0 INTRODUZIONE

In questo capitolo si fa un riassunto delle principali nozioni di algebra tensoriale, per organicità ed uniformità di impostazione e di linguaggio. Per brevità, omettiamo le dimostrazioni dei teoremi, rimandando a [11] .

Nella Geometria Elementare (fondata sugli assiomi di Euclide), per "spazio vettoriale" s'intende l'insieme dei vettori, ciascuno dei quali è una classe d'equivalenza di segmenti orientati.

In altri testi classici si identificano gli spazi vettoriali (di dimensione n) con $\mathbb{R}^n$ e, successivamente, si studia il loro significato geometrico.

In questo lavoro, invece, si darà la struttura di spazio vettoriale seguendo la via moderna puramente algebrica, che è ormai assodata. Ossia, s'intenderà come spazio vettoriale, un qualsiasi insieme munito di due operazioni che godono di certe proprietà. In tal modo questa definizione generale, ha come casi particolari, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, ecc...

Comunque, uno dei principali interessi, che abbiamo noi per gli spazi vettoriali, consiste nel loro significato geometrico, il quale apparirà evidente allorché introdurremo gli "spazi affini".

Si ritiene, anzi, che questa sia la strada matematicamente più valida di costruzione della Geometria Euclidea.

Considerato uno spazio vettoriale V, possiamo introdurre la nozione di "base", mediante la quale è possibile esprimere ogni elemento di V, in modo univoco, come combinazione lineare degli elementi della base. Pertanto, fissata la base, ogni elemento di V

è caratterizzato completamente dalle sue componenti. In questo modo, si recupera la definizione classica di spazio vettoriale di cui si è parlato prima.

Dunque, così facendo, viene prima lo spazio vettoriale costruito a priori e poi la nozione di base e di rappresentazione numerica. entre, col procedimento classico, vengono prima le componenti legate ad un non ben definito sistema di riferimento e, successivamente, i vettori costruiti con una relazione di equivalenza che può sembrare arbitraria.

Per maggiori dettagli si veda [11] .

1 SPAZI VETTORIALI

0 La prima nozione che introduciamo è quella di "spazio vettoriale" V. In questo paragrafo ne diamo la definizione e le prime conseguenze. Definiamo poi i "sottospazi vettoriali", come i sottoinsiemi di uno spazio vettoriale che conservano una tale struttura. Dopo aver introdotto il "prodotto cartesiano" di più spazi vettoriali e quella di "spazio quoziente" ci dedichiamo alla importantissima nozione di "base". Essa è costituita da un insieme di vettori di V, tale che ogni altro vettore di V possa esprimersi in uno ed in un sol modo, come "combinazione lineare" dei vettori di tale base. Osservato poi che ogni spazio vettoriale ammette una base, si fa vedere che ogni insieme di vettori "linearmente indipendenti" può essere completato con vettori di un insieme di "generatori" in modo da costituire una base.

Infine introduciamo l'importantissimo concetto di "dimensione" di uno spazio vettoriale, dopo aver visto che la cardinalità di tutte le basi di uno spazio vettoriale è la medesima.

0.1.1. DEFINIZIONE Sia $\mathbb{K}$ un corpo.

Dicesi SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{K}$ una terna

$$(V, +, \bullet)$$

dove

- V è un qualsiasi insieme;
- $+$ è un'operazione, detta "addizione"

$$+ : V \times V \to V$$

così indicata $\qquad + : (u,v) \mapsto u+v$

rispetto alla quale V è un gruppo abeliano (o commutativo);

- $\cdot$ è un'operazione, detta "moltiplicazione per gli scalari"

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

così indicata $\qquad \cdot : (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

la quale gode delle seguenti proprietà

a) $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

b) $(\lambda+\mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu . v$

c) $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

d) $1_{\mathbb{K}} \cdot v = v$ $\qquad \doteq$

Gli elementi di uno spazio vettoriale su un corpo $\mathbb{K}$ sono detti "vettori".

In seguito, tratteremo solo spazi vettoriali sui reali (anche se molte delle nozioni introdotte hanno validità più ampia).

Sia, dunque, $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ che, per semplicità, indicheremo con V.

D'ora in avanti, per mettere in risalto l'appartenenza dei vettori allo spazio vettoriale li soprallineremo.

A partire da V e da un insieme S, è possibile munire l'insieme $F(S,V)$, costituito dalle applicazioni

$$S \rightarrow V,$$

di una struttura di spazio vettoriale, definendovi le operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari nel modo seguente

$$\left.\begin{aligned} (f+g)(x) &\equiv f(x) + g(x) \\ (\lambda \cdot f)(x) &\equiv \lambda \cdot f(x) \end{aligned}\right. \qquad \forall\, x \in S.$$

0.1.2. DEFINIZIONE Sia W un sottoinsieme di V.

Si dice che W è un SOTTOSPAZIO (VETTORIALE) di V se sono soddisfatte le seguenti condizioni

a) $\bar{u}+\bar{v} \in W$ $\quad\quad \forall\ \bar{u},\bar{v} \in W$

b) $\lambda\cdot\bar{u} \in W$ $\quad\quad \forall\ \lambda \in R,\ \bar{u} \in W$

c) $\bar{o} \in W$ $\quad\quad \bar{o} \in V$.

0.1.3. Facciamo ora alcune premesse, utili a dare il concetto di "somma diretta" di due sottospazi (vettoriali) U e U' di V.

DEFINIZIONE Dicesi SOMMA di U e U' il sottospazio di V, generato da $U \cup U'$

$$U+U' \equiv \{\bar{v} \in V \ / \ \bar{v} = \bar{u}+\bar{u}' \ , \ \text{con} \ \bar{u} \in U \ \text{e} \ \bar{u}' \in U'\}.$$

0.1.4. DEFINIZIONE Si dice che U e U' sono linearmente indipendenti se è

$$U \cap U' = \{\bar{o}\} .$$

0.1.5. DEFINIZIONE Si dice che $U + U'$ è la SOMMA DIRETTA di U e U', se i due sottospazi sono linearmente indipendenti e si scrive

$$U \oplus U' .$$

Dunque $V = U \oplus U'$ se ogni $\bar{v} \in V$ ammette un'unica decomposizione $\bar{v} = \bar{u}+\bar{u}'$, con $\bar{u} \in U$, $\bar{u}' \in U'$.

Naturalmente, è possibile estendere tali nozioni a più sottospazi di V.

0.1.6. DEFINIZIONE - Siano U e U' due sottospazi di V.

Si dice che U' è un SUPPLEMENTARE di U in V, se

$$V = U \oplus U' \ \underline{.}$$

Si osservi che il supplementare non è univocamente determinato.

Vedremo, in seguito (0.8.4) che se V è uno spazio vettoriale "euclideo", allora esiste un unico supplementare "ortogonale" di un sottospazio $U \subset V$.

0.1.7. PROPOSIZIONE Siano $V_1, \ldots, V_p$ p spazi vettoriali.

Allora, l'insieme PRODOTTO CARTESIANO

$$V_1 \times \ldots \times V_p \equiv \{(\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p) / \bar{v}_1 \in V_1, \ldots, \bar{v}_p \in V_p\}$$

è uno spazio vettoriale, definendovi le operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari nel modo seguente

$$(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_p) + (\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p) \equiv (\bar{u}_1+\bar{v}_1,\ldots,\bar{u}_p+\bar{v}_p)$$

$$\lambda\cdot(\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_p) \equiv (\lambda\cdot\bar{v}_1,\ldots,\lambda\cdot\bar{v}_p) \ \underline{\cdot}$$

0.1.8. Sia W un sottospazio vettoriale di V.

Si vede che la relazione binaria in V, data da

$$\bar{u} \sim \bar{v} \Longleftrightarrow \bar{u} - \bar{v} \in W \qquad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$$

è una relazione d'equivalenza.

Allora, si dà la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Dicesi INSIEME QUOZIENTE di V rispetto a W l'insieme delle classi di equivalenza rispetto a $\sim$

$$V/_W \doteq$$

Se $\bar{u} \in V$, indichiamo con $[\bar{u}]$ la classe d'equivalenza di $\bar{u}$, costituita da tutti gli elementi di V del tipo

$$\bar{u} + \bar{w}, \qquad \text{con } \bar{w} \in W.$$

Perciò, si usa anche il simbolo

$$[\bar{u}] = \bar{u} + W.$$

Si vede che l'insieme quoziente V/W, munito delle seguenti operazioni (che sono ben definite) di addizione e di moltiplicazione per gli scalari

$$[\bar{u}] + [\bar{v}] \equiv [\bar{u} + \bar{v}]$$

$$\lambda \cdot [\bar{u}] \equiv [\lambda \cdot \bar{u}]$$

è uno spazio vettoriale.

0.1.9. DEFINIZIONE Siano $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n \in V$.

Dicesi COMBINAZIONE LINEARE di $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n$ ogni vettore di V del tipo

$$\bar{x} \equiv \sum_{i=1}^{n} x^i \bar{v}_i \equiv x^1\bar{v}_1 + \ldots + x^n\bar{v}_n \qquad \text{con } x^1,\ldots,x^n \in \mathbb{R}.$$

Se ogni vettore di V è combinazione lineare di $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n$, allora si dice che $\{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n\}$ è un INSIEME DI GENERATORI di V .

In seguito, quando non c'è pericolo di confusione, ometteremo il simbolo di sommatoria.

0.1.10. DEFINIZIONE

Si dice che n vettori $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n \in V$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se è, $\forall\, x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x^i \bar{v}_i = \bar{o}\right) \Rightarrow (x^1 = \dots = x^n = o) \quad .$$

0.1.11. DEFINIZIONE

Dicesi BASE di V ogni sottoinsieme finito $B \subset V$, che gode delle seguenti proprietà:

- B è un insieme di generatori di V;
- B è linearmente indipendente .

0.1.12. Dunque, ogni spazio vettoriale(purché non costituito dal solo vettore nullo) ammette una base. Anzi, si può dimostrare di più che ogni insieme di vettori linearmente indipendenti (che esiste sempre) può essere completato con vettori di un insieme di generatori (che esiste sempre), in modo da costituire una base.

TEOREMA Sia $G \equiv \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n\}$ un insieme finito di generatori di V. Sia $I \equiv \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_p\} \subset G$, con $p < n$, linearmente indipendente.

Allora, esiste una base B di V, tale che

$$I \subset B \subset G \subset V \quad .$$

Si possono anche considerare spazi vettoriali con basi infinite, i quali però esulano dai nostri scopi.

0.1.13. La nozione di base può essere caratterizzata tramite una sua proprietà importantissima, come segue.

TEOREMA Sia $B \equiv \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n\}$ un sottoinsieme di V.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) B è una base;

b) ogni vettore $\bar{x} \in V$ si scrive in uno e in un solo modo come combinazione lineare di vettori di B

$$\bar{x} = x^i \bar{v}_i \quad \dot{-}$$

0.1.14. E', allora, lecita la seguente definizione.

DEFINIZIONE Sia $B \equiv \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n\}$ una base di V. Sia $\bar{x} \equiv x^i \bar{v}_i \in V$.

I coefficienti della combinazione lineare, secondo i vettori di B, di $\bar{x}$ (che sono univocamente determinati) si dicono le COMPONENTI di $\bar{x}$ secondo la base B.

Allora, dicesi MATRICE (COLONNA) rappresentante $\bar{x}$, relativa a B, la matrice colonna delle componenti di $\bar{x}$, indicata con

$$M^B(\bar{x}) \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix} \quad \dot{-}$$

Si osservi che la matrice rappresentante $\bar{x}$ dipende dalla base scelta.

Quando consideriamo fissata la base B, scriveremo $(\bar{x})$ al posto di $M^B(\bar{x})$.

La rappresentazione matriciale degli spazi vettoriali è un fatto molto importante, strettamente connesso alla nozione di base.

Questa tecnica verrà usata per le applicazioni lineari, multilineari e per i tensori: apparirà, così, chiara la sua importanza.

0.1.15. TEOREMA

Supposto che V abbia un numero finito di generatori, allora, ogni base di V è costituita da uno stesso numero di elementi .

0.1.16. Si dà, perciò, la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Se V ha una base di n elementi, allora si dice che V ha DIMENSIONE n e si scrive

$$\dim V = n \ .$$

Se $V \equiv \{\bar{o}\}$, allora si dice che V ha dimensione zero e si scrive $\dim V = 0$.

0.1.17. TEOREMA Sia $\dim V = n$. Sia W un sottospazio vettoriale di V.

Allora, è

$$\dim W \leq \dim V \ .$$

Inoltre, sussiste la seguente equivalenza

$$(\dim W = \dim V) \Leftrightarrow W = V \ .$$

Siano W e W' sottospazi di V tali che $V = W \oplus W'$.

Allora,è

$$\dim V = \dim W + \dim W' \;.$$

0.1.18. PROPOSIZIONE Siano $V_1 \dots V_p$, V, W spazi vettoriali e sia $W \subset V$.

Allora, è

$$\dim(V_1 \times \dots \times V_p) = \dim V_1 + \dots + \dim V_p \;,$$

$$\dim(V_{/W}) = \dim V - \dim W \;.$$

2 APPLICAZIONI LINEARI

0 Un'applicazione fra due spazi vettoriali si dice lineare se "conserva" le operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari.

Quindi tali applicazioni sono le uniche ad essere "canoniche" rispetto alla struttura di spazio vettoriale ed è perciò logico at- tendersi da esse un ruolo fondamentale.

Siano, dunque, U e V due spazi vettoriali.

0.2.1. DEFINIZIONE

Un'applicazione

$$f : U \rightarrow V$$

dicesi (un OMOMORFISMO di spazi vettoriali o) LINEARE se sono sod- disfatte le seguenti condizioni

a) $f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) \qquad \forall\ \bar{u},\bar{v} \in U$

b) $f(\lambda \cdot \bar{u}) = \lambda \cdot f(\bar{u}) \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \bar{u} \in U.$

In particolare, se $U \equiv V$, f si dice un ENDOMORFISMO.

0.2.2. DEFINIZIONE

Un'applicazione lineare

$$f : U \rightarrow V$$

dicesi un ISOMORFISMO se esiste un'applicazione lineare

$$g : V \rightarrow U$$

tale che

$$g \circ f = id_U \quad , \quad f \circ g = id_V .$$

In particolare, se $U \equiv V$, f si dice un AUTOMORFISMO.

0.2.3. Se un'applicazione lineare f è invertibile, allora anche l'inversa f^{-1} è lineare e dunque f(ed f^{-1}) è un isomorfismo.

PROPOSIZIONE Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti

a) f è un isomorfimo;

b) f è biiettiva .

0.2.4. PROPOSIZIONE Sia $\dim U = n$. Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare e $B \equiv \{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\}$ una base di U.

Allora, f è caratterizzata dai valori che essa assume sui vettori della base B. Più precisamente, per ogni $\bar{x} \equiv x^i\bar{u}_i \in U$ è

$$f(x^i\bar{u}_i) = x^i f(\bar{u}_i) \quad .$$

Dunque, l'immagine di f, ossia $f(U) \equiv Im(f)$, è il sottospazio vettoriale di V generato dai vettori $f(\bar{u}_i)$.

0.2.5. Diamo, allora, la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Dicesi RANGO di f la dimensione di $Im(f)$.

Si vede che è rango $(f) \leq \dim V$.

0.2.6. Il concetto di immagine non dipende dalla linearità di f; invece se f è lineare, si ha anche il concetto di "nucleo" che ha proprietà di tipo "duale" rispetto a quelle di immagine.

DEFINIZIONE Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare.

Dicesi NUCLEO di f il sottoinsieme di U

$$Ker(f) \equiv f^{-1}(\bar{o}) \quad ,$$

costituito dai vettori $\bar{u} \in V$, tali che $f(\bar{u}) = \bar{o}$.

Si vede che $Ker(f)$ è un sottospazio di U .

0.2.7. TEOREMA Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare.

Allora, è

$$\dim V = \dim Im(f) + \dim Ker(f) \quad .$$

0.2.8. Sia $\dim U = n$ e $\dim V = m$.

Siano $B \equiv \{\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_n\}$ e $B' \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$ rispettivamente basi di U e V. Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare.

Si indica con

$$M^{B'}{}_{B}(f) \subset M^m{}_n$$

la matrice di f, relativa alle basi B e B', ossia la matrice ad m righe ed n colonne i cui elementi sono

$$f^i{}_j \equiv (f(\bar{u}_j))^i \ .$$

Si noti che la matrice rappresentante f dipende dalla scelta delle basi.

Quando consideriamo fissate le basi B e B', scriviamo (f) o $(f^i{}_j)$ al posto di $M^{B'}_{B}(f)$.

Si osservi, inoltre, che abbiamo usato usato la convenzione di scrivere, come primo indice, quello relativo allo spazio d'arrivo e, come secondo indice, quello relativo allo spazio di partenza. In tal modo si ritrovano accostati gli indici che devono essere saturati, essendo

$$(f(\bar{x}))^i \equiv (f(x^j\bar{v}_j))^i = x^j(f(\bar{v}_j))^i \equiv f^i{}_j x^j \ .$$

Pertanto, d'ora in poi useremo questa convenzione.

0.2.9. PROPOSIZIONE

L'insieme $L(U,V)$ delle applicazioni lineari $f : U \to V$ ha una struttura naturale di spazio vettoriale, che si definiscono le operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari nel modo seguente

$$(f+g)(\bar{u}) \equiv f(\bar{u}) + g(\bar{u})$$

$$(\lambda \cdot f)(\bar{u}) \equiv \lambda \cdot f(\bar{u}) \qquad \forall\, \bar{u} \in U \quad \dot{-}$$

Ogni spazio vettoriale V induce i seguenti spazi vettoriali notevoli

$$L(\mathbb{R},V) \quad , \quad L(V,V) \quad , \quad L(V,\mathbb{R}) \equiv V^* \ .$$

1) $L(R,V)$

E' possibile identificare V e $L(\mathbb{R},V)$ mediante l'isomorfismo canonico

$$L(\mathbb{R},V) \approx V$$

dato da

$$f \mapsto f(1) \quad .$$

2) $L(V,V)$

Lo spazio vettoriale $L(V,V)$ viene indicato anche con $End(V)$ ed ogni suo elemento, che è un endomorfismo, è detto anche un "operatore lineare".

Inoltre, l'insieme $GL(V)$ costituito dagli automorfismi $V \to V$, con l'operazione di composizione, è un gruppo.

0.2.10. Studiamo ora le nozioni di "autovalore" ed "autovettore" di un operatore lineare, che hanno un importante significato pratico, oltre che teorico.

DEFINIZIONE Sia $h \in L(V,V) \equiv End(V)$.

Un vettore $\bar{v} \in V$ si dice AUTOVETTORE di h se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, tale che

$$h(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \quad .$$

Se $\bar{v} \neq \bar{o}$, si dice che λ è un AUTOVALORE di h e si dice che $\bar{v}$ ha λ come autovalore .

Dunque, si vede subito che $\bar{o} \in V$ è un autovettore banale, ma non si riesce a definire l'autovalore associato perché è indeterminato. Inoltre, se $\bar{v} \neq \bar{o}$ è un autovettore, si vede che l'autovalore associato è unico. Per maggiori dettagli si veda [11] .

3) $L(V,\mathbb{R}) \equiv V^*$

Lo spazio vettoriale $L(V,\mathbb{R}) \equiv V^*$ è detto "duale" di V e i suoi elementi si dicono "forme lineari".

In seguito, verranno sottolineati i suoi elementi.

Se V ha dimensione finita, allora V e V^* sono isomorfi; però, non esiste, in generale, un isomorfismo canonico tra V e V^*.

Vedremo, invece, che, se nello spazio vettoriale V è definita una "moltiplicazione scalare" allora, essa induce un ben determinato isomorfismo $V \approx V^*$, con il quale è possibile identificare, in modo naturale, vettori e forme lineari, ossia elementi di V ed elementi di V^*.

0.2.11. DEFINIZIONE

Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare.

Dicesi TRASPOSTA di f l'applicazione lineare

$$f^* : V^* \to U^*$$

data da $$f^* : \underline{\nu} \mapsto \underline{\nu} \circ f \, .$$

0.2.12. TEOREMA Sia $\dim V = n$.

Sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ una base di V.

Allora, le n forme lineari $\underline{\nu}^1, \dots, \underline{\nu}^n \in V^*$ date da

$$\underline{\nu}^i(\bar{v}_j) \equiv \delta^i_{\ j} \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

costituiscono una base di V^*, indicata con $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \dots \underline{\nu}^n\}$, detta la "duale" di B $\underline{.}$

0.2.13. PROPOSIZIONE Sia $\dim V = n$, e sia $B \equiv \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n\}$ una base di V.

a) Ogni $\underline{f} \in V^*$ si scrive in uno e un solo modo come combinazione lineare delle forme $\underline{\nu}^1,\dots,\underline{\nu}^n$. Più precisamente, è

$$\underline{f} \equiv f_i\, \underline{\nu}^i$$

dove

$$f_i \equiv f(\bar{v}_i) \;.$$

b) Dunque, l'insieme $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1,\dots,\underline{\nu}^n\}$ è la base di V^*, che determina l'isomorfismo della rappresentazione matriciale di V^*, relativa a B (ed alla base canonica di $\mathbb{R}$)

$$V^* \approx M_n \;.$$

c) Dunque, è

$$\dim V^* = n = \dim V.$$

d) Se

$$\underline{f} \equiv f_i\, \underline{\nu}^i \in V^*$$

e se

$$\bar{x} \equiv x^i \bar{v}_i \in V,$$

allora, è

$$\underline{f}(\bar{x}) = f_i x^i \qquad \underline{.}$$

0.2.14. DEFINIZIONE Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Dicesi BIDUALE di V lo spazio vettoriale

$$V^{**} \equiv L(V^{*}, \mathbb{R}) \equiv L(L(V,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \quad .$$

Identificheremo V^{**} con V, mediante l'isomorfismo naturale, $V \to V^{**}$ indotto dalla regola

$$\bar{x}(\underline{f}) \equiv \underline{f}(\bar{x}).$$

Per ragioni di simmetria, adotteremo anche il simbolo

$$\bar{x}(\underline{f}) \equiv < \underline{f},\bar{x} > \equiv \underline{f}(\bar{x}) \ .$$

3 APPLICAZIONI MULTILINEARI

0 La nozione di applicazione "multilineare" costituisce una generalizzazione di quella di applicazione lineare.

I casi di maggiore interesse sono le forme bilineari "simmetriche" e le forme n-lineari "antisimmetriche" (in uno spazio vettoriale di n dimensioni).

0.3.1. DEFINIZIONE Siano $U_1, \ldots, U_p$, V $p+1$ spazi vettoriali.

Un'applicazione

$$f : U_1 \times \ldots \times U_p \to V$$

si dice P-LINEARE se è lineare rispetto ad ognuna delle p variabili.

Se $V \equiv \mathbb{R}$, allora, f si dice "forma p-lineare" .

0.3.2. PROPOSIZIONE

L'insieme

$$L(U_1, \ldots, U_p \; ; V)$$

delle applicazioni p-lineari

$$U_1 \times \ldots \times U_p \to V$$

con le operazioni naturali di addizione e di moltiplicazione per gli scalari, è uno spazio vettoriale .

Se $U_1 \equiv \ldots \equiv U_p \equiv U$, scriviamo $L(U_1, \ldots, U_p \; ; V) \equiv L^p(U,V)$.

Se, inoltre, è $V \equiv \mathbb{R}$ si pone $L(U_1, \ldots, U_p \; ; V) \equiv L^p(U)$.

0.3.3. Siano U,V spazi vettoriali, rispettivamente, di dimensioni n,m.

Sia $f : U\times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare. Siano $B \equiv \{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n\}$ e $B' \equiv \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m\}$ basi rispettivamente di U e V.

Si indica con

$$M_{BB'}(f) \subset M_{nm}$$

la matrice di f, relativa alle basi B e B', i cui elementi sono dati da

$$f_{ij} \equiv f(\bar{u}_i,\bar{v}_j).$$

Si noti che la matrice rappresentante f dipende dalla scelta delle basi. Quando consideriamo fissate B e B', scriviamo (f) o (f_{ij}) al posto di $M_{BB'}(f)$.

0.3.4. Quando un'applicazione p-lineare dipende da p variabili dello stesso spazio vettoriale è interessante notare come varia il risultato se si effettuano delle permutazioni di posto tra le variabili.

DEFINIZIONE Sia $f : U\times \dots \times U \to V$

un'applicazione p-lineare.

Si dice che f è SIMMETRICA se è invariante rispetto ad ogni permutazione.

Si dice che f è ANTISIMMETRICA se è invariante rispetto alle permutazioni pari, mentre cambia segno per quelle dispari.

0.3.5. Possiamo caratterizzare l'antisimmetria mediante la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE Siano U,V spazi vettoriali. Sia $f : U\times..\times U \to V$ un'applicazione p-lineare.

Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) f è antisimmetrica;

b) f è "alternata"; cioé $\forall \bar{u}_1,\dots,\bar{u}_p \in U$ se è $\bar{u}_i = \bar{u}_j$ con $i \neq j$, allora

$$f(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_i,\dots,\bar{u}_j,\dots,\bar{u}_p) = 0 \qquad \dot{-}$$

4 ALGEBRA TENSORIALE

0 La nozione di "prodotto tensoriale" fornisce un algoritmo di calcolo che permette di trasformare le applicazioni multilineari in dei nuovi enti detti "tensori", i quali rendono più evidenti certe proprietà formali delle prime.

Se V è uno spazio vettoriale, si possono costruire (per ogni intero p,q) gli spazi vettoriali

$$\otimes^{p}_{q} V \equiv \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^{*} \otimes \ldots \otimes V^{*}}_{q \text{ volte}}.$$

Gli elementi di $\otimes^{p}_{q} V$ sono detti "tensori p volte controvarianti e q volte covarianti". Dunque, tensori dello stesso tipo possono essere sommati e moltiplicati scalarmente; tensori di tipo qualunque possono essere moltiplicati tensorialmente.

C'è, poi, l'operazione c^{i}_{j} di "contrazione" dell'indice controvariante i-mo con l'indice covariante j-mo, che abbassa di uno, sia il grado di controvarianza che quello di covarianza.

La più importante contrazione è la "traccia", che associa un numero reale ad ogni tensore una volta controvariante ed una volta covariante.

Siano, dunque, U e V due spazi vettoriali.

0.4.1. DEFINIZIONE

Dicesi PRODOTTO TENSORIALE di U e V lo spazio vettoriale

$$U \otimes V$$

costituito da tutte le combinazioni formali del tipo

$$\bar{x} \equiv x^{ij}\,\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j$$

con $x^{ij} \in \mathbb{R}$, $\bar{u}_i \in U$, $\bar{v}_j \in V$, munito delle seguenti operazioni

$$+ : (U \otimes V) \times (U \otimes V) \to U \otimes V$$

così indicata $\quad + : (\bar{x},\bar{y}) \mapsto \bar{x}+\bar{y} \equiv (x^{ij} + y^{ij})\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j \quad ,$

$$\cdot : \mathbb{R} \times (U \otimes V) \to U \otimes V$$

così indicata $\quad \cdot : (\lambda,\bar{x}) \mapsto \lambda\cdot\bar{x} \equiv (\lambda\cdot x^{ij})\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j$

e con l'unica condizione che la moltiplicazione tensoriale

$$t : U \times V \to U \otimes V$$

data da $\quad t : (\bar{u},\bar{v}) \mapsto \bar{u} \otimes \bar{v}$

sia bilineare .

In modo naturale, si estende la definizione al prodotto tensoriale di p spazi vettoriali e lo si indica con

$$\bigotimes_{i=1}^{p} U_i \equiv U_1 \otimes \ldots \otimes U_p \quad .$$

In particolare, poniamo

$$\otimes^p_q U \equiv \underbrace{U \otimes \ldots \otimes U}_{p \text{ volte}} \otimes \underbrace{U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{q \text{ volte}}$$

Per una definizione più rigorosa, si veda [11] .

0.4.2. PROPOSIZIONE Siano U e V due spazi vettoriali rispettivamente di dimensioni n,m.

Siano $B \equiv \{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n\}$ e $B' \equiv \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m\}$ basi, rispettivamente, di U e V. Allora è

$$\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V.$$

Inoltre

$$B \otimes B' \equiv \{\bar{u}_1 \otimes \bar{v}_1,\dots,\bar{u}_n \otimes \bar{v}_m\}$$

costituita da $n \cdot m$ elementi, è una base di $U \otimes V$.

Sicché, ogni vettore di $U \otimes V$ si esprime in modo unico

$$\bar{x} = x^{ij}\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j$$

ed è completamente rappresentato dalla matrice delle sue componenti

$$M^{BB'}(\bar{x}) \equiv (x^{ij}) .$$

Si noti che la matrice rappresentante $\bar{x}$ dipende dalla scelta delle basi. Quando consideriamo fissate le basi B e B', scriviamo $(\bar{x})$ al posto di $M^{BB'}(\bar{x})$.

0.4.3. La proprietà più importante del prodotto tensoriale consiste nel fatto che esso permette di trasformare applicazioni bilineari in lineari. Consideriamo, dunque, uno spazio vettoriale W e sia $f : U \times V \to W$ un'applicazione bilineare. Allora, vale la seguente proprietà universale.

TEOREMA

Esiste un'unica applicazione lineare

$$\tilde{f} : U \otimes V \to W$$

tale che

$$\tilde{f}(\bar{u} \otimes \bar{v}) = f(\bar{u},\bar{v}) \quad ,$$

ossia, tale che

$$\tilde{f} \circ t = f \; .$$

Più precisamente, è

$$\tilde{f}(x^{ij}\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j) = x^{ij} f(\bar{u}_i,\bar{v}_j) \quad \dot{-}$$

Esiste un isomorfismo canonico

$$U \otimes V \quad \rightarrow \quad V \otimes U$$

mediante il quale faremo, talvolta, l'identificazione

$$U \otimes V \equiv V \otimes U \; .$$

0.4.4. E' possibile dare la nozione di prodotto tensoriale di applicazioni lineari, in modo naturale, compatibile con la loro composizione. In tal modo, il prodotto tensoriale risulta essere un funtore covariante.

PROPOSIZIONE Siano $h : U \rightarrow U'$ e $k : V \rightarrow V'$ applicazioni lineari.

Allora, esiste un'unica applicazione lineare

$$h \otimes k \; : \; U \otimes V \; \rightarrow U' \otimes V'$$

tale che

$$(h \otimes k)(\bar{u} \otimes \bar{v}) = h(\bar{u}) \otimes k(\bar{v}) \quad ,$$

cioé, tale che

$$(h \otimes k) \circ t = t' \circ (h \otimes k)$$

dove $t : U \times V \to U \otimes V$, $t' : U' \times V' \to U' \otimes V'$,

$(h \times k) : U \times V \to U' \times V'$.

Più precisamente, è

$$h \otimes k(x^{ij}\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j) = x^{ij}h(\bar{u}_i) \otimes k(\bar{v}_j) \qquad \forall\ x^{ij}\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j \in U \otimes V.$$

Inoltre, si considerino B_1, B'_1, B_2, B'_2 basi rispettivamente di U, U', V, V' e $B_1 \otimes B_2$, $B'_1 \otimes B'_2$ le basi indotte in $U \otimes V$ e $U' \otimes V'$, rispettivamente. Allora, relativamente a queste basi, la matrice di $h \otimes k$ è data da

$$(h \otimes k)^{rs}{}_{ij} = h^r{}_i \cdot k^s{}_j \ .$$

Tale applicazione è detta prodotto tensoriale di h e k.

Il prodotto tensoriale di applicazioni lineari si comporta, in modo naturale, nei riguardi della loro composizione.

Si vede che l'applicazione

$$\otimes : L(U,U') \times L(V,V') \to L(U \otimes V, U' \otimes V')$$

data da $\qquad \otimes : (h,k) \mapsto h \otimes k$

è un'applicazione bilineare.

0.4.5. TEOREMA

Se le dimensioni di U, U', V, V' sono finite, allora l'applicazione

$$\tilde{\otimes} : L(U,U') \times L(V,V') \to L(U \times V,\ U' \times V')$$

data da

$$\tilde{\otimes}(h \otimes k) \equiv \otimes\,(h,k) \quad ,$$

è un isomorfismo.

Da questo teorema discendono degli importanti corollari che forniscono delle regole pratiche, permettendo di identificare, tramite isomorfismi canonici, i seguenti spazi vettoriali

$$U \otimes V^* \underset{\sim}{\sim} L(V,U) \quad , \quad U^* \otimes V^* \underset{\sim}{\sim} (U \otimes V)^* \quad , \quad L^2(U) \underset{\sim}{\sim} U^* \otimes U^*$$

0.4.6. Sia $B_1 \equiv \{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n\}$ e $B_2 \equiv \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m\}$ basi di U e V, e siano $B_1^* \equiv \{\underline{u}^1,\dots,\underline{u}^n\}$ e $B_2^* \equiv \{\underline{\nu}^1,\dots,\underline{\nu}^m\}$ le basi duali di B_1 e B_2. Abbiamo, allora, le seguenti regole.

I REGOLA

Identifichiamo

- la base di $L(V,U)$, indotta da B_1 e B_2, con

$$B_1 \otimes B_2^* \equiv \{\bar{u}_1 \otimes \underline{\nu}^1,\dots,\bar{u}_i \otimes \underline{\nu}^j,\dots,\bar{u}_n \otimes \underline{\nu}^m\},$$

ossia, scriviamo

$$\bar{u}_i \otimes \underline{\nu}^j : \bar{v}_h \mapsto \bar{u}_i\ \underline{\nu}^j(\bar{v}_h) = \delta^j_h \bar{u}_i \qquad ;$$

- ogni vettore

$$f \equiv f^i_{\ j} \bar{u}_i \otimes \underline{\nu}^j \quad \in \quad U \otimes V^*$$

con l'applicazione $f \in L(V,U)$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, ossia che è data da

$$f(\bar{x}) = f^i_{\ j} x^j \bar{u}_i \quad , \qquad \forall\ \bar{x} \equiv x^j \bar{v}_j \in V \ ;$$

- ogni applicazione lineare $f \in L(U,V)$, con il vettore $f \in U \otimes V^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, scrivendo

$$f = f^i_{\ j} \bar{u}_i \otimes \underline{\nu}^j \qquad ,$$

dove $f^i_{\ j} \equiv \langle\ \underline{u}^i,\ f(\bar{v}_j)\ \rangle$ sono gli elementi della matrice di $f \in L(U,V)$.

II REGOLA

Identifichiamo

- la base di $(U \otimes V)^*$, indotta da B_1 e B_2 eon

$$B_1^* \otimes B_2^* \equiv \{\underline{u}^1 \otimes \underline{\nu}^1, \ldots, \underline{u}^i \otimes \underline{\nu}^j, \ldots, \underline{u}^n \otimes \underline{\nu}^m\}$$

ossia, scriviamo

$$\underline{u}^i \otimes \underline{\nu}^j :\ \bar{u}_h \otimes \bar{v}_k \ \mapsto \ \underline{u}^i(\bar{u}_h)\underline{\nu}^j(\bar{v}_k) = \delta^i_{\ h}\ \delta^j_{\ k} \ ;$$

- ogni vettore

$$f \equiv f_{ij} \underline{u}^i \otimes \underline{\nu}^j \qquad \in \qquad U^* \otimes V^*$$

con la forma lineare $f \in (U \otimes V)^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, ossia, che è data da

$$f(\bar{x}) = f_{ij} x^{ij} \; ; \qquad \forall\, \bar{x} \equiv x^{ij} \bar{u}_i \otimes \bar{v}_j \in U \otimes V;$$

- ogni forma lineare $f \in (U \otimes V)^*$ con il vettore $f \in U^* \otimes V^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, scrivendo

$$f = f_{ij} \underline{u}^i \otimes \underline{v}^j \quad ,$$

dove $f_{ij} \equiv f(\bar{u}_i, \bar{v}_j)$ sono gli elementi della matrice di $f \in (U \otimes V)^*$.

III REGOLA

Identifichiamo

- la base di $L^2(U)$, indotta da B_1, con

$$B_1^* \otimes B_1^* \equiv \{\underline{u}^1 \otimes \underline{u}^1, \; \ldots, \; \underline{u}^i \otimes \underline{u}^j, \ldots, \; \underline{u}^n \otimes \underline{u}^n\}$$

ossia, scriviamo

$$\underline{u}^i \otimes \underline{u}^j \; : \; (\bar{u}_h, \bar{u}_k) \mapsto \underline{u}^i(\bar{u}_h)\underline{u}^j(\bar{u}_k) = \delta^i{}_h \delta^j{}_k \quad ;$$

- ogni vettore

$$f \equiv f_{ij} \underline{u}^i \otimes \underline{u}^j \quad \in \quad U^* \otimes U^*$$

con la forma bilineare $f \in L^2(U)$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, ossia, che è data da

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \equiv f_{ij} x^i y^j \quad , \qquad \forall\, \bar{x} \equiv x^i \bar{u}_i, \;\; \bar{y} \equiv y^j \bar{u}_j \in U;$$

- ogni forma bilineare $f \in L^2(U)$ con il vettore $f \in U^* \otimes U^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, scrivendo

$$f = f_{ij}\, \underline{u}^i \otimes \underline{u}^j \quad ,$$

dove $f_{ij} \equiv f(\bar{u}_i, \bar{u}_j)$ sono gli elementi della matrice di $f \in L^2(U)$.

5 CONTRAZIONI NELL'ALGEBRA TENSORIALE MISTA. TRACCIA

0 Sia V uno spazio vettoriale.

Esiste un'applicazione lineare naturale che permette di "contrarre" un indice controvariante con un indice covariante dei tensori misti, abbassando di una unità il numero degli indici controvarianti e quello degli indici covarianti.

L'esistenza di tale contrazione è una conseguenza immediata della proprietà del prodotto tensoriale e del fatto che esiste una forma bilineare canonica

$$V \times V^* \to \mathbb{R}$$

data da $$(\bar{v}, \underline{\nu}) \mapsto \langle \underline{\nu}, \bar{v} \rangle .$$

0.5.1. Fra tutte le contrazioni, la più importante è la più semplice, ossia quella $V \otimes V^* \to \mathbb{R}$, che è detta "traccia".

PROPOSIZIONE

Esiste un'unica forma lineare

$$tr : V \otimes V^* \to \mathbb{R}$$

tale che $$tr : \bar{v} \otimes \underline{\nu} \mapsto \langle \underline{\nu}, \bar{v} \rangle .$$

Più precisamente, è

$$tr(x^i{}_j \bar{v}_i \otimes \underline{\nu}^j) = x^i{}_j \underline{\nu}^j(\bar{v}_i) \qquad \forall\, x^i{}_j \bar{v}_i \otimes \underline{\nu}^j \in V \otimes V^* \; .$$

Sia, poi, $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base di V e sia $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \ldots, \underline{\nu}^n\}$

la base duale di B.

Allora, è

$$\mathrm{tr}(x^i_j \bar{v}_i \otimes \underline{\nu}^j) = x^i_i \qquad \forall\, x^i_j \bar{v}_i \otimes \underline{\nu}^j \in V \otimes V^*.$$

Analoghe considerazioni possono essere stabilite per una forma lineare

$$\mathrm{tr} : V^* \otimes V \to \mathbb{R} .$$

Tali forme lineari si dicono "traccia".

In particolare, è

$$\mathrm{tr}(id_V) = n = \dim V.$$

0.5.2. Le considerazioni precedenti si estendono a tutti i tensori misti nel modo seguente.

DEFINIZIONE Sia $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$.

Dicesi CONTRAZIONE dell'i-mo indice controvariante con il j-mo indice covariante l'unica applicazione lineare

$$c^i_j : \overset{p}{\underset{q}{\otimes}} V \to \overset{p-1}{\underset{q-1}{\otimes}} V$$

data da

$$c^i_j : (\bar{v}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{v}_p \otimes \underline{\nu}^1 \otimes \ldots \otimes \underline{\nu}^q) \mapsto \underline{\nu}^j(\bar{v}_i) \cdot \bar{v}_1 \otimes \ldots \otimes \hat{\bar{v}}_i \otimes \ldots \otimes \bar{v}_p \otimes$$
$$\otimes\, \underline{\nu}^1 \otimes \ldots \otimes \hat{\underline{\nu}}^j \otimes \ldots \otimes \underline{\nu}^q .$$

dove " $\wedge$ " significa "omesso"

In particolare, è $c^1_1 = tr.$

La contrazione gode della seguente proprietà

$$c^i_j \circ c^r_s = c^{r-1}_{s-1} \circ c^i_j \qquad \text{se} \quad r>i \ , \quad s>j.$$

E' utile fare alcune convenzioni di scrittura, per il caso in cui si devono eseguire più contrazioni.

a) Se $1 \leq i_1 < \ldots\ldots < i_r \leq p$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq q$, si pone

$$c^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r} \equiv c^{i_1}_{j_1} \circ \ldots\ldots \circ c^{i_r}_{j_r}$$

b) Se $o<p\leq q$, allora si pone

$$i_{\bar{x}}\, y \equiv c^{1 \ldots p}_{1 \ldots p}\, \bar{x} \otimes y \qquad \forall\ \bar{x} \in \otimes^p V,\ y \in \otimes^r_q V$$

se $o < q \leq p$, allora si pone

$$i_{\underline{y}}\, x \equiv c^{1 \ldots q}_{1 \ldots q}\, \underline{y} \otimes x \qquad \forall\ \underline{y} \in \otimes^q V^*\ ,\ x \in \otimes^p_r V$$

se $p = o$, allora si pone

$$i_\lambda x \equiv \lambda x \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \otimes^r_q V.$$

0.5.3. La contrazione i gode di alcune semplici proprietà.

PROPOSIZIONE Sia $p \leq q$.

a) L'applicazione

$$i : \otimes^p V \times \otimes^q V^* \to \otimes^{q-p} V^*$$

data da $\qquad i : (\bar{x},\underline{y}) \mapsto i_{\bar{x}}\,\underline{y}$

è bilineare.

b) E' $\qquad i_{\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2}\underline{y} = i_{\bar{x}_2}\, i_{\bar{x}_1}\,\underline{y}$

$\forall\ \bar{x}_1 \in \otimes^{p_1} V, \qquad \bar{x}_2 \in \otimes^{p_2} V\ ,\ \underline{y} \in \otimes^{q} V^* \qquad$ con $\ p_1 + p_2 = p.$

0.5.4. Procedendo nell'identificazione dei tensori con applicazioni lineari e multilineari, possiamo tradurre in termini di contrazione tensoriale varie formule riguardanti la composizione di applicazioni lineari e multilineari.

PROPOSIZIONE Sia V uno spazio vettoriale a dimensione finita. Si considerino le seguenti identificazioni canoniche

$$\otimes^1_1 V \equiv L(V,V) \qquad , \qquad \otimes^0_2 V \equiv L^2(V) \quad .$$

a) E' $\ h(\bar{x}) = c^2_1(h \otimes \bar{x}) = i_{\bar{x}}\, h \qquad \forall\ h \in L(V,V),\ \bar{x} \in V.$

b) E' $\ f(\bar{x},\bar{y}) = c^{12}_{12}\ (f \otimes \bar{x} \otimes \bar{y}) = i_{\bar{x} \otimes \bar{y}} f, \ \forall\ f \in L^2(V)\ ,\ \bar{x},\bar{y} \in V.$

c) E' $\ h \circ k = C^2_1(h \otimes k) \qquad \forall\ h,k \in L(V,V).$

d) E' $\ f \circ (h x k) = c^{12}_{12}(f \otimes h \otimes k) \qquad \forall\ f \in L^2(V)\ ,\ h,k \in L(V,V)$.

0.5.5. PROPOSIZIONE Sia $p \leq q$.

La contrazione

$$i : \otimes^p V \times \otimes^q V^* \to \otimes^{q-p} V^*$$

è caratterizzata dalla seguente formula.

Siano $\bar{x} \in \otimes^{p} V$, $\underline{y} \in \otimes^{q} V^{*}$, allora

$$i_{\bar{x}}\ \underline{y} \in \otimes^{q-p} V^{*}$$

è l'unico tensore, tale che

$$< i_{\bar{x}}\ \underline{y}\ ,\ \bar{z} > \equiv <\underline{y}\ ,\ \bar{x} \otimes \bar{z}>\ ,\ \forall\ \bar{z} \in \otimes^{q-p} V\ .$$

0.5.6. DEFINIZIONE Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Dicesi TENSORE FONDAMENTALE di V il tensore

$$\hat{1} \in V \otimes V^{*} \quad \text{o} \quad \hat{1} \in V^{*} \otimes V,$$

dato da

$$\hat{1} \equiv \delta^{i}{}_{j}\, \bar{v}_{i} \otimes \underline{\nu}^{j} \quad , \quad \hat{1} \equiv \delta^{i}{}_{j}\, \underline{\nu}^{j} \otimes \bar{v}_{i}$$

se $B \equiv \{\bar{v}_{1},\dots,\bar{v}_{n}\}$ è una base di V e $B^{*} \equiv \{\underline{\nu}^{1},\dots,\underline{\nu}^{n}\}$ è la sua base duale .

6 ALGEBRA ESTERNA : TENSORI SIMMETRICI ED ANTISIMMETRICI.

0 Sia U uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Come per le applicazioni multilineari anche per i tensori $\bar{x} \in \otimes^p U$ ha senso fare delle permutazioni degli indici e vedere se queste lasciano invariato o no $\bar{x}$.

Indichiamo con Σ_p l'insieme delle possibili permutazioni di $J_p \equiv \{1,\dots,p\}$ e con $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$ il segno della permutazione σ, dove m è il numero delle inversioni di σ , ossia il numero delle coppie $(i,j) \in J_p \times J_p$ tale che

$$1 \leq i < j \leq p \quad \text{e} \quad \sigma(i) > \sigma(j) \quad .$$

0.6.1. PROPOSIZIONE Sia p un intero positivo e $\sigma \in \Sigma_p$ una permutazione. Allora esiste un unico isomorfismo

$$\tilde{\sigma} : \otimes^p U \to \otimes^p U$$

tale che $$\tilde{\sigma} : \bar{u}_1 \otimes \dots \otimes \bar{u}_p \mapsto \bar{u}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \bar{u}_{\sigma^{-1}(p)} \quad \dot{-}$$

0.6.2. DEFINIZIONE Sia $\bar{x} \in \otimes^p U$.

Si dice che $\bar{x}$ è SIMMETRICO se è $\tilde{\sigma}(\bar{x}) = \bar{x}$, $\forall \sigma \in \Sigma_p$.

Si dice che $\bar{x}$ è ANTISIMMETRICO se è $\tilde{\sigma}(\bar{x}) = \varepsilon(\sigma)\bar{x}$, $\forall \sigma \in \Sigma_p$ $\dot{-}$

Gli insiemi dei tensori simmetrici e dei tensori antisimmetrici di grado p costituiscono due sottospazi vettoriali di $\otimes^p U$ che si indicano rispettivamente con $V^p U$ e $\Lambda^p U$.

0.6.3. Per poter costruire tensori simmetrici ed antisimmetrici di ordine p a partire da tensori qualsiasi, si definiscono degli opportuni operatori.

DEFINIZIONE

Dicesi OPERATORE DI SIMMETRIZZAZIONE l'applicazione

$$S : \otimes^p U \to \otimes^p U$$

data da

$$S \equiv \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \tilde{\sigma} \quad .$$

Dicesi OPERATORE DI ANTISIMMETRIZZAZIONE l'applicazione

$$A : \otimes^p U \to \otimes^p U$$

data da

$$A \equiv \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \varepsilon(\sigma)\tilde{\sigma} \ .$$

0.6.4. DEFINIZIONE

Dicesi MOLTIPLICAZIONE TENSORIALE SIMMETRICA l'applicazione

$$s \equiv S \circ t : U^p \to V^p U$$

data da

$$s : (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p) \mapsto \bar{u}_1 \vee \dots \vee \bar{u}_p \equiv \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \bar{u}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \bar{u}_{\sigma(p)} \quad .$$

Dicesi MOLTIPLICAZIONE TENSORIALE ANTISIMMETRICA l'applicazione

$$a \equiv A \circ t : U^p \to \Lambda^p U$$

data da $\quad a : (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p) \mapsto \bar{u}_1 \wedge \dots \wedge \bar{u}_p \equiv \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \varepsilon(\sigma) \bar{u}_{\sigma(1)} \times \dots \times \bar{u}_{\sigma(p)}$ $\dot{-}$

0.6.5. DEFINIZIONE

Un tensore $\bar{x} \in \Lambda^p U$ $(\bar{x} \in V^p U)$ si dice DECOMPONIBILE se esistono $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p \in U$ tali che

$$\bar{x} = \bar{u}_1 \wedge \dots \wedge \bar{u}_p \qquad (\bar{x} = \bar{u}_1 \vee \dots \vee \bar{u}_p) \quad \dot{-}$$

Se $B \equiv \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ è una base di U, allora $B' \equiv \{\bar{u}_{i_1} \vee \dots \vee \bar{u}_{i_p}\}$ con $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n$ e $B'' \equiv \{\bar{u}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{i_p}\}$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ sono basi rispettivamente di $V^p U$ e $\Lambda^p U$.

Inoltre, è

$$\dim V^p U = \binom{p+n-1}{p}, \quad \dim \Lambda^p U = \binom{n}{p} \quad \text{se} \quad \dim U = n.$$

In particolare, se $p = n$, allora è $\dim \Lambda^n U = 1$, allora, $\bar{u}_1 \wedge \dots \wedge \bar{u}_n$ è una base di $\Lambda^n U$, indotta da B.

Questo fatto permette di trasportare i problemi relativi ad uno spazio vettoriale U di dimensione n allo spazio vettoriale $\Lambda^n U$ di dimensione 1. Pertanto gli spazi $\Lambda^p U$ sono molto interessanti e d'ora in poi ci soffermiamo a studiare i tensori antisimmetrici.

0.6.6. TEOREMA

E' equivalente stabilire se $B \equiv \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ è una base di U o se $B' \equiv \{\bar{u}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{u}_n\}$ è una base di $\Lambda^n U$, ossia se l'unico vettore di B' è diverso da quello nullo.

0.6.7. Introduciamo, innanzitutto, il concetto di "orientazione" di uno spazio vettoriale U di dimensione 1.

Se $\bar{u}, \bar{u}' \in U$ sono due vettori non nulli, allora esiste un unico $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, tale che $\bar{u}' = \lambda \bar{u}$.

Si vede, allora, che la relazione binaria definita in $U - \{\bar{o}\}$ nel modo seguente

$$\forall\ \bar{u}, \bar{u}' \in U - \{\bar{o}\}$$
tale che $\bar{u}' = \lambda\ \bar{u}$: $(\bar{u}' \sim \bar{u}) \Longleftrightarrow (\lambda > o)$

è una relazione d'equivalenza.

Tale relazione determina due classi d'equivalenza.

0.6.8. DEFINIZIONE

Dicesi ORIENTAZIONE di U la scelta di una delle due classi d'equivalenza nell'insieme delle basi di U.

Si dice che U è orientato se è scelta un'orientazione di U.

0.6.9. Possiamo ora definire l'orientazione dello spazio vettoriale U di dimensione n.

DEFINIZIONE

Due basi ordinate $(\bar{u}_1,\dots\bar{u}_n)$, $(\bar{u}'_1,\dots\bar{u}'_n)$ di U si dicono equivalenti se è $\bar{u}_1 \wedge\dots\wedge\bar{u}_n \sim \bar{u}'_1\wedge\dots\wedge\bar{u}'_n$.

Allora, dicesi ORIENTAZIONE di U la scelta di una delle due classi d'equivalenza nell'insieme delle basi ordinate di U o corrispondentemente nell'insieme delle basi di $\Lambda^n U$.

Si noti che in generale non esiste un'orientazione canonica di U, nel senso che non c'è un modo privilegiato di scegliere una delle due orientazioni. Ci sono, però, delle eccezioni.

Ad esempio, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ha un'orientazione canonica, perché possiede una base canonica $\{\bar{e}_1,\dots\bar{e}_n\}$.

Abbiamo visto che dal teorema 0.4.5. conseguivano degli importanti corollari che fornivano alcune regole pratiche.

Ora, in questo paragrafo, facendo un discorso analogo è possibile identificare, tramite isomorfismi canonici, i seguenti spazi vettoriali

$$\Lambda^p U^* \approx (\Lambda^p U)^* \qquad , \qquad \Lambda^p U^* \approx A^p U$$

dove $A^p U$ è lo spazio vettoriale delle forme p-lineari antisimmetriche.

0.6.10. Sia $B \equiv\{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n\}$ una base di U e sia $B^* \equiv\{\underline{u}^1,\dots,\underline{u}^n\}$ la sua duale. Valgono, allora, le seguenti regole.

I REGOLA

Identifichiamo

- la base di $(\Lambda^p U)^*$, indotta da B, con

$$\Lambda^p B^* \equiv \{\underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} .$$

Ossia, scriviamo

$$\underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p} : \bar{v}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \bar{v}_{j_p} \mapsto \det(<\underline{u}^i, \bar{v}_j>) = \delta^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p}$$

(per $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n$) ;

- ogni vettore
$$\underline{f} \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p} \in \Lambda^p U^*$$

con la forma lineare $\underline{f} \in (\Lambda^p U)^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, ossia che è data da

$$\underline{f}(\bar{x}) \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} (\underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p})(\bar{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} x^{i_1 \ldots i_p}$$

$$\forall\ \bar{x} \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} x^{i_1 \ldots i_p} \bar{v}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{v}_{i_p} \in \Lambda^p U;$$

- ogni forma lineare $\underline{f} \in (\Lambda^p U)^*$ con il vettore $\underline{f} \in \Lambda^p U^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, scrivendo

$$\underline{f} = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p} ,$$

dove $f_{i_1 \ldots i_p} \equiv <\underline{f}, \bar{v}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{v}_{i_p}>$ sono gli elementi della matrice di $\underline{f} \in (\Lambda^p U)^*$.

Osserviamo che questa regola differisce dalla regola II di 0.4.6. per un fattore $p!$. Normalmente per i tensori antisimmetrici, useremo quella data poc'anzi.

II REGOLA

Identifichiamo

- la base di A^pU, indotta da B, con

$$\Lambda^p B^* \equiv \{\underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \quad .$$

Ossia, scriviamo

$$\underline{u}^{i_1} \ldots \underline{u}^{i_p} : (\bar{v}_{j_1}, \ldots, \bar{v}_{j_p}) \mapsto \det(< \underline{u}^i , \bar{v}_j >) = \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_p}_{j_p} \quad ,$$

(per $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n$) ;

- ogni vettore

$$\underline{f} \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p} \in \Lambda^p U^*$$

con la forma p-lineare alternata $\underline{f} \in A^pU$, che ha la stessa rappresen_ tazione matriciale, ossia, che è data da

$$\underline{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} (\underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p})(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \det (x)^{i_1 \ldots i_p}_{1 \ldots p}$$

dove $(x)^{i_1 \ldots i_p}_{1 \ldots p} \in M^p_p$ è ottenuta dalla matrice delle componenti di $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p$, prendendo le righe $i_1, \ldots i_p$, $\forall\ \bar{x}_1 \equiv \sum_{i_1=1}^{n} x^{i_1}_1 \bar{v}_{i_1}$, ... $\ldots, \bar{x}_p \equiv \sum_{i_p=1}^{n} x^{i_p}_p \bar{v}_{i_p} \in U$;

- ogni forma p-lineare alternata $\underline{f} \in A^pU$ con il vettore $\underline{f} \in \Lambda^p U^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, scrivendo

$$\underline{f} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p} \quad ,$$

dove $f_{i_1 \ldots i_p} \equiv < \underline{f} , (\bar{v}_{i_1}, \ldots \bar{v}_{i_p}) >$ sono gli elementi della matrice di $\underline{f} \in A^p U$.

Questa regola, invece, non è diversa dalla regola III di 0.4.6.

0.6.11. In modo analogo al 5° paragrafo, si introduce la nozione di contrazione fra gli spazi vettoriali

$$i' : \Lambda^p U \times \Lambda^q U^* \to \Lambda^{q-p} U^* \qquad \text{se} \quad p \leq q$$

data da

$$i'_{\bar{x}}\, \underline{y} = \frac{1}{p!}\, i_{\bar{x}}\, \underline{y}$$

D'ora in poi, quando non c'è pericolo di confusione e ci si riferisce ai tensori antisimmetrici, scriveremo per semplicità i al posto di i'.

PROPOSIZIONE Sia $p \leq q$.

La contrazione

$$i : \Lambda^p U \times \Lambda^q U^* \to \Lambda^{q-p} U^*$$

è caratterizzata dalla seguente formula.

Siano $\bar{x} \in \Lambda^p U$, $\underline{y} \in \Lambda^q U^*$, allora

$$i_{\bar{x}}\, \underline{y} \in \Lambda^{q-p} U^*$$

è l'unico tensore, tale che

$$\langle i_{\bar{x}}\, \underline{y}\,,\, \bar{z} \rangle \equiv \langle \underline{y}\,,\, \bar{x} \wedge \bar{z} \rangle \,, \quad \forall\, \bar{z} \in \Lambda^{q-p} U \,.$$

0.6.12. PROPOSIZIONE Sia $p \leq q$.

a) L'applicazione

$$i : \Lambda^p U \times \Lambda^q U^* \to \Lambda^{q-p} U^*$$

è bilineare.

b) E'

$$i_{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2} \underline{y} = i_{\bar{x}_2} i_{\bar{x}_1} \underline{y} \qquad , \forall \bar{x}_1 \in \Lambda^{p_1} U, \bar{x}_2 \in \Lambda^{p_2} U \ , \ \underline{y} \in \Lambda^{q} U^*$$

con $p_1 + p_2 = p$.

c) E'

$$i_{\bar{x}} \underline{y} \wedge \underline{z} = (i_{\bar{x}} \underline{y}) \wedge \underline{z} + (-1)^{q_1} \underline{y} \wedge i_{\bar{x}} \underline{z}$$

$\forall \bar{x} \in \Lambda^1 U \equiv U$, $\underline{y} \in \Lambda^{q_1} U^*$, $\underline{z} \in \Lambda^{q_2} U^*$ con $1 \leq q_1 + q_2$ $\dot{-}$

0.6.13. Introduciamo ora alcune notazioni che permettono lo studio della rappresentazione matriciale dei tensori antisimmetrici.

DEFINIZIONE Siano n, $1 \leq p \leq n$ interi.

a) Dicesi MATRICE DI ANTISIMMETRIZZAZIONE la matrice

$$\bar{\epsilon} \equiv (\epsilon^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_p}) \in M^{\overbrace{n \dots n}^{p \text{ volte}}}_{\underbrace{n \dots n}_{p \text{ volte}}}$$

data da

$$\epsilon^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_p} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } j_1, \dots, j_p \text{ sono tutti distinti e se } \{i_1, \dots, i_p\} \text{ è una permutazione pari di } \{j_1, \dots, j_p\}; \\ 0 & \text{se } j_1, \dots, j_p \text{ non sono tutti distinti o se } \{i_1, \dots, i_p\} \text{ non è una permutazione di } j_1, \dots, j_p; \\ -1 & \text{se } j_1, \dots j_p \text{ sono tutti distinti e se } \{i_1, \dots, i_p\} \text{ è una permutazione dispari di } \{j_1, \dots, j_p\}. \end{cases}$$

b) Dicesi MATRICE DI RICCI

la matrice $\bar{\epsilon} \equiv (\epsilon^{i_1 \dots i_n}) \in M^{\overbrace{n \dots n}^{n \text{ volte}}}$

o la matrice $\underline{\epsilon} \equiv (\epsilon_{i_1 \dots i_n}) \in M_{\underbrace{n \dots n}_{n \text{ volte}}}$

data da

$$\epsilon^{i_1 \dots i_n} \equiv \epsilon_{i_1 \dots i_n} \equiv \begin{cases} 1 \text{ se } \{i_1, \dots, i_n\} \text{ è una permutazione pari di } \{1, \dots, n\}; \\ 0 \text{ se } \{i_1, \dots, i_n\} \text{ non è una permutazione di } \{1, \dots, n\}; \\ -1 \text{ se } \{i_1, \dots, i_n\} \text{ è una permutazione dispari di } \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

c) Dicesi DETERMINANTE l'applicazione

$$\det : \mathbb{R}^{nn} \to \mathbb{R}$$

data da

$$\det : (x) \mapsto \det(x) \equiv \sum_{1 \le i_1, \dots, i_n \le n} \epsilon^{i_1 \dots i_n} x_{i_1 1} \dots x_{i_n n} ,$$

$\forall\, x \equiv (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{nn}$ $\dot{-}$

0.6.14. Passando, dunque, allo studio della rappresentazione matriciale, incominciamo dall'operatore di antisimmetrizzazione.

PROPOSIZIONE Sia $B \equiv \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ una base di U.

Allora, è

$$A(\bar{u}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \bar{u}_{j_p}) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} \epsilon^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} \bar{u}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \bar{u}_{j_p} .$$

Pertanto, risulta

$$A(\bar{x}) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \ldots, j_p \leq n}} \epsilon^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} x^{j_1 \ldots j_p} \bar{u}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \bar{u}_{i_p}$$

dove $\bar{x} = \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_p \leq n} x^{j_1 \ldots j_p} \bar{u}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \bar{u}_{j_p} \in \otimes^p U$.

0.6.15. Studiamo, ora, la rappresentazione matriciale dei tensori antisimmetrici.

PROPOSIZIONE Sia

$$\bar{x} = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} x^{i_1 \ldots i_p} \bar{u}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \bar{u}_{i_p} \in \otimes^p U .$$

Allora, le tre condizioni seguenti sono equivalenti

a) $\bar{x} \in \Lambda^p U$;

b) $x^{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} = \epsilon^{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}}_{i_1 \ldots i_p} x^{i_1 \ldots i_p}$, $\forall\ 1 \leq i_1 \ldots i_p \leq n,\ \sigma \in \Sigma_p$;

c) $x^{i_1 \ldots i_p} = \sum_{1 \leq j_1 \ldots j_p \leq n} \epsilon^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} x^{j_1 \ldots j_p}$.

Sia, dunque, $\bar{x} \in \Lambda^p U \subset \otimes^p U$. Allora, valgono le seguenti decomposizioni di $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \sum_{1\leq i_1,\dots,i_p\leq n} x^{i_1\dots i_p} \bar{u}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{u}_{i_p} =$$

$$= \sum_{\substack{1\leq i_1,\dots,i_p\leq n \\ 1\leq j_1,\dots,j_p\leq n}} \epsilon^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_p} x^{j_1\dots j_p} \bar{u}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{u}_{i_p} =$$

$$= \sum_{1\leq j_1,\dots,j_p\leq n} x^{j_1\dots j_p} \bar{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{v}_{j_p} \quad \dot{-}$$

Dunque, le componenti di $\bar{x}$, secondo la base $B' \equiv \{\bar{u}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{i_p}\}_{1\leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$ di $\Lambda^p U$, sono uguali alle corrispondenti componenti, secondo la base $B'' \equiv \{\bar{u}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{u}_{i_p}\}_{1\leq i_1,\dots,i_p\leq n}$ di $\otimes^p V$.

0.6.16. Studiamo, poi, la rappresentazione matriciale della moltiplicazione tensoriale antisimmetrica.

PROPOSIZIONE

E'

$$a(\bar{u}_{j_1},\dots,\bar{u}_{j_p}) \equiv \bar{u}_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{j_p} = \sum_{1\leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \epsilon^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_p} \bar{u}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{i_p} .$$

Pertanto, se

$$\bar{x}_1 \equiv \sum_{j=1}^{n} x_1^j \bar{u}_j, \dots\dots, \bar{x}_p \equiv \sum_{j=1}^{n} x_p^j \bar{u}_j \in U ,$$

allora, è

$$\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p = \sum_{1\leq j_1 < \dots < j_p \leq n} x_1^{j_1} \dots x_p^{j_p} \bar{u}_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{j_p} =$$

$$= \sum_{\substack{1\leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1\leq j_1 < \dots < j_p \leq n}} \epsilon^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_p} x_1^{j_1} \dots x_p^{j_p} \bar{u}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{i_p} =$$

$$= \sum_{\substack{1\leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ \sigma \in \Sigma_p}} \epsilon(\sigma) x_1^{i_{\sigma(1)}} \dots x_p^{i_{\sigma(p)}} \bar{u}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{i_p} ,$$

ossia, è

$$\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_p = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \det(x)^{i_1 \ldots i_p} \bar{u}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{u}_{i_p} ,$$

dove $(x)^{i_1 \ldots i_p} \in M^p_p$ è il minore ottenuto da x, prendendo le righe $i_1, \ldots, i_p$ $\dot{-}$

Dunque, le componenti $x^{i_1 \ldots i_p} \in \mathbb{R}$ di $\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_p$, secondo i vettori $\bar{u}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{u}_{i_p}$ (con $1 \lesssim i_1 < \ldots < i_p \lesssim n$) della base di $\Lambda^p U$, sono date dai determinanti dei minori $(x)^{i_1 \ldots i_p}$ della matrice (x) costituita dalle componenti di $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p$

$$x^{i_1 \ldots i_p} = \det(x)^{i_1 \ldots i_p} .$$

0.6.17. Diamo, infine, una formula che esprima il modo di variare delle componenti dei tensori antisimmetrici, relativamente ad un cambiamento di base.

PROPOSIZIONE Sia $B' \equiv \{\bar{u}'_1, \ldots, \bar{u}'_n\}$ una base di U.

Sia

$$\bar{u}'_j = \sum_{i=1}^{n} S^i_j \, \bar{u}_i .$$

Allora, è

$$\bar{u}'_{j_1} \wedge \ldots \wedge \bar{u}'_{j_p} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \det(S)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} \bar{u}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{u}_{i_p} ,$$

dove $(S)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} \in M^p_p$ è il minore ottenuto da $S \in M^n_n$

prendendo le righe $i_1, \dots, i_p$ e le colonne $j_1, \dots, j_p$.

Pertanto, se

$$\bar{x} \equiv \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} x^{i_1 \dots i_p} \, \bar{u}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{i_p} \equiv$$

$$\equiv \sum_{1 \le i_1 < \quad < i_p \le n} x'^{\, j_1 \dots j_p} \, \bar{u}'_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}'_{j_p} \; ,$$

allora, è

$$x^{i_1 \dots i_p} = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p} x'^{\, j_1 \dots j_p} \det(S)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots i_p} \; .$$

In particolare, è

$$\bar{u}'_1 \wedge \dots \wedge \bar{u}'_n = \det(S) \quad \bar{u}_1 \wedge \dots \wedge \bar{u}_n \; ,$$

e se

$$\bar{\bar{x}} \equiv x \; \bar{u}_1 \wedge \dots\dots \wedge \bar{u}_n$$

$$\equiv x' \; \bar{u}'_1 \wedge \dots \wedge \bar{u}'_n$$

allora,

$$x = \det(S) \; x'$$

7 FORMA BILINEARE SIMMETRICA

Sia V uno spazio vettoriale.

0 In questo paragrafo, fissata una forma bilineare simmetrica

$$f : V \times V \to \mathbb{R}$$

si studia la nozione di "ortogonalità" che essa induce in V.

Si dimostra che esiste sempre una base ortogonale (ne esistono infinite) rispetto ad f, cioè una base in cui la matrice di f è "diagonale"; inoltre, qualunque sia la base così fatta, il numero degli elementi diagonali positivi, negativi e nulli è invariante.

Ci si interessa, anche, della nozione di forma bilineare simmetrica "non degenere" e "definita positiva" osservando che la seconda ipotesi è più forte della prima.

Il presente paragrafo è particolarmente utile per parlare della moltiplicazione scalare negli spazi vettoriali "euclidei".

0.7.1. DEFINIZIONE Sia $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

Due vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$ di V si dicono ORTOGONALI rispetto ad f, e si scrive $\bar{u} \perp \bar{v}$

se $$f(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad .$$

Sia S un sottoinsieme di V. Dicesi ORTOGONALE di S l'insieme

$$S \equiv \{\bar{v} \in V \, / \, \bar{u} \perp \bar{v} \quad , \quad \forall \, \bar{u} \in S\} \quad .$$

Si vede che $S^{\perp}$ è un sottospazio di V.

0.7.2. DEFINIZIONE Sia $\dim V = n$. Sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base di V.

Si dice che B è ORTOGONALE rispetto ad f se è

$$f_{ij} \equiv f(\bar{v}_i , \bar{v}_j) = o \qquad \forall \, i \neq j \quad .$$

In termini matriciali, tale fatto si esprime dicendo che la matrice (f_{ij}) è diagonale.

0.7.3. DEFINIZIONE

Si dice che una forma bilineare $f : V \times V \to \mathbb{R}$ è NON DEGENERE se è

$$V^{\perp} = \bar{o} \quad ,$$

ossia, se è

$$(\forall \, \bar{v} \in V, \quad f(\bar{u} , \bar{v}) = o) \Rightarrow \bar{u} = \bar{o} \quad .$$

L'applicazione f induce un'applicazione lineare

$$'f : V \to V^*$$

così definita $\qquad 'f : \bar{v} \mapsto \underline{v} \quad ,$

dove $\qquad \underline{v} : \bar{x} \mapsto \underline{v}(\bar{x}) \equiv f(\bar{v} , \bar{x}) \; .$

0.7.4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $m > o$. Sia $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

TEOREMA (di SYLVESTER)

Esistono tre interi positivi o nulli n, o, p tali che per ogni base ortogonale $B \equiv \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m\}$, è (salvo eventuale ordinamento di B)

$$f(\bar{v}_i,\bar{v}_i) < o \qquad \text{se} \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$f(\bar{v}_i,\bar{v}_i) = o \qquad \text{se} \qquad n+1 \leq i \leq n+o$$

$$f(\bar{v}_i,\bar{v}_i) > o \qquad \text{se} \qquad n+o+1 \leq i \leq n+o+p = m \quad .$$

0.7.5. DEFINIZIONE Sia $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

Si dice che f è DEFINITA POSITIVA se è

$$f(\bar{u},\bar{u}) > o \quad , \quad \text{per ogni } \bar{o} \neq \bar{u} \in V \, .$$

8 SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI

0 In questo paragrafo si introduce la nuova struttura di spazio vettoriale euclideo, ottenuta fissando in uno spazio vettoriale, a dimensione finita, una moltiplicazione scalare.

Questo concetto è importante per la costruzione di un modello matematico dello spazio fisico, ossia, per una formulazione assiomatica della Geometria Euclidea .

0.8.1. DEFINIZIONE Si dice SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO una coppia

$$(E , \underline{g})$$

dove

- E è uno spazio vettoriale a dimensione finita;
- $\underline{g}$ è una forma bilineare

$$\underline{g} : E \times E \to \mathbb{R} \quad ,$$

così indicata $\quad \underline{g} : (\bar{x},\bar{y}) \mapsto \bar{x} \cdot \bar{y} \quad ,$

simmetrica e definita positiva, detta MOLTIPLICAZIONE SCALARE o METRICA.

0.8.2. Uno degli aspetti più importanti della metrica è la possibilità di eseguire "misure". Innanzitutto si possono misurare le "lunghezze" dei vettori.

Diamo, pertanto, la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Dicesi NORMA (relativa a $\underline{g}$) l'applicazione

$$|| \ || : E \to \mathbb{R}$$

così indicata $\quad || \ || : \bar{x} \mapsto ||\bar{x}|| \equiv (\bar{x} \cdot \bar{x})^{\frac{1}{2}}$.

Si tenga presente che l'applicazione ora definita è detta norma, perché verifica le proprietà di una norma che è un concetto più generale:

a) $||\bar{x}|| > o \qquad \forall \bar{x} \neq \bar{o} \in E$;

b) $||\lambda\bar{x}|| = |\lambda| \cdot ||\bar{x}||$

c) $||\bar{x} + \bar{y}|| \leq ||\bar{x}|| + ||\bar{y}||$.

Inoltre, è

d) $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq ||\bar{x}|| \, ||\bar{y}||$ "disuguaglianza di Schwarz".

0.8.3. DEFINIZIONE

Un vettore $\bar{v} \neq \bar{o} \in E$ si dice UNITARIO se è

$$||\bar{v}|| = 1 \quad .$$

Allora, dicesi VERSORE di $\bar{v}$ il vettore unitario

$$\text{vers } \bar{v} \equiv \bar{v}/||\bar{v}|| \ .$$

Inoltre, una base $B \equiv \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n\}$ di E si dice ORTONORMALE se è ortogonale e se i suoi vettori sono unitari .

0.8.4. Sia F un sottospazio di E. Il seguente teorema mostra che il supplementare di U è univocamente determinato.

TEOREMA

E'

$$E = F \oplus F^{\perp} \quad .$$

Nel caso particolare, in cui F è generato dal vettore $\bar{u} \neq \bar{o}$, allora ogni vettore $\bar{v} \in E$ ammette l'unica decomposizione

$$\bar{v} = \bar{v}'' + \bar{v}^{\perp} \quad ,$$

dove $\bar{v}'' = \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\bar{u}^2}\, \bar{u} \in F \quad , \; \bar{v}^{\perp} = \bar{v} - \bar{v}'' \in F^{\perp}$.

0.8.5. PROPOSIZIONE Sia F un sottospazio di E. Sia

$B' \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\} \subset F$, con $m \leq n$, una base di F, ortogonale. Sia
$B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base di E, ortogonale, ottenuta estendendo B'.

Allora, una base di $F^{\perp}$ è

$$B'' \equiv \{ \bar{v}_{m+1}, \ldots, \bar{v}_n\} \quad .$$

0.8.6. DEFINIZIONE Sia F un sottospazio di E.

Le due proiezioni della somma diretta $E = F \oplus F^{\perp}$

$$p'' \equiv \pi^1 : E \to F'' \qquad , \qquad p^{\perp} \equiv \pi^2 : E \to F^{\perp}$$

sono dette LA PROIEZIONE PARALLELA e LA PROIEZIONE ORTOGONALE .

0.8.7. Introduciamo ora la nozione di "angolo non orientato". Per far ciò è necessaria la seguente premessa.

LEMMA

Sia $\sim$ la relazione binaria in $(E - \{\bar{O}\})^2$, data da

$$(\bar{u},\bar{v}) \sim (\bar{u}' , \bar{v}') \Leftrightarrow \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||} = \frac{\bar{u}' \cdot \bar{v}'}{||\bar{u}'|| \cdot ||\bar{v}'||}$$

$\forall\ \bar{u},\bar{v},\bar{u}',\bar{v}' \in E -\{\bar{o}\}$.

Allora, $\sim$ è una relazione d'equivalenza.

Inoltre, si ha

$$(\bar{v},\bar{u}) \sim (\bar{u},\bar{v}) \sim (\lambda\ \bar{u}, \mu\ \bar{v})$$

$\forall\ \bar{u},\bar{v} \in E - \{\bar{o}\}$, λ , $\mu > o$.

Per la disuguaglianza di Schwarz è

$$- 1 \leq \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||} \leq 1 .$$

Perciò, esiste un unico numero

$$o \leq \theta \leq \pi$$

tale che

$$\cos\ \theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||}$$

dove $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'applicazione data da

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \qquad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R} .$$

Il numero θ non dipende dai rappresentanti delle classi di dove

$$<\underline{x} , \bar{v}> \equiv \bar{x} \cdot \bar{v} \qquad , \qquad \forall \bar{v} \in E.$$

Si dà, così, la nozione di forma covariante $(\underline{x})$ e controvariante $(\bar{x})$ di un vettore.

Dunque, se $\bar{x} \in E$, $B \equiv \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n\}$ è una base di E, indicheremo con x^i le componenti di $\bar{x}$ secondo la base B e con x_i le componenti di $\underline{x}$ secondo la base duale.

Si ha

$$x_i = g_{ij}x^j \quad .$$

dove $$g_{ij} \equiv \underline{g} (\bar{v}_i , \bar{v}_j) \quad .$$

L'isomorfismo $'\underline{g}$ si estende mediante $\otimes$ ai prodotti tensoriali

$$\otimes^p E \to \otimes^p E^* \quad , \Lambda^p E \to \Lambda^p E^* , V^p E \to V^p E^* \quad .$$

In particolare, la forma controvariante $\bar{g} \in \otimes^2 E$ relativa a $\underline{g} \in \otimes^2 E^*$ è caratterizzata da

$$\bar{g}(\underline{x} , \underline{y}) = \underline{g}(\bar{x} , \bar{y}) \quad .$$

La molti‿plicazione scalare si può estendere ai prodotti tensoriali nel modo seguente (mediante la proprietà universale di $\otimes$) .

$$\otimes^p E \times \otimes^p E \to \mathbb{R}$$

$$(\bar{x}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{x}_p \, , \, \bar{y}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{y}_p) \mapsto (\bar{x}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{x}_p) \cdot (\bar{y}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{y}_p) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x}_1 \cdot \bar{y}_1) \ldots (\bar{x}_p \cdot \bar{y}_p) \ .$$

In particolare risulta

$$\bar{g} \cdot \bar{g} = n \ .$$

Essendo $\Lambda^n E^*$ uno spazio vettoriale euclideo a dimensione 1, esistono esattamente due vettori unitari

$$\pm \underline{\eta} \in \Lambda^n E^*$$

che differiscono per il verso.

Allora, se E ha un'orientazione fissata, si ha l'unico elemento $\underline{\eta} \in \Lambda^n E^*$ di norma 1 ed orientazione positiva, ovvero l'unica forma $\underline{\eta} \in \Lambda^n E^*$ tale che $\underline{\eta}(\bar{v}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{v}_n) = 1$, per ogni base ortonormale ordinata, orientata positivamente, $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ di E.

Più precisamente, se $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \ldots, \underline{\nu}^n\}$ è la base duale di B, allora, è

$$\underline{\eta} = \sqrt{\det(\underline{g})} \ \underline{\nu}^1 \wedge \ldots \wedge \underline{\nu}^n$$

dove $(\underline{g}) \equiv (g_{hk})$.

In particolare, se tale base è ortonormale, allora, è

$$\underline{\eta} = \underline{\varepsilon}^1 \wedge \ldots \wedge \underline{\varepsilon}^n \quad .$$

Pertanto, $\underline{\eta}$ è la base (canonica) ortonormale di $\Lambda^n E^*$.

Allora, ogni vettore $\underline{\nu} \in \Lambda^n E^*$ si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare di $\underline{\eta}$

$$\underline{\nu} = \nu \underline{\eta}$$

con $\nu \equiv \underline{\nu} \cdot \underline{\eta} \equiv < \underline{\nu} , \bar{\eta} >$.

L'applicazione

$$* : \Lambda^n E^* \to R$$

data da $$* : \underline{\nu} \mapsto \nu \equiv \underline{\nu} \cdot \underline{\eta} \qquad \forall \; \underline{\nu} \in \Lambda^n E^*$$

è un isomorfismo che mette in corrispondenza le basi canoniche di $\Lambda^n E^*$ e di R

$$* : \underline{\eta} \mapsto 1 .$$

Analogamente, si può parlare di $\bar{\eta}$ come base ortonormale di $\Lambda^n E$ duale di $\underline{\eta}$, essendo data da

$$\bar{\eta} = (\sqrt{\det(\underline{g})})^{-1} \bar{v}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{v}_n ,$$

e quindi definire l'isomorfismo che si indicherà ancora con $*$

$$* : \Lambda^n E \to R$$

dato da $$* : \bar{v} \mapsto v \equiv \bar{v} \cdot \bar{\eta} .$$

0.8.9 . Generalizzando, si trova un isomorfismo canonico, detto di

HODGE, tra $\Lambda^p E^*$ e $\Lambda^{n-p} E^*$ il cui significato geometrico è quello di far corrispondere le forme volume unitarie dei sottospazi (di dim. p e n - p) mutuamente supplementari e ortogonali di E.

PROPOSIZIONE

Sia $\underline{\eta} \in \Lambda^n E^*$ la forma volume unitaria.

Allora, l'applicazione

$$* : \Lambda^p E^* \to \Lambda^{n-p} E^*$$

data da $$* : \underline{x} \mapsto i_{\bar{x}} \underline{\eta}$$

è un isomorfismo, detto ISOMORFISMO DI HODGE.

Valgono, inoltre, le seguenti proprietà

a) $\underline{y} \wedge * \underline{x} = (-1)^{q(p-q)} * i_{\bar{y}} \underline{x}$, se $q \leq p$

b) $\underline{y} \wedge * \underline{x} = \underline{x} \wedge * \underline{y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \, \underline{\eta}$, se $q = p$

c) $* \underline{x} \cdot * \underline{y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$, se $q = p$

d) $** \underline{x} = (-1)^{p(n-p)} \underline{x}$,

$\forall \underline{x} \in \Lambda^p E^*$, $\underline{y} \in \Lambda^q E^*$.

Analogamente, l'applicazione (indicata ancora con $*$)

$$* : \Lambda^p E \to \Lambda^{n-p} E$$

data da $$* : \bar{x} \mapsto i_{\underline{x}} \bar{\eta}$$

è un isomorfismo. Inoltre, valgono proprietà analoghe alle precedenti. E, ancora, l'isomorfismo $*$ commuta con $'\underline{g}$, ossia, è

$$'\bar{g}(* \underline{x}) = * \bar{x} .$$

0.8.10.Un caso importante si verifica, se dim E = 3. Infatti, in tal caso, è $*(\underline{x} \wedge \underline{y}) \in E^*$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in E^*$.

DEFINIZIONE Sia E uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, orientato. Sia $\underline{\eta}$ la forma volume unitaria.

Dicesi MOLTIPLICAZIONE VETTORIALE l'applicazione bilineare alternata

$$E^* \times E^* \to E^*$$

indicata con $(\underline{u}, \underline{v}) \mapsto \underline{u} \times \underline{v} \equiv * (\underline{u} \wedge \underline{v})$.

Il significato geometrico del prodotto vettoriale è dato dalle seguenti proprietà :

a) $\underline{u} \times \underline{v}$ è ortogonale ad $\underline{u}$ e $\underline{v}$;

b) se $\underline{u}, \underline{v} \neq \underline{o}$, allora $||\underline{u} \times \underline{v}|| = ||u|| \, ||v|| \operatorname{sen}\theta$, dove θ è l'angolo non orientato formato da $\underline{u}$ e $\underline{v}$ e sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'applicazione data da

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots , \forall x \in \mathbb{R} .$$

Se $\underline{u} = \underline{o}$ o $\underline{v} = \underline{o}$, allora $||\underline{u} \times \underline{v}|| = o$;

c) se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti, allora la base ordinata $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v}\}$ determina l'orientazione positiva di E.

Tramite $'\bar{g}$ si può anche considerare la moltiplicazione vettoriale

$$E \times E \to E$$

data da $\quad \bar{u} \times \bar{v} \equiv i_{\underline{u} \wedge \underline{v}} \bar{\bar{\eta}} \equiv {}'\bar{g}(\underline{u} \times \underline{v})$.

Per maggiori dettagli si veda [11] .

La struttura euclidea di E permette di trovare una relazione tra un endomorfismo $\hat{f}: E \to E$ e una forma bilineare $\underline{f} : E \times E \to R$

Più precisamente, poniamo

$$\underline{f}(\bar{x},\bar{y}) \equiv \hat{f}(\bar{x})\cdot\bar{y} \quad , \quad \forall \ \bar{x},\bar{y} \in E.$$

Si vede che la forma bilineare associata alla somma di due endomorfismi (che è ancora un endomorfismo) è data dalla somma delle forme bilineari associate agli endomorfismi.

Allora, si vede che l'applicazione

$$End(E) \to L^2(E)$$

è un isomorfismo.

In termini matriciali, si ha il seguente risultato.

0.8.11.PROPOSIZIONE Sia $B \equiv \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n\}$ una base di E.

E' $$f_{ij} = f^k{}_i \cdot g_{kj} \quad ,$$

dove (f_{ij}) , $(f^k{}_i)$, (g_{kj}) sono le matrici, rispettivamente, di $\underline{f}$, $\hat{f}$, $\underline{g}$ relative alla base B.

Sia $h \in End(E)$. Diamo ora la nozione di "endomorfismo unitario".

0.8.12.DEFINIZIONE

Si dice che h è un ENDOMORFISMO UNITARIO se è

$$h(\bar{x}) \cdot h(\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y} \qquad , \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in E \quad \dot{-}$$

In particolare, h conserva la lunghezza e l'ortogonalità.

0.8.13.PROPOSIZIONE Sia $h \in End\,(E)$.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) h è unitario.

b) h è un automorfismo e,in una base ortonormale,si ha

$$(h^i{}_j)^{-1} = (h^j{}_i) \qquad \dot{-}$$

Indichiamo con $U(E) \subset Gl(E)$ l'insieme degli endomorfismi unitari. Allora, si vede che $U(E)$, con la legge di composizione

$$\circ : U(E) \times U(E) \rightarrow U(E)$$

data da $\qquad \circ : (h,k) \mapsto h \circ k$

è un gruppo, detto " gruppo unitario" di E.

Determiniamo ora gli endomorfismi unitari quando E ha dimensione 1,2,3.

0.8.14.LEMMA Sia $\dim E = 1$.

Allora, gli endomorfismi unitari sono:

1) id_E endomorfismo identico;

2)$- id_E$ endomorfismo opposto.

0.8.15. LEMMA Sia $\dim E = 2$. Sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ una base ortonormale di E.

Allora, gli endomorfismi unitari sono rappresentati da una delle seguenti matrici

1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

con $0 \leq \theta < 2\pi$.

La 1) è detta matrice di "rotazione", la 2) è detta matrice di "ribaltamento" ed è data dal prodotto della matrice di rotazione e della matrice di "riflessione" $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

0.8.16. LEMMA Sia $\dim E = 3$. Sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base ortonormale di E. Allora, gli endomorfismi unitari sono rappresentati da una delle seguenti matrici.

1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

con $0 \leq \theta < 2\pi$.

Quindi, ogni endomorfismo unitario ha un autovettore $(\bar{e}_3)$.

0.8.17. Sia E orientato e $\dim E = 2$. Siano $\bar{o} \neq \bar{u}, \bar{v} \in E$.

Allora, esiste un unico endomorfismo unitario h che conserva l'orientazione dello spazio ($\det h = 1$), tale che

$$h(\bar{u}) = \frac{||\bar{u}||}{||\bar{v}||} \cdot \bar{v} \quad .$$

Diamo, pertanto, la seguente definizione .

DEFINIZIONE

Dicesi ANGOLO ORIENTATO di $(\bar{u},\bar{v})$, l'unico numero reale $0 \leq \theta < 2\pi$, tale che

$$(h) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

nella base ordinata ortonormale che ha come primo vettore vers $\bar{u}$