eta \equiv (E \times \bar{F}, \pi , E)$$

dove

- $E \times \bar{F}$ è detto lo "spazio totale" di η,
- E è detto la"base" di η
- π è l'applicazione, detta la "proiezione"

$$\pi : E \times \bar{F} \to E$$

data da $\pi : (p,\bar{u}) \mapsto p$.

Dicesi FIBRA nel punto $p \in E$ lo spazio vettoriale

$$\bar{F}_p \equiv \pi^{-1}(p) = \{(p,\bar{u}) \ / \ \bar{u} \in \bar{F}\}$$

che è naturalmente isomorfo ad $\bar{F}$.

Esempi notevoli di fibrati banali sono quello tangente τE, cotangente $\tau^* E$ e tensoriale $\tau^r_s E$.

Il fibrato η si dice "banale" perché lo spazio totale $E \times \bar{F}$ è il prodotto cartesiano della base E per la fibra $\bar{F}$.

Nel nostro caso abbiamo, dunque, anche la proiezione $E \times \bar{F} \to \bar{F}$, che però non consideriamo.

1.6.2. Passiamo ora ad introdurre l'importante "sottospazio verticale" di $T(E\times\bar{F})$ e quello "orizzontale" di $T(E\times\bar{F})$.

DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO VERTICALE di $T(E\times\bar{F})$ il sottospazio affine di $T(E\times\bar{F})$

$$\nu \, T(E\times\bar{F}) \equiv (E \times \bar{F}) \times (\bar{o} \times \bar{F}) \quad .$$

Dicesi SPAZIO ORIZZONTALE di $T(E\times\bar{F})$ il sottospazio affine di $T(E\times\bar{F})$

$$o \, T(E \times \bar{F}) \equiv (E \times \bar{F}) \times (\bar{E} \times \bar{o}) \quad .$$

Osserviamo che $o \, T(E\times\bar{F})$ è il supplementare di $\nu \, T(E \times \bar{F})$, ossia è

$$T(E\times\bar{F}) = \nu \, T(E \times \bar{F}) \oplus o \, T(E \times \bar{F}) \quad .$$

Osserviamo, inoltre, che lo spazio verticale è ottenuto da $T(E\times\bar{F})$

bloccando gli incrementi dei punti e considerando solo incrementi di vettori applicati.

Tale spazio continuerà ad esistere passando alle varietà differenziabili, in quanto ha senso confrontare incrementi del vettore nello stesso punto di applicazione.

Invece, lo spazio orizzontale $oT(E \times \bar{F})$, ottenuto considerando solo incrementi del punto e lasciando invariato il vettore applicato, affinché esista, abbisogna di una ulteriore struttura che "connetta" vettori applicati in punti distinti.

1.6.3. Si danno, allora, alcune importanti applicazioni valide, a priori, sugli spazi affini.

DEFINIZIONE

Dicesi CONNESSIONE AFFINE l'applicazione

$$\Gamma : T(E \times \bar{F}) \to \nu T(E \times \bar{F})$$

data da $$\Gamma : (p,\bar{u};\ \bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\ \bar{o},\bar{w}) \quad .$$

Dicesi PROIEZIONE NATURALE l'applicazione

$$\Pi : \nu\, T(E \times \bar{F}) \to E \times \bar{F}$$

data da $$\Pi : (p,\bar{u};\ \bar{o},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{w}) \quad .$$

Si noti che Π induce un isomorfismo

$$\nu\, T_{(p,\bar{u})}(E \times \bar{F}) \to \bar{F}_p \quad .$$

1.6.4. Introduciamo ora l'importante "sottospazio orizzontale" di

$T^*(Ex\bar{F})$ e quello "verticale" di $T^*(Ex\bar{F})$.

DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO ORIZZONTALE di $T^*(Ex\bar{F})$ il sottospazio affine di $T^*(Ex\bar{F})$

$$o\, T^*(Ex\bar{F}) \equiv (Ex\bar{F}) \times (\bar{E}^* x\ \underline{o}) \quad .$$

Dicesi SPAZIO VERTICALE di $T^*(Ex\bar{F})$ il sottospazio affine di $T^*(Ex\bar{F})$

$$\nu T^*(Ex\bar{F}) \equiv (Ex\bar{F}) \times (\underline{o} x \bar{F}^*) \quad .$$

Osserviamo che $\nu T^*(Ex\bar{F})$ è il supplementare di $oT^*(Ex\bar{F})$, ossia è

$$T^*(Ex\bar{F}) = oT^*(Ex\bar{F}) \oplus \nu T^*(Ex\bar{F}) \ .$$

Osserviamo,anche, che la scelta dei supplementari $oT(Ex\bar{F})$ e $\nu T^*(Ex\bar{F})$ equivale a considerare le rispettive proiezioni Γ che si annullano su di essi.

Inoltre, il sottospazio $oT^*(Ex\bar{F})$ è il duale di $\nu T(Ex\bar{F})$.

Pertanto, esso continuerà ad esistere sulle varietà differenziabili.

Non continua, invece, ad esistere il sottospazio verticale $\nu T^*(Ex\bar{F})$.

1.6.5. Di notevole importanza sono le seguenti applicazioni, valide anche sulle varietà differenziabili.

DEFINIZIONE

Dicesi CONNESSIONE AFFINE l'applicazione (indicata ancora con Γ)

$$\Gamma : T^*(Ex\bar{F}) \rightarrow oT^*(Ex\bar{F})$$

data da
$$\Gamma : (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \mapsto (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) \quad .$$

Dicesi PROIEZIONE NATURALE l'applicazione (indicata ancora con Π)

$$\Pi : o\, T^*(E \times \bar{F}) \rightarrow T^*E$$

data da $$\Pi : (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) \mapsto (p,\underline{\nu}) \quad .$$

Si noti che Π induce un isomorfismo

$$o\, T^*_{(p,\bar{u})}(E \times \bar{F}) \rightarrow \bar{F}^*_p$$

Per quanto riguarda le generalizzazioni alle varietà differenziabili, valgono osservazioni analoghe alle precedenti.

7 SECONDI SPAZI TANGENTI E COTANGENTI

0 Questo paragrafo può essere letto dopo quello sulle derivate seconde.

Sia E uno spazio affine.

Possiamo applicare i risultati del precedente paragrafo al caso in cui è $\bar{F} \equiv \bar{E}$, oppure $\bar{F} \equiv \bar{E}^*$.

Abbiamo visto che gli spazi TE e T^*E sono spazi affini. Allora, è naturale definire i loro spazi tangenti e cotangenti, i quali hanno, a loro volta, una struttura di spazio affine.

1.7.1. PROPOSIZIONE

Lo spazio tangente di TE (risp. di T^*E)

$$TTE \equiv (E \times \bar{E}) \times (\bar{E} \times \bar{E})$$

$$(\text{risp.} \qquad TT^*E \equiv (E \times \bar{E}^*) \times (\bar{E} \times \bar{E}^*) \qquad)$$

è uno spazio affine, detto 2-SPAZIO TANGENTE di E.

Dunque, abbiamo il fibrato tangente di TE (risp. di T^*E)

$$\tau TE \equiv (TTE , p_{TE} , E)$$

$$(\text{risp.} \qquad \tau T^*E \equiv (TT^*E , p_{T^*E}, E) \qquad)$$

detto 2-FIBRATO TANGENTE di E.

1.7.2. PROPOSIZIONE

Lo spazio cotangente di TE (risp. di T^*E)

$$T^*TE \equiv (E \times \bar{E}) \times (\bar{E}^* \times \bar{E}^*)$$

(risp. $T^*T^*E \equiv (E x \bar{E}^*) \times (\bar{E}^* x \bar{E})$)

è uno spazio affine, detto 2-SPAZIO COTANGENTE di E .

Dunque, abbiamo il fibrato cotangente di TE (risp. di T^*E)

$$\tau^*TE \equiv (T^*TE\ ,\ q_{TE},\ E)$$

(risp. $\tau^*T^*E \equiv (T^*T^*E\ ,\ q_{T^*E},\ E)$)

detto 2-FIBRATO COTANGENTE di E .

In modo del tutto analogo al paragrafo precedente possiamo considerare i seguenti sottospazi notevoli

- $\nu TTE \equiv (E x \bar{E}) \times (\bar{o} x \bar{E})$ SPAZIO VERTICALE di TTE
- $oTTE \equiv (E x \bar{E}) \times (\bar{E} x \bar{o})$ " ORIZZONTALE di TTE
- $\nu TT^*E \equiv (E x \bar{E}^*) x (\bar{o} x \bar{E}^*)$ " VERTICALE di TT^*E
- $oTT^*E \equiv (E x \bar{E}^*) x (\bar{E} x \underline{o})$ " ORIZZONTALE di TT^*E
- $oT^*TE \equiv (E x \bar{E}) \times (\bar{E}^* x \underline{o})$ SPAZIO ORIZZONTALE di T^*TE
- $\nu T^*TE \equiv (E x \bar{E}) x (\underline{o} x \bar{E}^*)$ " VERTICALE di T^*TE
- $oT^*T^*E \equiv (E x \bar{E}^*) \times (\bar{E}^* x \bar{o})$ " ORIZZONTALE di T^*T^*E
- $\nu T^*T^*E \equiv (E x \bar{E}^*) \times (\underline{o} \times \bar{E})$ " VERTICALE di T^*T^*E

e le seguenti applicazioni

- $\Gamma : TTE \to \nu\ TTE$ data da $\Gamma : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w})$
- $\Pi : \nu TTE \to TE$ " " $\Pi : (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{w})$
- $\Gamma : TT^*E \to \nu TT^*E$ " " $\Gamma : (p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \mapsto (p,\underline{u};\bar{o},\underline{\omega})$

- $\Pi : \nu TT^*E \to T^*E$ data da $\Pi : (p,\underline{u};\bar{o},\underline{\omega}) \mapsto (p,\underline{\omega})$

- $\Gamma : T^*TE \to o\,T^*TE$ " " $\Gamma : (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \mapsto (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o})$

- $\Pi : oT^*TE \to T^*E$ " " $\Pi : (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) \mapsto (p,\underline{\nu})$

- $\Gamma : T^*T^*E \to oT^*T^*E$ " " $\Gamma : (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \mapsto (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{o})$

- $\Pi : oT^*T^*E \to T^*E$ " " $\Pi : (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{o}) \mapsto (p,\underline{\nu})$.

1.7.3. Possiamo definire, infine, delle applicazioni importanti tra spazi tangenti e cotangenti, le quali possono essere estese anche nel caso di varietà differenziabili.

Tali applicazioni giocano un ruolo interessante nella Meccanica Analitica.

DEFINIZIONE

Dicesi INVOLUZIONE CANONICA l'applicazione

$$s : TTE \to TTE$$

data da $$s : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{v};\bar{u},\bar{w}) .$$

Dicesi ENDOMORFISMO CANONICO l'applicazione

$$\nu : TTE \to \nu TTE$$

data da $$\nu : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{v}) .$$

Dicesi APPLICAZIONE SIMPLETTICA l'applicazione

$$\omega : TT^*E \to T^*T^*E$$

data da $$\omega : (p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \mapsto (p,\underline{u};\underline{\omega},-\bar{v}) .$$

Dicesi CAMPO VETTORIALE DI LIOUVILLE l'applicazione

$$\bar{V} : TE \to \nu\, TTE$$

data da $$\bar{V} : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{u}) .$$

Dicesi CAMPO COVETTORIALE DI LIOUVILLE l'applicazione

$$\underline{\lambda} : T^*E \to oT^*T^*E$$

data da $$\underline{\lambda} : (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\underline{u},\bar{o}) .$$

8 RILEVAMENTO DI FUNZIONI E CAMPI

0 Riteniamo opportuno consigliare il lettore di rivedere questo paragrafo prima di passare ai sistemi di coordinate su TE e T^*E.

Le nozioni contenute in questo numero risulteranno invarianti rispetto a "cambiamenti di coordinate". Inoltre possono essere estese al caso delle varietà differenziabili.

Consideriamo, una volta per tutte, uno spazio affine E, uno spazio vettoriale $\bar{F}$ ed un fibrato banale $\eta \equiv (E \times \bar{F}, \pi, E)$.

1.8.1. DEFINIZIONE Sia $f : E \to R$ una funzione.

Dicesi RILEVAMENTO di f secondo la proiezione π, l'applicazione

$$f^r : E \times \bar{F} \to R$$

data da

$$f^r : (p,\bar{u}) \mapsto f(p)$$

ossia, tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} E \times \bar{F} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f^r"] & \\ E \arrow[r, "f"'] & R \end{tikzcd} \quad \dot{=}$$

Nel caso in cui è $\bar{F} \equiv \bar{E}$, detto $\tau E \equiv (TE, p_E, E)$ il fibrato tangente di E, poniamo

$$f^r \equiv \check{f} \equiv f \circ p_E \quad .$$

Nel caso in cui è $\bar{F} \equiv \bar{E}^*$, detto $\tau^*E \equiv (T^*E, q_E, E)$ il fibrato cotangente di E, poniamo

$$f^r \equiv \hat{f} \equiv f \circ q_E \quad .$$

1.8.2. Passiamo, ora, a definire il rilevamento dei campi.

DEFINIZIONE Sia $t : E \to E \times \bar{F}$ un campo.

Dicesi RILEVAMENTO di t secondo π l'applicazione

$$t^r : E \times \bar{F} \to \nu T(E \times \bar{F})$$

data da
$$t^r : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\ \bar{o}, t^\ell(p))$$

ossia, tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{array}{ccc} E \times \bar{F} & \xrightarrow{t^r} & \nu T(E \times \bar{F}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ E & \xrightarrow{t} & E \times \bar{F} \end{array}$$

In particolare, per $\bar{F} \equiv \bar{E}$, il rilevamento di $t : E \to TE$ secondo p_E è l'applicazione

$$t^r \equiv \check{t} : TE \to \nu TTE$$

data da
$$\check{t} : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o}, t^\ell(p) \quad)$$

ossia, tale che risulti

$$\Pi \circ \check{t} = t \circ p_E \quad ,$$

dove $\Pi : \nu\, TTE \to TE$ è la proiezione naturale.

Invece, per $\bar{F} \equiv \bar{E}^*$, il rilevamento di $t : E \to T^*E$ secondo

q_E (indicato ancora con $\check{t}$) è l'applicazione

$$t^r \equiv \check{t} : T^*E \to \nu\, TT^*E$$

data da $$\check{t} : (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\, \bar{o}, t^{\ell}(p))$$

ossia, tale che risulti

$$\Pi \circ \check{t} = t \circ q_E \;,$$

dove $\Pi : \nu\, TT^*E \to T^*E$ è la proiezione naturale.

1.8.3. Nel caso in cui si abbia un campo covettoriale applicato è possibile definire un altro rilevamento, come mostra la seguente definizione.

DEFINIZIONE Sia $t : E \to T^*E$ un campo covettoriale applicato.

Dicesi RILEVAMENTO di t secondo π l'applicazione

$$t_r : E \times \bar{F} \to \circ\, T^*(E \times \bar{F})$$

data da $$t_r : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u}, t^{\ell}(p), \underline{o}) \quad ,$$

ossia, tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{array}{ccc} E \times \bar{F} & \xrightarrow{t_r} & \circ\, T^*(E \times \bar{F}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ E & \xrightarrow[t]{} & T^*E \end{array} \quad \dot{-}$$

In particolare, se $\bar{F} \equiv \bar{E}$, il rilevamento di t secondo p_E è l'applicazione

$$t_r \equiv \hat{t}: TE \to \circ\, T^*TE$$

data da $\hat{t}: (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\ t^{\ell}(p),\underline{o})$,

ossia, tale che risulti

$$\Pi \circ \hat{t} = t \circ p_E \quad ,$$

dove $\Pi : \circ\, T^*TE \to T^*E$ è la proiezione naturale .

Invece, per $\bar{F} \equiv \bar{E}^*$, il rilevamento di t secondo q_E (indicata ancora con $\hat{t}$) è l'applicazione

$$t_r \equiv \hat{t}: T^*E \to \circ\, T^*T^*E$$

data da $\hat{t}: (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\ t^{\ell}(p),\bar{o})$,

ossia, tale che risulti

$$\Pi \circ \hat{t} = t \circ q_E \quad ,$$

dove $\Pi : \circ\, T^*T^*E \to T^*E$ è la proiezione naturale.