INTRODUZIONE

Brevi cenni di critica storica

La maggior parte dei testi di Analisi e di Geometria classici seguono un metodo di esposizione tradizionale nel senso che introducono le nozioni quasi esclusivamente su R^n o talvolta sugli spazi vettoriali, mentre quasi nessuno usa gli spazi affini. Questo tipo di esposizione è senza dubbio naturale per quanto riguarda l'aspetto del calcolo,ma non favorisce la comprensione approfondita del significato geometrico delle nozioni introdotte, per il legame tra sistema di coordinate e concetto geometrico che risulta difficilmente risolubile in R^n. L'esposizione tradizionale comporta anche una separazione acritica, dovuta solo a motivi storici di divisione del lavoro, tra argomenti di Analisi e di Geometria, che ostacola una visione unitaria dei problemi, anche a causa di un simbolismo talvolta acritico.

Criteri generali

La teoria matematica svolta in questo lavoro si propone lo scopo di fornire una struttura in cui sia possibile inquadrare organicamente vari aspetti dell'Analisi e della Geometria, permettendo così una sintesi che superi anche sul piano didattico le attuali differenze di impostazione.

Il lavoro si articola nella costruzione di "strutture" (spazio affine, spazio affine euclideo, sottovarietà ecc.) in modo tale che ogni nozione è data nel contesto di un preciso quadro, all'interno del quale essa acquista pieno significato. E' opportuno osservare che la maggior parte delle nozioni introdotte ha sistematicamente quattro aspetti che vanno analizzati e confrontati: un aspetto algebrico, un aspetto analitico, un aspetto geometrico ed un aspetto fisico.Una delle caratteristiche di questo lavoro è l'esposizione intrinseca, svolta in modo organico. Con ciò si vuole intendere che tutte le varie strutture e le conseguenti nozioni sono introdotte senza ricorrere alla rappresentazione numerica, ottenendo così modelli matematici molto semplici e naturali. Riteniamo che questo tipo di esposizione favorisca la comprensione del significato geometrico e fisico degli argomenti trattati. Per esempio, riteniamo più semplice e naturale assumere, come modello dello spazio fisico, uno "spazio affine euclideo" di dimensione 3, anziché R^3 (in cui l'origine, i tre assi ed i tre versori della base canonica non hanno alcun significato fisico).

Comunque, noi non trascuriamo la rappresentazione matriciale di tutte le nozioni che sono introdotte intrinsecamente:facciamo infatti a posteriori un dettagliato studio dei sistemi di coordinate e delle loro applicazioni.

Dunque, il criterio ora enunciato comporta spesso delle inversioni rispetto all'esposizione tradizionale. Per esempio, la nozione di "derivata" viene introdotta approssimando"certe" applicazioni tra spazi affini, in modo intrinseco. Solo in un secondo momento, l'introduzione dei sistemi di coordinate dà luogo alla rappresentazione matriciale delle applicazioni derivate, che si esprime mediante le "derivate parziali".

Osserviamo che la lunghezza apparentemente eccessiva del testo è dovuta alle inevitabili notizie di dettaglio. Ma, in realtà, il nodo centrale di tutta l'impostazione è l'uso sistematico degli spazi affini. Pertanto, è essenziale che il lettore, ad una prima lettura, segua il filo del discorso basato su pochi punti salienti e non si prolunghi, invece, nello studio dei dettagli. In questo lavoro, oltre a rivedere argomenti, di solito esposti in modo tradizionale, introduciamo anche argomenti originali come, per esempio, l'uso sistematico del 2° spazio tangente nello studio della "connessione" e quindi della "seconda forma fondamentale" delle sottovarietà. Ci siamo proposti, inoltre, lo scopo di unificare il linguaggio. Ossia, argomenti trattati in modo diverso nell'Analisi e nella Geometria Differenziale, vengono rivisti con un unico linguaggio. Ne è conseguita, così,in modo naturale, la costruzione di un simbolismo in parte nuovo. Un aspetto importante del lavoro è l'estendibilità quasi immediata alle varietà differenziabili di tutte le nozioni trattate per gli spazi affini usando i vettori applicati. L'esposizione da noi usata si rivela adeguata ad una nuova possibile applicazione alla Meccanica Analitica (es. equazioni di Lagrange e di Hamilton) alla Fisica (es. spazio-tempo e sistemi di riferimento) ed alla Fisica Matematica (es. sistemi continui). Possiamo inoltre fare alcune considerazioni didattiche.
Riteniamo che il lettore, accostandosi per la prima volta ad un lavoro di questo tipo, possa andare incontro a delle difficoltà. Una di queste, dipendente dal bagaglio culturale del lettore, può nascere dal fatto che nel lavoro sono inseriti anche argomenti di levatura superiore a quella che sarebbe da attendersi per un testo di questo genere. Ma la difficoltà principale può seguire dal fatto che in genere il lettore è ormai abituato a ragionare in termini di calcolo e, quindi, può trovare difficoltà ad assimilare un linguaggio che è, in molti aspetti, diverso da quello tradizionale. Speriamo, però, che questo tipo di esposizione riesca a centrare meglio di quella classica, molti aspetti cruciali della teoria e che il let

tore possa riconoscere, alla fine, che, dell'argomento trattato, risulta un quadro chiaro, sintetico ed anche operativo sul piano del calcolo. Riteniamo che il lavoro possa servire anche come un'utile introduzione alla Geometria Differenziale moderna.

Riassunto

Prima di passare al contenuto del testo, abbiamo ritenuto opportuno fare una succinta ricapitolazione di Algebra Lineare e Tensoriale, per organicità di impostazione e di linguaggio. Il lettore può approfondire tale argomento consultando |11|. La principale nozione che ricordiamo è quella di "spazio vettoriale". Sostanzialmente, uno spazio vettoriale è un insieme munito di due operazioni che godono di certe proprietà. Si osservi che tale concetto è dato seguendo la via moderna, puramente algebrica, che è ormai accettata da tutti. L'interesse che abbiamo noi per gli spazi vettoriali consiste nel loro significato geometrico. Infatti, munendo uno spazio vettoriale con una struttura "metrica", si ottiene un modello matematico ("spazio affine euclideo") semplice ed elegante della Geometria Euclidea. Veniamo, dunque, al contenuto del testo.

Il nodo centrale di tutto il lavoro è l'uso sistematico degli "spazi affini". Uno spazio affine è un qualsiasi insieme su cui operano gli elementi di uno spazio vettoriale, detti "vettori liberi", mediante le cosiddette "traslazioni". In linea di massima, esso è uno spazio vettoriale in cui si è tolto il privilegio del vettore nullo: dunque, in un tale spazio tutti i "punti" sono equivalenti. Anche se il concetto di spazio affine è poco usato (nelle esposizioni tradizionali si preferiscono gli spazi vettoriali o più in particolare R^n), noi riteniamo più soddisfacente il nostro punto di vista sotto vari aspetti. Infatti, non privilegiando punti o direzioni particolari, o basi particolari, possiamo centrare gli aspetti sostanziali delle ulteriori nozioni che andremo ad introdurre, senza fare uso di elementi "estranei". Per esempio, possiamo trattare le applicazioni geometriche della teoria senza fare uso dei sistemi di coordinate e le applicazioni fisiche, facendo a meno dei sistemi di riferimento.

Successivamente, ci siamo preoccupati di approfondire i concetti di "spazio tangente e cotangente" i quali non sono ben delineati nell'esposizione classica. Tale procedimento, che riteniamo originale, ha origine dalla trattazione dei "vettori applicati" . Sugli spazi affini si potrebbe fare uso solo del concetto di "vettori liberi", in virtù del trasporto parallelo (traslazioni). Noi abbiamo rite nuto opportuno studiare anche i vettori applicati, per due motivi. Il primo motivo nasce dal fatto che, introducendo dei sistemi non cartesiani, essi inducono delle basi non necessariamente costanti, rendendo così indispensabile precisare il punto di applicazione di tali basi.L'altro motivo è che, così facendo, siamo in grado di generalizzare in modo naturale, tutti quei concetti esprimibili in termini di vettori applicati alle "sottovarietà" e più in generale alle "varietà differenziabili",dove si usano i "fibrati" in quanto non ha senso parlare di vettori liberi.

Dunque, iterando in modo naturale, il concetto di spazio tangente si ottengono gli interessanti "2-spazi tangenti" i quali sono usati, per esempio, per una trattazione intrinseca delle "equazioni differenziali del 2° ordine".

Una delle nozioni basilari della Geometria Differenziale degli spazi affini è quella di "differenziabilità" e di "derivata": un'applicazione tra spazi affini è differenziabile se opera linearmente sui vettori applicati "almeno in prima approssimazione". L'applicazione che effettua tale approssimazione è detta "derivata". Il concetto di derivata (libera) non è estendibile alle varietà differenziabili. Pertanto, è conveniente introdurre sugli spazi affini anche il concetto di "applicazione tangente" che tenga conto del punto di applicazione della derivata. Le regole di derivazione consistono in pochi teoremi che costituiscono le fondamenta per il calcolo delle derivate.

Le "derivate seconde" si ottengono, in modo naturale, studiando la differenziabilità delle applicazioni derivate. In termini di derivate applicate, otteniamo le nozioni di "2-applicazioni tangenti" estendibili alle varietà differenziabili. Di notevole interesse è lo studio intrinseco delle "equazioni differenziali" del 1° e del 2° ordine. Sostanzialmente, un'equazione differenziale del 1° ordine è un campo vettoriale le cui soluzioni sono tutte e sole le curve differenziabili, dette "curve integrali", i cui vettori tangenti sono i valori assunti dal campo lungo esse : in tal modo risulta chiaro il suo significato geometrico. Tali equazioni, così definite, assumeranno,tramite un sistema di coordinate, la forma classica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine, normali ed autonome. Le equazioni differenziali del 2° ordine costituiscono una versione geometrica di un procedimento classico dell'Analisi.

Definiamo poi il concetto di "immagine reciproca" di una applicazione e di "immagine inversa e diretta" di un'applicazione invertibile, (è nuova la nozione di "applicazione cotangente" di una applicazione invertibile).Il concetto di immagine reciproca e inversa costituisce le fondamenta per una trattazione intrinseca della "derivata di Lie" di un campo di vettori e di covettori.

Sinora l'oggetto centrale del nostro studio è stata la struttura di spazio affine. Ora introduciamo la nuova struttura di "spazio affine euclideo" ottenuta fissando in uno spazio affine, di dimensione finita, una applicazione scalare, detta "metrica". Questo nuovo concetto è fondamentale in quanto permette di costruire un modello matematico dello spazio fisico, cioè una formulazione assiomatica della Geometria Euclidea. Seguendo lo spirito generale di questo lavoro la linea espositiva risulta capovolta rispetto a quella tradizionale. Adottando questo criterio si spera di dare una formulazione chiara e precisa delle nozioni geometriche, acquistando a posteriori il loro significato intuitivo.

In tal modo si ottengono nuovi concetti che possono essere utilizzati nella Meccanica Analitica. Per esempio, l'isomorfismo di "Legendre" permette di stabilire l'equivalenza tra lo spazio delle "fasi" (equazioni di Lagrange) e delle "cofasi"(equazioni di Hamilton). Inoltre, abbiamo anche altri concetti nuovi, indotti dalla metrica, estendibili anche alle varietà differenziabili.

Dunque, tutte le nozioni sinora introdotte, sono state date intrinsecamente. Ora possiamo curare la loro rappresentazione matriciale, mediante uno studio dettagliato dei sistemi di coordinate e delle loro applicazioni. Si ritrovano così le formule classiche. Per esempio, la rappresentazione matriciale delle applicazioni derivate è espressa tramite le "derivate parziali".

La seconda parte di questo lavoro è dedicata allo studio delle"sottovarietà" di uno spazio affine.

Noi evitiamo l'uso dei "fibrati", riguardando lo spazio tangente della sottovarietà come un sottinsieme di quello dello spazio affine ambiente. Ciò nonostante, otteniamo alla fine risultati che hanno una validità intrinseca nella sottovarietà. Grazie alla impostazione seguita relativamente agli spazi affini, possiamo generalizzare in modo naturale tutte le tecniche precedenti che si riferivano a vettori applicati.

Nozioni di notevole interesse sono la "connessione riemanniana" e la"2^a forma di decomposizione" della connessione.

La teoria svolta è in grado di fornire degli strumenti potenti alla Meccanica Analitica che,nell'esposizione tradizionale,formula in forme molto più involute e prive di significato geometrico,i precedenti risultati (per esempio le equazioni di Legrange di 1^a e 2^a specie possono essere riguardate come una formulazione rudimentale di decomposizione della connessione).