P R E F A Z I O N E

Questo lavoro vuole essere un testo rivolto a studenti e ricercatori interessati ad una trattazione unitaria di argomenti che solitamente sono svolti in Analisi Differenziale, in Geometria Differenziale, in Meccanica Analitica ed in Fisica Matematica.

L'esposizione è sviluppata in modo non usuale nell'ambiente unificante degli spazi affini, il quale permette una visione intrinseca dei vari argomenti.

Sono trattati elementi di teoria delle derivate, in modo autoconsistente e suscettibile di sviluppi di una teoria unificata degli operatori differenziali della Fisica Matematica, ed elementi di una teoria delle sottovarietà degli spazi affini,come introduzione sia alla Geometria Differenziale, sia alla Meccanica Analitica. Alcuni aspetti della trattazione ed alcuni risultati sono originali.

Tutti gli argomenti sono affrontati partendo da nozioni elementari, in modo tale che la lettura del testo presupponga poco più della conoscenza della topologia in R.

La redazione del testo (1ª parte e 2ª parte) è dovuta al dott. G. Montesano, che ha raccolto il materiale contenuto in dispense, appunti relativi a corsi e seminari universitari tenuti da M. Modugno.

NOTA

Questa prima edizione del lavoro viene pubblicata senza revisione, per permettere agli studenti un'immediata acquisizione.

I N T R O D U Z I O N E

Brevi cenni di critica storica

La maggior parte dei testi di Analisi e di Geometria classici seguono un metodo di esposizione tradizionale nel senso che introducono le nozioni quasi esclusivamente su R^n o talvolta sugli spazi vettoriali, mentre quasi nessuno usa gli spazi affini. Questo tipo di esposizione è senza dubbio naturale per quanto riguarda l'aspetto del calcolo, ma non favorisce la comprensione approfondita del significato geometrico delle nozioni introdotte, per il legame tra sistema di coordinate e concetto geometrico che risulta difficilmente risolubile in R^n. L'esposizione tradizionale comporta anche una separazione acritica, dovuta solo a motivi storici di divisione del lavoro, tra argomenti di Analisi e di Geometria, che ostacola una visione unitaria dei problemi, anche a causa di un simbolismo talvolta acritico.

Criteri generali

La teoria matematica svolta in questo lavoro si propone lo scopo di fornire una struttura in cui sia possibile inquadrare organicamente vari aspetti dell'Analisi e della Geometria, permettendo così una sintesi che superi anche sul piano didattico le attuali differenze di impostazione.

Il lavoro si articola nella costruzione di "strutture" (spazio affine, spazio affine euclideo, sottovarietà ecc.) in modo tale che ogni nozione è data nel contesto di un preciso quadro, all'interno del quale essa acquista pieno significato. E' opportuno osservare che la maggior parte delle nozioni introdotte ha sistematicamente quattro aspetti che vanno analizzati e confrontati: un aspetto algebrico, un aspetto analitico, un aspetto geometrico ed un aspetto fisico. Una delle caratteristiche di questo lavoro è l'esposizione intrinseca, svolta in modo organico. Con ciò si vuole intendere che tutte le varie strutture e le conseguenti nozioni sono introdotte senza ricorrere alla rappresentazione numerica, ottenendo così modelli matematici molto semplici e naturali. Riteniamo che questo tipo di esposizione favorisca la comprensione del significato geometrico e fisico degli argomenti trattati. Per esempio, riteniamo più semplice e naturale assumere, come modello dello spazio fisico, uno "spazio affine euclideo" di dimensione 3, anziché R^3 (in cui l'origine, i tre assi ed i tre versori della base canonica non hanno alcun significato fisico).

Comunque, noi non trascuriamo la rappresentazione matriciale di tutte le nozioni che sono introdotte intrinsecamente:facciamo infatti a posteriori un dettagliato studio dei sistemi di coordinate e delle loro applicazioni.

Dunque, il criterio ora enunciato comporta spesso delle inversioni rispetto all'esposizione tradizionale. Per esempio, la nozione di "derivata" viene introdotta approssimando"certe" applicazioni tra spazi affini, in modo intrinseco. Solo in un secondo momento, l'introduzione dei sistemi di coordinate dà luogo alla rappresentazione matriciale delle applicazioni derivate, che si esprime mediante le "derivate parziali".

Osserviamo che la lunghezza apparentemente eccessiva del testo è dovuta alle inevitabili notizie di dettaglio. Ma, in realtà, il nodo centrale di tutta l'impostazione è l'uso sistematico degli spazi affini. Pertanto, è essenziale che il lettore, ad una prima lettura, segua il filo del discorso basato su pochi punti salienti e non si prolunghi, invece, nello studio dei dettagli. In questo lavoro, oltre a rivedere argomenti, di solito esposti in modo tradizionale, introduciamo anche argomenti originali come, per esempio, l'uso sistematico del 2° spazio tangente nello studio della "connessione" e quindi della "seconda forma fondamentale" delle sottovarietà. Ci siamo proposti, inoltre, lo scopo di unificare il linguaggio. Ossia, argomenti trattati in modo diverso nell'Analisi e nella Geometria Differenziale, vengono rivisti con un unico linguaggio. Ne è conseguita, così,in modo naturale, la costruzione di un simbolismo in parte nuovo. Un aspetto importante del lavoro è l'estendibilità quasi immediata alle varietà differenziabili di tutte le nozioni trattate per gli spazi affini usando i vettori applicati. L'esposizione da noi usata si rivela adeguata ad una nuova possibile applicazione alla Meccanica Analitica (es. equazioni di Lagrange e di Hamilton) alla Fisica (es. spazio-tempo e sistemi di riferimento) ed alla Fisica Matematica (es. sistemi continui). Possiamo inoltre fare alcune considerazioni didattiche.
Riteniamo che il lettore, accostandosi per la prima volta ad un lavoro di questo tipo, possa andare incontro a delle difficoltà. Una di queste,dipendente dal bagaglio culturale del lettore, può nascere dal fatto che nel lavoro sono inseriti anche argomenti di levatura superiore a quella che sarebbe da attendersi per un testo di questo genere. Ma la difficoltà principale può seguire dal fatto che in genere il lettore è ormai abituato a ragionare in termini di calcolo e, quindi, può trovare difficoltà ad assimilare un linguaggio che è, in molti aspetti, diverso da quello tradizionale. Speriamo, però, che questo tipo di esposizione riesca a centrare meglio di quella classica, molti aspetti cruciali della teoria e che il let

nuto opportuno studiare anche i vettori applicati, per due motivi. Il primo motivo nasce dal fatto che, introducendo dei sistemi non cartesiani, essi inducono delle basi non necessariamente costanti, rendendo così indispensabile precisare il punto di applicazione di tali basi.L'altro motivo è che, così facendo, siamo in grado di generalizzare in modo naturale, tutti quei concetti esprimibili in termini di vettori applicati alle "sottovarietà" e più in generale alle "varietà differenziabili",dove si usano i "fibrati" in quanto non ha senso parlare di vettori liberi.

Dunque, iterando in modo naturale, il concetto di spazio tangente si ottengono gli interessanti "2-spazi tangenti" i quali sono usati, per esempio, per una trattazione intrinseca delle "equazioni differenziali del 2° ordine".

Una delle nozioni basilari della Geometria Differenziale degli spazi affini è quella di "differenziabilità" e di "derivata": un'applicazione tra spazi affini è differenziabile se opera linearmente sui vettori applicati "almeno in prima approssimazione". L'applicazione che effettua tale approssimazione è detta "derivata". Il concetto di derivata (libera) non è estendibile alle varietà differenziabili. Pertanto, è conveniente introdurre sugli spazi affini anche il concetto di "applicazione tangente" che tenga conto del punto di applicazione della derivata. Le regole di derivazione consistono in pochi teoremi che costituiscono le fondamenta per il calcolo delle derivate.

Le "derivate seconde" si ottengono, in modo naturale, studiando la differenziabilità delle applicazioni derivate. In termini di derivate applicate, otteniamo le nozioni di "2-applicazioni tangenti" estendibili alle varietà differenziabili. Di notevole interesse è lo studio intrinseco delle "equazioni differenziali" del 1° e del 2° ordine. Sostanzialmente, un'equazione differenziale del 1° ordine è un campo vettoriale le cui soluzioni sono tutte e sole le curve differenziabili, dette "curve integrali", i cui vettori tangenti sono i valori assunti dal campo lungo esse : in tal modo risulta chiaro il suo significato geometrico. Tali equazioni, così definite, assumeranno,tramite un sistema di coordinate, la forma classica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine, normali ed autonome. Le equazioni differenziali del 2° ordine costituiscono una versione geometrica di un procedimento classico dell'Analisi.

Definiamo poi il concetto di "immagine reciproca" di una applicazione e di "immagine inversa e diretta" di un'applicazione invertibile, (è nuova la nozione di "applicazione cotangente" di una applicazione invertibile).Il concetto di immagine reciproca e inversa costituisce le fondamenta per una trattazione intrinseca della "derivata di Lie" di un campo di vettori e di covettori.

Sinora l'oggetto centrale del nostro studio è stata la struttura di spazio affine. Ora introduciamo la nuova struttura di "spazio affine euclideo" ottenuta fissando in uno spazio affine, di dimensione finita, una applicazione scalare, detta "metrica". Questo nuovo concetto è fondamentale in quanto permette di costruire un modello matematico dello spazio fisico, cioè una formulazione assiomatica della Geometria Euclidea. Seguendo lo spirito generale di questo lavoro la linea espositiva risulta capovolta rispetto a quella tradizionale. Adottando questo criterio si spera di dare una formulazione chiara e precisa delle nozioni geometriche, acquistando a posteriori il loro significato intuitivo.

In tal modo si ottengono nuovi concetti che possono essere utilizzati nella Meccanica Analitica. Per esempio, l'isomorfismo di "Legendre" permette di stabilire l'equivalenza tra lo spazio delle "fasi" (equazioni di Lagrange) e delle "cofasi"(equazioni di Hamilton). Inoltre, abbiamo anche altri concetti nuovi, indotti dalla metrica, estendibili anche alle varietà differenziabili.

Dunque, tutte le nozioni sinora introdotte, sono state date intrinsecamente. Ora possiamo curare la loro rappresentazione matriciale, mediante uno studio dettagliato dei sistemi di coordinate e delle loro applicazioni. Si ritrovano così le formule classiche. Per esempio, la rappresentazione matriciale delle applicazioni derivate è espressa tramite le "derivate parziali".

La seconda parte di questo lavoro è dedicata allo studio delle"sottovarietà" di uno spazio affine.

Noi evitiamo l'uso dei "fibrati", riguardando lo spazio tangente della sottovarietà come un sottinsieme di quello dello spazio affine ambiente. Ciò nonostante, otteniamo alla fine risultati che hanno una validità intrinseca nella sottovarietà. Grazie alla impostazione seguita relativamente agli spazi affini, possiamo generalizzare in modo naturale tutte le tecniche precedenti che si riferivano a vettori applicati.

Nozioni di notevole interesse sono la "connessione riemanniana" e la"2^a forma di decomposizione" della connessione.

La teoria svolta è in grado di fornire degli strumenti potenti alla Meccanica Analitica che,nell'esposizione tradizionale,formula in forme molto più involute e prive di significato geometrico,i precedenti risultati (per esempio le equazioni di Legrange di 1^a e 2^a specie possono essere riguardate come una formulazione rudimentale di decomposizione della connessione).

INDICE DELLA I PARTE

INDICE DELLA II PARTE

tore possa riconoscere, alla fine, che, dell'argomento trattato, risulta un quadro chiaro, sintetico ed anche operativo sul piano del calcolo. Riteniamo che il lavoro possa servire anche come un'utile introduzione alla Geometria Differenziale moderna.

Riassunto

Prima di passare al contenuto del testo, abbiamo ritenuto opportuno fare una succinta ricapitolazione di Algebra Lineare e Tensoriale, per organicità di impostazione e di linguaggio. Il lettore può approfondire tale argomento consultando |11|. La principale nozione che ricordiamo è quella di "spazio vettoriale". Sostanzialmente, uno spazio vettoriale è un insieme munito di due operazioni che godono di certe proprietà. Si osservi che tale concetto è dato seguendo la via moderna, puramente algebrica, che è ormai accettata da tutti. L'interesse che abbiamo noi per gli spazi vettoriali consiste nel loro significato geometrico. Infatti, munendo uno spazio vettoriale con una struttura "metrica", si ottiene un modello matematico ("spazio affine euclideo") semplice ed elegante della Geometria Euclidea. Veniamo, dunque, al contenuto del testo.

Il nodo centrale di tutto il lavoro è l'uso sistematico degli "spazi affini". Uno spazio affine è un qualsiasi insieme su cui operano gli elementi di uno spazio vettoriale, detti "vettori liberi", mediante le cosiddette "traslazioni". In linea di massima, esso è uno spazio vettoriale in cui si è tolto il privilegio del vettore nullo: dunque, in un tale spazio tutti i "punti" sono equivalenti. Anche se il concetto di spazio affine è poco usato (nelle esposizioni tradizionali si preferiscono gli spazi vettoriali o più in particolare R^n), noi riteniamo più soddisfacente il nostro punto di vista sotto vari aspetti. Infatti, non privilegiando punti o direzioni particolari, o basi particolari, possiamo centrare gli aspetti sostanziali delle ulteriori nozioni che andremo ad introdurre, senza fare uso di elementi "estranei". Per esempio, possiamo trattare le applicazioni geometriche della teoria senza fare uso dei sistemi di coordinate e le applicazioni fisiche, facendo a meno dei sistemi di riferimento.

Successivamente, ci siamo preoccupati di approfondire i concetti di "spazio tangente e cotangente" i quali non sono ben delineati nell'esposizione classica. Tale procedimento, che riteniamo originale, ha origine dalla trattazione dei "vettori applicati". Sugli spazi affini si potrebbe fare uso solo del concetto di "vettori liberi", in virtù del trasporto parallelo (traslazioni). Noi abbiamo rite

0 INTRODUZIONE

In questo capitolo si fa un riassunto delle principali nozioni di algebra tensoriale, per organicità ed uniformità di impostazione e di linguaggio. Per brevità, omettiamo le dimostrazioni dei teoremi, rimandando a [11] .

Nella Geometria Elementare (fondata sugli assiomi di Euclide), per "spazio vettoriale" s'intende l'insieme dei vettori, ciascuno dei quali è una classe d'equivalenza di segmenti orientati.

In altri testi classici si identificano gli spazi vettoriali (di dimensione n) con $\mathbb{R}^n$ e, successivamente, si studia il loro significato geometrico.

In questo lavoro, invece, si darà la struttura di spazio vettoriale seguendo la via moderna puramente algebrica, che è ormai assodata. Ossia, s'intenderà come spazio vettoriale, un qualsiasi insieme munito di due operazioni che godono di certe proprietà. In tal modo questa definizione generale, ha come casi particolari, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, ecc...

Comunque, uno dei principali interessi, che abbiamo noi per gli spazi vettoriali, consiste nel loro significato geometrico, il quale apparirà evidente allorché introdurremo gli "spazi affini".

Si ritiene, anzi, che questa sia la strada matematicamente più valida di costruzione della Geometria Euclidea.

Considerato uno spazio vettoriale V, possiamo introdurre la nozione di "base", mediante la quale è possibile esprimere ogni elemento di V, in modo univoco, come combinazione lineare degli elementi della base. Pertanto, fissata la base, ogni elemento di V è caratterizzato completamente dalle sue componenti. In questo modo, si recupera la definizione classica di spazio vettoriale di cui si è parlato prima.

Dunque, così facendo, viene prima lo spazio vettoriale costruito a priori e poi la nozione di base e di rappresentazione numerica. entre, col procedimento classico, vengono prima le componenti legate ad un non ben definito sistema di riferimento e, successivamente, i vettori costruiti con una relazione di equivalenza che può sembrare arbitraria.

Per maggiori dettagli si veda [11] .

1 SPAZI VETTORIALI

0 La prima nozione che introduciamo è quella di "spazio vettoriale" V. In questo paragrafo ne diamo la definizione e le prime conseguenze. Definiamo poi i "sottospazi vettoriali", come i sottoinsiemi di uno spazio vettoriale che conservano una tale struttura. Dopo aver introdotto il "prodotto cartesiano" di più spazi vettoriali e quella di "spazio quoziente" ci dedichiamo alla importantissima nozione di "base". Essa è costituita da un insieme di vettori di V, tale che ogni altro vettore di V possa esprimersi in uno ed in un sol modo, come "combinazione lineare" dei vettori di tale base. Osservato poi che ogni spazio vettoriale ammette una base, si fa vedere che ogni insieme di vettori "linearmente indipendenti" può essere completato con vettori di un insieme di "generatori" in modo da costituire una base.

Infine introduciamo l'importantissimo concetto di "dimensione" di uno spazio vettoriale, dopo aver visto che la cardinalità di tutte le basi di uno spazio vettoriale è la medesima.

0.1.1. DEFINIZIONE Sia $\mathbb{K}$ un corpo.

Dicesi SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{K}$ una terna

$$(V, +, \cdot)$$

dove

- V è un qualsiasi insieme;
- $+$ è un'operazione, detta "addizione"

$$+ : V \times V \to V$$

così indicata $\quad + : (u,v) \mapsto u+v$

rispetto alla quale V è un gruppo abeliano (o commutativo);

- $\cdot$ è un'operazione, detta "moltiplicazione per gli scalari"

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

così indicata $\qquad \cdot : (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

la quale gode delle seguenti proprietà

a) $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

b) $(\lambda+\mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

c) $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

d) $1_{\mathbb{K}} \cdot v = v$ $\quad \doteq$

Gli elementi di uno spazio vettoriale su un corpo $\mathbb{K}$ sono detti "vettori".

In seguito, tratteremo solo spazi vettoriali sui reali (anche se molte delle nozioni introdotte hanno validità più ampia).

Sia, dunque, $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ che, per semplicità, indicheremo con V.

D'ora in avanti, per mettere in risalto l'appartenenza dei vettori allo spazio vettoriale li soprallinieremo.

A partire da V e da un insieme S, è possibile munire l'insieme $F(S,V)$, costituito dalle applicazioni

$$S \to V,$$

di una struttura di spazio vettoriale, definendovi le operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari nel modo seguente

$$\left.\begin{aligned}(f+g)(x) &\equiv f(x) + g(x)\\ (\lambda\cdot f)(x) &\equiv \lambda\cdot f(x)\end{aligned}\right. \qquad \forall\, x \in S.$$

0.1.2. DEFINIZIONE Sia W un sottoinsieme di V.

Si dice che W è un SOTTOSPAZIO (VETTORIALE) di V se sono soddisfatte le seguenti condizioni

a) $\bar{u}+\bar{v} \in W$ $\quad \forall\ \bar{u},\bar{v} \in W$

b) $\lambda \cdot \bar{u} \in W$ $\quad \forall\ \lambda \in R,\ \bar{u} \in W$

c) $\bar{o} \in W$ $\quad \bar{o} \in V$.

0.1.3. Facciamo ora alcune premesse, utili a dare il concetto di "somma diretta" di due sottospazi (vettoriali) U e U' di V.

DEFINIZIONE Dicesi SOMMA di U e U' il sottospazio di V, generato da $U \cup U'$

$$U+U' \equiv \{\bar{v} \in V \ /\ \bar{v} = \bar{u}+\bar{u}' \ ,\ \text{con } \bar{u} \in U \text{ e } \bar{u}' \in U'\}.$$

0.1.4. DEFINIZIONE Si dice che U e U' sono linearmente indipendenti se è

$$U \cap U' = \{\bar{o}\} \ .$$

0.1.5. DEFINIZIONE Si dice che $U + U'$ è la SOMMA DIRETTA di U e U', se i due sottospazi sono linearmente indipendenti e si scrive

$$U \oplus U' \ .$$

Dunque $V = U \oplus U'$ se ogni $\bar{v} \in V$ ammette un'unica decomposizione $\bar{v} = \bar{u}+\bar{u}'$, con $\bar{u} \in U$, $\bar{u}' \in U'$.

Naturalmente, è possibile estendere tali nozioni a più sottospazi di V.

0.1.6. DEFINIZIONE - Siano U e U' due sottospazi di V.

Si dice che U' è un SUPPLEMENTARE di U in V, se

$$V = U \oplus U'.$$

Si osservi che il supplementare non è univocamente determinato.

Vedremo, in seguito (0.8.4) che se V è uno spazio vettoriale "euclideo", allora esiste un unico supplementare "ortogonale" di un sottospazio $U \subset V$.

0.1.7. PROPOSIZIONE Siano $V_1, \ldots, V_p$ p spazi vettoriali.

Allora, l'insieme PRODOTTO CARTESIANO

$$V_1 \times \ldots \times V_p \equiv \{(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p) / \bar{v}_1 \in V_1, \ldots, \bar{v}_p \in V_p\}$$

è uno spazio vettoriale, definendovi le operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari nel modo seguente

$$(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p) + (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p) \equiv (\bar{u}_1 + \bar{v}_1, \ldots, \bar{u}_p + \bar{v}_p)$$

$$\lambda \cdot (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p) \equiv (\lambda \cdot \bar{v}_1, \ldots, \lambda \cdot \bar{v}_p) .$$

0.1.8. Sia W un sottospazio vettoriale di V.

Si vede che la relazione binaria in V, data da

$$\bar{u} \sim \bar{v} \Longleftrightarrow \bar{u} - \bar{v} \in W \qquad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$$

è una relazione d'equivalenza.

Allora, si dà la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Dicesi INSIEME QUOZIENTE di V rispetto a W l'insieme delle classi di equivalenza rispetto a $\sim$

$$V/_W \doteq$$

Se $\bar{u} \in V$, indichiamo con $[\bar{u}]$ la classe d'equivalenza di $\bar{u}$, costituita da tutti gli elementi di V del tipo

$$\bar{u} + \bar{w}\ , \qquad \text{con } \bar{w} \in W.$$

Perciò, si usa anche il simbolo

$$[\bar{u}] = \bar{u} + W.$$

Si vede che l'insieme quoziente V/W, munito delle seguenti operazioni (che sono ben definite) di addizione e di moltiplicazione per gli scalari

$$[\bar{u}] + [\bar{v}] \equiv [\bar{u} + \bar{v}]$$

$$\lambda \cdot [\bar{u}] \equiv [\lambda \cdot \bar{u}]$$

è uno spazio vettoriale.

0.1.9. DEFINIZIONE Siano $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in V$.

Dicesi COMBINAZIONE LINEARE di $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n$ ogni vettore di V

del tipo

$$\bar{x} \equiv \sum_{i=1}^{n} x^i \bar{v}_i \equiv x^1 \bar{v}_1 + \dots + x^n \bar{v}_n \qquad \text{con } x^1,\dots,x^n \in \mathbb{R} \ .$$

Se ogni vettore di V è combinazione lineare di $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n$, allora si dice che $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ è un INSIEME DI GENERATORI di V .

In seguito, quando non c'è pericolo di confusione, ometteremo il simbolo di sommatoria.

0.1.10. DEFINIZIONE

Si dice che n vettori $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in V$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se è, $\forall x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x^i \bar{v}_i = \bar{o}\right) \Rightarrow (x^1 = \dots = x^n = o) \quad .$$

0.1.11. DEFINIZIONE

Dicesi BASE di V ogni sottoinsieme finito $B \subset V$, che gode delle seguenti proprietà:

- B è un insieme di generatori di V;
- B è linearmente indipendente .

0.1.12. Dunque, ogni spazio vettoriale (purché non costituito dal solo vettore nullo) ammette una base. Anzi, si può dimostrare di più che ogni insieme di vettori linearmente indipendenti (che esiste sempre) può essere completato con vettori di un insieme di generatori (che esiste sempre), in modo da costituire una base.

TEOREMA Sia $G \equiv \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ un insieme finito di generatori di V. Sia $I \equiv \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\} \subset G$, con $p < n$, linearmente indipendente.

Allora, esiste una base B di V, tale che

$$I \subset B \subset G \subset V \quad .$$

Si possono anche considerare spazi vettoriali con basi infinite, i quali però esulano dai nostri scopi.

0.1.13. La nozione di base può essere caratterizzata tramite una sua proprietà importantissima, come segue.

TEOREMA Sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ un sottoinsieme di V.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) B è una base;

b) ogni vettore $\bar{x} \in V$ si scrive in uno e in un solo modo come combinazione lineare di vettori di B

$$\bar{x} = x^i \bar{v}_i \quad .$$

0.1.14. E', allora, lecita la seguente definizione.

DEFINIZIONE Sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base di V. Sia $\bar{x} \equiv x^i \bar{v}_i \in V$.

I coefficienti della combinazione lineare, secondo i vettori di B, di $\bar{x}$ (che sono univocamente determinati) si dicono le COMPONENTI di $\bar{x}$ secondo la base B.

Allora, dicesi MATRICE (COLONNA) rappresentante $\bar{x}$, relativa a B, la matrice colonna delle componenti di $\bar{x}$, indicata con

$$M^B(\bar{x}) \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix} \quad .$$

Si osservi che la matrice rappresentante $\bar{x}$ dipende dalla base scelta.

Quando consideriamo fissata la base B, scriveremo $(\bar{x})$ al posto di $M^B(\bar{x})$.

La rappresentazione matriciale degli spazi vettoriali è un fatto molto importante, strettamente connesso alla nozione di base.

Questa tecnica verrà usata per le applicazioni lineari, multilineari e per i tensori: apparirà, così, chiara la sua importanza.

0.1.15. TEOREMA

Supposto che V abbia un numero finito di generatori, allora, ogni base di V è costituita da uno stesso numero di elementi.

0.1.16. Si dà, perciò, la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Se V ha una base di n elementi, allora si dice che V ha DIMENSIONE n e si scrive

$$\dim V = n .$$

Se $V \equiv \{\bar{o}\}$, allora si dice che V ha dimensione zero e si scrive $\dim V = 0$.

0.1.17. TEOREMA Sia $\dim V = n$. Sia W un sottospazio vettoriale di V.

Allora, è

$$\dim W \leq \dim V .$$

Inoltre, sussiste la seguente equivalenza

$$(\dim W = \dim V) \Leftrightarrow W = V .$$

Siano W e W' sottospazi di V tali che $V = W \oplus W'$.

Allora,è

$$\dim V = \dim W + \dim W' \; .$$

0.1.18. PROPOSIZIONE Siano $V_1 \ldots V_p$, V, W spazi vettoriali e sia $W \subset V$.

Allora, è

$$\dim(V_1 \times \ldots \times V_p) = \dim V_1 + \ldots + \dim V_p \; ,$$

$$\dim(V_{/W}) = \dim V - \dim W \; .$$

2 APPLICAZIONI LINEARI

0 Un'applicazione fra due spazi vettoriali si dice lineare se "conserva" le operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari.

Quindi tali applicazioni sono le uniche ad essere "canoniche" rispetto alla struttura di spazio vettoriale ed è perciò logico attendersi da esse un ruolo fondamentale.

Siano, dunque, U e V due spazi vettoriali.

0.2.1. DEFINIZIONE

Un'applicazione

$$f : U \to V$$

dicesi (un OMOMORFISMO di spazi vettoriali o) LINEARE se sono soddisfatte le seguenti condizioni

a) $f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) \qquad \forall\ \bar{u},\bar{v} \in U$

b) $f(\lambda\cdot\bar{u}) = \lambda\cdot f(\bar{u}) \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \bar{u} \in U.$

In particolare, se $U \equiv V$, f si dice un ENDOMORFISMO.

0.2.2. DEFINIZIONE

Un'applicazione lineare

$$f : U \to V$$

dicesi un ISOMORFISMO se esiste un'applicazione lineare

$$g : V \to U$$

tale che

$$g \circ f = id_U \quad , \quad f \circ g = id_V \ .$$

In particolare, se $U \equiv V$, f si dice un AUTOMORFISMO.

0.2.3. Se un'applicazione lineare f è invertibile, allora anche l'inversa f^{-1} è lineare e dunque f(ed f^{-1}) è un isomorfismo.

PROPOSIZIONE Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti

a) f è un isomorfimo;

b) f è biiettiva .

0.2.4. PROPOSIZIONE Sia $\dim U = n$. Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare e $B \equiv \{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\}$ una base di U.

Allora, f è caratterizzata dai valori che essa assume sui vettori della base B. Più precisamente, per ogni $\bar{x} \equiv x^i\bar{u}_i \in U$ è

$$f(x^i\bar{u}_i) = x^i f(\bar{u}_i) \ .$$

Dunque, l'immagine di f, ossia $f(U) \equiv Im(f)$, è il sottospazio vettoriale di V generato dai vettori $f(\bar{u}_i)$.

0.2.5. Diamo, allora, la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Dicesi RANGO di f la dimensione di $Im(f)$.

Si vede che è rango $(f) \leq \dim V$.

0.2.6. Il concetto di immagine non dipende dalla linearità di f; invece se f è lineare, si ha anche il concetto di "nucleo" che ha proprietà di tipo "duale" rispetto a quelle di immagine.

DEFINIZIONE Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare.

Dicesi NUCLEO di f il sottoinsieme di U

$$Ker(f) \equiv f^{-1}(\bar{o}) \quad ,$$

costituito dai vettori $\bar{u} \in V$, tali che $f(\bar{u}) = \bar{o}$.

Si vede che $Ker(f)$ è un sottospazio di U .

0.2.7. TEOREMA Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare.

Allora, è

$$\dim V = \dim Im(f) + \dim Ker(f) \quad .$$

0.2.8. Sia $\dim U = n$ e $\dim V = m$.

Siano $B \equiv \{\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_n\}$ e $B' \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$ rispettivamente basi di U e V. Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare.

Si indica con

$$M^{B'}{}_{B}(f) \subset M^m{}_n$$

la matrice di f, relativa alle basi B e B', ossia la matrice ad m righe ed n colonne i cui elementi sono

$$f^i{}_j \equiv (f(\bar{u}_j))^i \ .$$

Si noti che la matrice rappresentante f dipende dalla scelta delle basi.

Quando consideriamo fissate le basi B e B', scriviamo (f) o $(f^i{}_j)$ al posto di $M^{B'}_B(f)$.

Si osservi, inoltre, che abbiamo usato usato la convenzione di scrivere,come primo indice, quello relativo allo spazio d'arrivo e, come secondo indice, quello relativo allo spazio di partenza. In tal modo si ritrovano accostati gli indici che devono essere saturati, essendo

$$(f(\bar{x}))^i \equiv (f(x^j\bar{v}_j))^i = x^j(f(\bar{v}_j))^i \equiv f^i{}_j x^j \ .$$

Pertanto, d'ora in poi useremo questa convenzione.

0.2.9. PROPOSIZIONE

L'insieme $L(U,V)$ delle applicazioni lineari $f : U \to V$ ha una struttura naturale di spazio vettoriale, che si definiscono le operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari nel modo seguente

$$(f+g)(\bar{u}) \equiv f(\bar{u}) + g(\bar{u})$$

$$(\lambda\cdot f)(\bar{u}) \equiv \lambda\cdot f(\bar{u}) \qquad \forall\ \bar{u} \in U \ .$$

Ogni spazio vettoriale V induce i seguenti spazi vettoriali notevoli

$$L(\mathbb{R},V) \quad , \quad L(V,V) \quad , \quad L(V,\mathbb{R}) \equiv V^* \ .$$

1) $L(R,V)$

E' possibile identificare V e $L(\mathbb{R},V)$ mediante l'isomorfismo canonico

$$L(\mathbb{R},V) \approx V$$

dato da

$$f \mapsto f(1) \quad .$$

2) $L(V,V)$

Lo spazio vettoriale $L(V,V)$ viene indicato anche con $End(V)$ ed ogni suo elemento, che è un endomorfismo, è detto anche un "operatore lineare".

Inoltre, l'insieme $GL(V)$ costituito dagli automorfismi $V \rightarrow V$, con l'operazione di composizione, è un gruppo.

0.2.10. Studiamo ora le nozioni di "autovalore" ed "autovettore" di un operatore lineare, che hanno un importante significato pratico, oltre che teorico.

DEFINIZIONE Sia $h \in L(V,V) \equiv End(V)$.

Un vettore $\bar{v} \in V$ si dice AUTOVETTORE di h se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, tale che

$$h(\bar{v}) = \lambda\bar{v} \quad .$$

Se $\bar{v} \neq \bar{o}$, si dice che λ è un AUTOVALORE di h e si dice che $\bar{v}$ ha λ come autovalore .

Dunque, si vede subito che $\bar{o} \in V$ è un autovettore banale, ma non si riesce a definire l'autovalore associato perché è indeterminato. Inoltre, se $\bar{v} \neq \bar{o}$ è un autovettore, si vede che l'autovalore associato è unico. Per maggiori dettagli si veda [11] .

3) $L(V,\mathbb{R}) \equiv V^*$

Lo spazio vettoriale $L(V,\mathbb{R}) \equiv V^*$ è detto "duale" di V e i suoi elementi si dicono "forme lineari".

In seguito, verranno sottolineati i suoi elementi.

Se V ha dimensione finita, allora V e V^* sono isomorfi; però, non esiste, in generale, un isomorfismo canonico tra V e V^*.

Vedremo, invece, che, se nello spazio vettoriale V è definita una "moltiplicazione scalare" allora, essa induce un ben determinato isomorfismo $V \approx V^*$, con il quale è possibile identificare, in modo naturale, vettori e forme lineari, ossia elementi di V ed elementi di V^*.

0.2.11. DEFINIZIONE

Sia $f : U \to V$ un'applicazione lineare.

Dicesi TRASPOSTA di f l'applicazione lineare

$$f^* : V^* \to U^*$$

data da
$$f^* : \underline{\nu} \mapsto \underline{\nu} \circ f \;.$$

0.2.12. TEOREMA Sia $\dim V = n$.

Sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ una base di V.

Allora, le n forme lineari $\underline{\nu}^1, \dots, \underline{\nu}^n \in V^*$ date da

$$\underline{\nu}^i(\bar{v}_j) \equiv \delta^i{}_j \equiv \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ 1 & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

costituiscono una base di V^*, indicata con $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \dots \underline{\nu}^n\}$, detta la "duale" di B .

0.2.13. PROPOSIZIONE Sia $\dim V = n$, e sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ una base di V.

a) Ogni $\underline{f} \in V^*$ si scrive in uno e un solo modo come combinazione lineare delle forme $\underline{\nu}^1, \dots, \underline{\nu}^n$. Più precisamente, è

$$\underline{f} \equiv f_i \, \underline{\nu}^i$$

dove $$f_i \equiv f(\bar{v}_i) .$$

b) Dunque, l'insieme $B^* \equiv \{ \underline{\nu}^1, \dots, \underline{\nu}^n\}$ è la base di V^*, che determina l'isomorfismo della rappresentazione matriciale di V^*, relativa a B (ed alla base canonica di $\mathbb{R}$)

$$V^* \approx M_n .$$

c) Dunque, è

$$\dim V^* = n = \dim V.$$

d) Se

$$\underline{f} \equiv f_i \, \underline{\nu}^i \in V^*$$

e se

$$\bar{x} \equiv x^i \bar{v}_i \in V,$$

allora, è

$$\underline{f}(\bar{x}) = f_i x^i$$

0.2.14. DEFINIZIONE Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Dicesi BIDUALE di V lo spazio vettoriale

$$V^{**} \equiv L(V^{*}, \mathbb{R}) \equiv L(L(V,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \quad .$$

Identificheremo V^{**} con V, mediante l'isomorfismo naturale, $V \to V^{**}$ indotto dalla regola

$$\bar{x}(\underline{f}) \equiv \underline{f}(\bar{x}).$$

Per ragioni di simmetria, adotteremo anche il simbolo

$$\bar{x}(\underline{f}) \equiv < \underline{f},\bar{x} > \equiv \underline{f}(\bar{x}) \; .$$

3 APPLICAZIONI MULTILINEARI

0 La nozione di applicazione "multilineare" costituisce una generalizzazione di quella di applicazione lineare.

I casi di maggiore interesse sono le forme bilineari "simmetriche" e le forme n-lineari "antisimmetriche" (in uno spazio vettoriale di n dimensioni).

0.3.1. DEFINIZIONE Siano $U_1,\dots,U_p$, V $p+1$ spazi vettoriali.

Un'applicazione

$$f : U_1 \times \dots \times U_p \to V$$

si dice P-LINEARE se è lineare rispetto ad ognuna delle p variabili.

Se $V \equiv \mathbb{R}$, allora, f si dice "forma p-lineare" $\underline{\cdot}$

0.3.2. PROPOSIZIONE

L'insieme

$$L(U_1,\dots,U_p \; ; V)$$

delle applicazioni p-lineari

$$U_1 \times \dots \times U_p \to V$$

con le operazioni naturali di addizione e di moltiplicazione per gli scalari, è uno spazio vettoriale $\underline{\cdot}$

Se $U_1 \equiv \dots \equiv U_p \equiv U$, scriviamo $L(U_1,\dots,U_p \; ; V) \equiv L^p(U,V)$.

Se, inoltre, è $V \equiv \mathbb{R}$ si pone $L(U_1,\dots,U_p \; ; V) \equiv L^p(U)$.

0.3.3. Siano U,V spazi vettoriali, rispettivamente, di dimensioni n,m.

Sia $f : U \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare. Siano $B \equiv \{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n\}$ e $B' \equiv \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m\}$ basi rispettivamente di U e V.

Si indica con

$$M_{BB'}(f) \text{ c } M_{nm}$$

la matrice di f, relativa alle basi B e B', i cui elementi sono dati da

$$f_{ij} \equiv f(\bar{u}_i,\bar{v}_j).$$

Si noti che la matrice rappresentante f dipende dalla scelta delle basi. Quando consideriamo fissate B e B', scriviamo (f) o (f_{ij}) al posto di $M_{BB'}(f)$.

0.3.4. Quando un'applicazione p-lineare dipende da p variabili dello stesso spazio vettoriale è interessante notare come varia il risultato se si effettuano delle permutazioni di posto tra le variabili.

DEFINIZIONE Sia $f : U \times \dots \times U \to V$

un'applicazione p-lineare.

Si dice che f è SIMMETRICA se è invariante rispetto ad ogni permutazione.

Si dice che f è ANTISIMMETRICA se è invariante rispetto alle permutazioni pari, mentre cambia segno per quelle dispari.

0.3.5. Possiamo caratterizzare l'antisimmetria mediante la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE Siano U,V spazi vettoriali. Sia $f : U\times..\times U \to V$ un'applicazione p-lineare.

Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) f è antisimmetrica;

b) f è "alternata"; cioé $\forall \bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_p \in U$ se è $\bar{u}_i = \bar{u}_j$ con $i \neq j$, allora

$$f(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_i,\ldots,\bar{u}_j,\ldots,\bar{u}_p) = 0 \qquad \dot{-}$$

4 ALGEBRA TENSORIALE

0 La nozione di "prodotto tensoriale" fornisce un algoritmo di calcolo che permette di trasformare le applicazioni multilineari in dei nuovi enti detti "tensori", i quali rendono più evidenti certe proprietà formali delle prime.

Se V è uno spazio vettoriale, si possono costruire (per ogni intero p,q) gli spazi vettoriali

$$\otimes^p_q V \equiv \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q \text{ volte}}.$$

Gli elementi di $\otimes^p_q V$ sono detti "tensori p volte controvarianti e q volte covarianti". Dunque, tensori dello stesso tipo possono essere sommati e moltiplicati scalarmente; tensori di tipo qualunque possono essere moltiplicati tensorialmente.

C'è, poi, l'operazione c^i_j di "contrazione" dell'indice controvariante i-mo con l'indice covariante j-mo, che abbassa di uno, sia il grado di controvarianza che quello di covarianza.

La più importante contrazione è la "traccia", che associa un numero reale ad ogni tensore una volta controvariante ed una volta covariante.

Siano, dunque, U e V due spazi vettoriali.

0.4.1. DEFINIZIONE

Dicesi PRODOTTO TENSORIALE di U e V lo spazio vettoriale

$$U \otimes V$$

costituito da tutte le combinazioni formali del tipo

$$\bar{x} \equiv x^{ij}\, \bar{u}_i \otimes \bar{v}_j$$

con $x^{ij} \in \mathbb{R}$, $\bar{u}_i \in U$, $\bar{v}_j \in V$, munito delle seguenti operazioni

$$+ : (U \otimes V) \times (U \otimes V) \to U \otimes V$$

così indicata $\quad + : (\bar{x},\bar{y}) \mapsto \bar{x}+\bar{y} \equiv (x^{ij} + y^{ij})\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j \quad ,$

$$\cdot : \mathbb{R} \times (U \otimes V) \to U \otimes V$$

così indicata $\quad \cdot : (\lambda,\bar{x}) \mapsto \lambda\cdot\bar{x} \equiv (\lambda\cdot x^{ij})\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j$

e con l'unica condizione che la moltiplicazione tensoriale

$$t : U \times V \to U \otimes V$$

data da $\quad t : (\bar{u},\bar{v}) \mapsto \bar{u} \otimes \bar{v}$

sia bilineare .

In modo naturale, si estende la definizione al prodotto tensoriale di p spazi vettoriali e lo si indica con

$$\bigotimes_{i=1}^{p} U_i \equiv U_1 \otimes \ldots \otimes U_p \quad .$$

In particolare, poniamo

$$\otimes^p_q U \equiv \underbrace{U \otimes \ldots \otimes U}_{p \text{ volte}} \otimes \underbrace{U^* \otimes \ldots \otimes U^*}_{q \text{ volte}}$$

Per una definizione più rigorosa, si veda [11] .

0.4.2. PROPOSIZIONE Siano U e V due spazi vettoriali rispetti vamente di dimensioni n,m.

Siano $B \equiv \{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n\}$ e $B' \equiv \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m\}$ basi, rispettivamente, di U e V. Allora è

$$\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V .$$

Inoltre

$$B \otimes B' \equiv \{\bar{u}_1 \otimes \bar{v}_1,\dots,\bar{u}_n \otimes \bar{v}_m\}$$

costituita da $n \cdot m$ elementi, è una base di $U \otimes V$.

Sicché, ogni vettore di $U \otimes V$ si esprime in modo unico

$$\bar{x} = x^{ij}\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j$$

ed è completamente rappresentato dalla matrice delle sue componenti

$$M^{BB'}(\bar{x}) \equiv (x^{ij}) .$$

Si noti che la matrice rappresentante $\bar{x}$ dipende dalla scelta delle basi. Quando consideriamo fissate le basi B e B', scriviamo $(\bar{x})$ al posto di $M^{BB'}(\bar{x})$.

0.4.3. La proprietà più importante del prodotto tensoriale consiste nel fatto che esso permette di trasformare applicazioni bilineari in lineari. Consideriamo, dunque, uno spazio vettoriale W e sia $f : U \times V \to W$ un'applicazione bilineare. Allora, vale la seguente proprietà universale.

TEOREMA

Esiste un'unica applicazione lineare

$$\tilde{f} : U \otimes V \to W$$

tale che

$$\tilde{f}(\bar{u} \otimes \bar{v}) = f(\bar{u},\bar{v}) \quad ,$$

ossia, tale che

$$\tilde{f} \circ t = f \; .$$

Più precisamente, è

$$\tilde{f}(x^{ij}\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j) = x^{ij} f(\bar{u}_i,\bar{v}_j) \; .$$

Esiste un isomorfismo canonico

$$U \otimes V \rightarrow V \otimes U$$

mediante il quale faremo, talvolta, l'identificazione

$$U \otimes V \equiv V \otimes U \; .$$

0.4.4. E' possibile dare la nozione di prodotto tensoriale di applicazioni lineari, in modo naturale, compatibile con la loro composizione. In tal modo, il prodotto tensoriale risulta essere un funtore covariante.

PROPOSIZIONE Siano $h : U \rightarrow U'$ e $k : V \rightarrow V'$ applicazioni lineari.

Allora, esiste un'unica applicazione lineare

$$h \otimes k : U \otimes V \rightarrow U' \otimes V'$$

tale che

$$(h \otimes k)(\bar{u} \otimes \bar{v}) = h(\bar{u}) \otimes k(\bar{v}) \quad ,$$

cioé, tale che

$$(h \otimes k) \circ t = t' \circ (h \otimes k)$$

dove $t : U \times V \to U \otimes V$, $t' : U' \times V' \to U' \otimes V'$,

$(h \times k) : U \times V \to U' \times V'$.

Più precisamente, è

$$h \otimes k(x^{ij}\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j) = x^{ij}h(\bar{u}_i) \otimes k(\bar{v}_j) \qquad \forall\ x^{ij}\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j \in U \otimes V.$$

Inoltre, si considerino B_1, B_1', B_2, B_2' basi rispettivamente di U, U', V, V' e $B_1 \otimes B_2$, $B_1' \otimes B_2'$ le basi indotte in $U \otimes V$ e $U' \otimes V'$, rispettivamente. Allora, relativamente a queste basi, la matrice di $h \otimes k$ è data da

$$(h \otimes k)^{rs}_{ij} = h^r_i \cdot k^s_j \ .$$

Tale applicazione è detta prodotto tensoriale di h e k.

Il prodotto tensoriale di applicazioni lineari si comporta, in modo naturale, nei riguardi della loro composizione.

Si vede che l'applicazione

$$\otimes : L(U,U') \times L(V,V') \to L(U \otimes V, U' \otimes V')$$

data da $\otimes : (h,k) \mapsto h \otimes k$

è un'applicazione bilineare.

0.4.5. TEOREMA

Se le dimensioni di U, U', V, V' sono finite, allora l'applicazio ne

$$\tilde{\otimes} : L(U,U') \times L(V,V') \to L(U \times V,\ U' \times V')$$

data da

$$\tilde{\otimes}(h \otimes k) \equiv \otimes(h,k) \quad ,$$

è un isomorfismo .

Da questo teorema discendono degli importanti corollari che forni scono delle regole pratiche, permettendo di identificare, tramite isomorfismi canonici, i seguenti spazi vettoriali

$$U \otimes V^* \underset{\sim}{\sim} L(V,U) \quad , \quad U^* \otimes V^* \approx (U \otimes V)^* \quad , \quad L^2(U) \approx U^* \otimes U^*$$

0.4.6. Sia $B_1 \equiv \{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n\}$ e $B_2 \equiv \{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m\}$ basi di U e V, e siano $B_1^* \equiv \{\underline{u}^1,\dots,\underline{u}^n\}$ e $B_2^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \dots, \underline{\nu}^m\}$ le basi duali di B_1 e B_2. Abbiamo, allora, le seguenti regole.

I REGOLA

Identifichiamo

- la base di $L(V,U)$, indotta da B_1 e B_2, con

$$B_1 \otimes B_2^* \equiv \{\bar{u}_1 \otimes \underline{\nu}^1, \dots, \bar{u}_i \otimes \underline{\nu}^j, \dots, \bar{u}_n \otimes \underline{\nu}^m\},$$

ossia, scriviamo

$$\bar{u}_i \otimes \underline{\nu}^j : \bar{v}_h \mapsto \bar{u}_i\ \underline{\nu}^j(\bar{v}_h) = \delta^j_h \bar{u}_i \qquad ;$$

- ogni vettore

$$f \equiv f^i{}_j \bar{u}_i \otimes \underline{\nu}^j \quad \in \quad U \otimes V^*$$

con l'applicazione $f \in L(V,U)$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, ossia che è data da

$$f(\bar{x}) = f^i{}_j x^j \bar{u}_i \quad , \quad \forall\, \bar{x} \equiv x^j \bar{v}_j \in V \; ;$$

- ogni applicazione lineare $f \in L(U,V)$, con il vettore $f \in U \otimes V^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, scrivendo

$$f = f^i{}_j \bar{u}_i \otimes \underline{\nu}^j \quad ,$$

dove $f^i{}_j \equiv \langle \underline{u}^i, f(\bar{v}_j) \rangle$ sono gli elementi della matrice di $f \in L(U,V)$.

II REGOLA

Identifichiamo

- la base di $(U \otimes V)^*$, indotta da B_1 e B_2 eon

$$B_1^* \otimes B_2^* \equiv \{\underline{u}^1 \otimes \underline{\nu}^1, \dots, \underline{u}^i \otimes \underline{\nu}^j, \dots, \underline{u}^n \otimes \underline{\nu}^m\}$$

ossia, scriviamo

$$\underline{u}^i \otimes \underline{\nu}^j : \bar{u}_h \otimes \bar{v}_k \mapsto \underline{u}^i(\bar{u}_h)\underline{\nu}^j(\bar{v}_k) = \delta^i{}_h \, \delta^j{}_k \; ;$$

- ogni vettore

$$f \equiv f_{ij} \underline{u}^i \otimes \underline{\nu}^j \quad \in \quad U^* \otimes V^*$$

con la forma lineare $f \in (U \otimes V)^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, ossia, che è data da

$$f(\bar{x}) = f_{ij} x^{ij} \; ; \qquad \forall\, \bar{x} \equiv x^{ij} \bar{u}_i \otimes \bar{v}_j \in U \otimes V;$$

- ogni forma lineare $f \in (U \otimes V)^*$ con il vettore $f \in U^* \otimes V^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, scrivendo

$$f = f_{ij} \underline{u}^i \otimes \underline{v}^j \quad ,$$

dove $f_{ij} \equiv f(\bar{u}_i, \bar{v}_j)$ sono gli elementi della matrice di $f \in (U \otimes V)^*$.

III REGOLA

Identifichiamo

- la base di $L^2(U)$, indotta da B_1, con

$$B_1^* \otimes B_1^* \equiv \{\underline{u}^1 \otimes \underline{u}^1, \ldots, \underline{u}^i \otimes \underline{u}^j, \ldots, \underline{u}^n \otimes \underline{u}^n\}$$

ossia, scriviamo

$$\underline{u}^i \otimes \underline{u}^j : (\bar{u}_h, \bar{u}_k) \mapsto \underline{u}^i(\bar{u}_h)\underline{u}^j(\bar{u}_k) = \delta^i{}_h \delta^j{}_k \quad ;$$

- ogni vettore

$$f \equiv f_{ij} \underline{u}^i \otimes \underline{u}^j \quad \in \quad U^* \otimes U^*$$

con la forma bilineare $f \in L^2(U)$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, ossia, che è data da

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \equiv f_{ij} x^i y^j \quad , \qquad \forall\, \bar{x} \equiv x^i \bar{u}_i, \;\; \bar{y} \equiv y^j \bar{u}_j \in U;$$

- ogni forma bilineare $f \in L^2(U)$ con il vettore $f \in U^* \otimes U^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, scrivendo

$$f = f_{ij} \underline{u}^i \otimes \underline{u}^j \quad ,$$

dove $f_{ij} \equiv f(\bar{u}_i, \bar{u}_j)$ sono gli elementi della matrice di $f \in L^2(U)$.

5 CONTRAZIONI NELL'ALGEBRA TENSORIALE MISTA. TRACCIA

0 Sia V uno spazio vettoriale.

Esiste un'applicazione lineare naturale che permette di "contrarre" un indice controvariante con un indice covariante dei tensori misti, abbassando di una unità il numero degli indici controvarianti e quello degli indici covarianti.

L'esistenza di tale contrazione è una conseguenza immediata della proprietà del prodotto tensoriale e del fatto che esiste una forma bilineare canonica

$$V \times V^* \to \mathbb{R}$$

data da $$(\bar{v}, \underline{\nu}) \mapsto \langle \underline{\nu}, \bar{v} \rangle .$$

0.5.1. Fra tutte le contrazioni, la più importante è la più semplice, ossia quella $V \otimes V^* \to \mathbb{R}$, che è detta "traccia".

PROPOSIZIONE

Esiste un'unica forma lineare

$$\mathrm{tr} : V \otimes V^* \to \mathbb{R}$$

tale che $$\mathrm{tr} : \bar{v} \otimes \underline{\nu} \mapsto \langle \underline{\nu}, \bar{v} \rangle .$$

Più precisamente, è

$$\mathrm{tr}(x^i{}_j \bar{v}_i \otimes \underline{\nu}^j) = x^i{}_j \underline{\nu}^j(\bar{v}_i) \qquad \forall\, x^i{}_j \bar{v}_i \otimes \underline{\nu}^j \in V \otimes V^* \ \dot{-}$$

Sia, poi, $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base di V e sia $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \ldots, \underline{\nu}^n\}$

la base duale di B.

Allora, è

$$tr(x^i_j \bar{v}_i \otimes \underline{\nu}^j) = x^i_i \qquad \forall\, x^i_j \bar{v}_i \otimes \underline{\nu}^j \in V \otimes V^*.$$

Analoghe considerazioni possono essere stabilite per una forma lineare

$$tr : V^* \otimes V \to \mathbb{R} .$$

Tali forme lineari si dicono "traccia".

In particolare, è

$$tr(id_V) = n = \dim V.$$

0.5.2. Le considerazioni precedenti si estendono a tutti i tensori misti nel modo seguente.

DEFINIZIONE Sia $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$.

Dicesi CONTRAZIONE dell'i-mo indice controvariante con il j-mo indice covariante l'unica applicazione lineare

$$c^i_j : \overset{p}{\underset{q}{\otimes}} V \to \overset{p-1}{\underset{q-1}{\otimes}} V$$

data da

$$c^i_j : (\bar{v}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{v}_p \otimes \underline{\nu}^1 \otimes \ldots \otimes \underline{\nu}^q) \mapsto \underline{\nu}^j(\bar{v}_i) \cdot \bar{v}_1 \otimes \ldots \otimes \hat{\bar{v}}_i \otimes \ldots \otimes \bar{v}_p \otimes$$

$$\otimes\, \underline{\nu}^1 \otimes \ldots \otimes \hat{\underline{\nu}}^j \otimes \ldots \otimes \underline{\nu}^q .$$

dove " $\wedge$ " significa "omesso"

In particolare, è $c^1_1 = tr.$

La contrazione gode della seguente proprietà

$$c^i_j \circ c^r_s = c^{r-1}_{s-1} \circ c^i_j \qquad \text{se} \quad r>i \ , \quad s>j.$$

E' utile fare alcune convenzioni di scrittura, per il caso in cui si devono eseguire più contrazioni.

a) Se $1 \leq i_1 < \ldots . < i_r \leq p$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq q$, si pone

$$c^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r} \equiv c^{i_1}_{j_1} \circ \ldots . \circ c^{i_r}_{j_r}$$

b) Se $o<p\leq q$, allora si pone

$$i_{\bar{x}}\, y \equiv c^{1 \ldots p}_{1 \ldots p}\, \bar{x} \otimes y \qquad \forall\ \bar{x} \in \otimes^p V,\ y \in \otimes^r_q V$$

se $o < q \leq p$, allora si pone

$$i_{\underline{y}}\, x \equiv c^{1 \ldots q}_{1 \ldots q}\, \underline{y} \otimes x \qquad \forall\ \underline{y} \in \otimes^q V^*,\ x \in \otimes^p_r V$$

se $p = o$, allora si pone

$$i_\lambda x \equiv \lambda x \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \otimes^r_q V.$$

0.5.3. La contrazione i gode di alcune semplici proprietà.

PROPOSIZIONE Sia $p \leq q$.

a) L'applicazione

$$i : \otimes^p V \times \otimes^q V^* \to \otimes^{q-p} V^*$$

data da $\quad i : (\bar{x},\underline{y}) \mapsto i_{\bar{x}}\,\underline{y}$

è bilineare.

b) E' $\quad i_{\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2}\underline{y} = i_{\bar{x}_2} i_{\bar{x}_1}\,\underline{y}$

$\forall\, \bar{x}_1 \in \otimes^{p_1} V, \quad \bar{x}_2 \in \otimes^{p_2} V\,, \ \underline{y} \in \otimes^q V^* \quad$ con $p_1 + p_2 = p$.

0.5.4. Procedendo nell'identificazione dei tensori con applicazioni lineari e multilineari, possiamo tradurre in termini di contrazione tensoriale varie formule riguardanti la composizione di applicazioni lineari e multilineari.

PROPOSIZIONE Sia V uno spazio vettoriale a dimensione finita. Si considerino le seguenti identificazioni canoniche

$$\otimes^1_1 V \equiv L(V,V) \quad , \quad \otimes^o_2 V \equiv L^2(V) \quad .$$

a) E' $h(\bar{x}) = c^2_1(h \otimes \bar{x}) = i_{\bar{x}}\, h \qquad \forall\, h \in L(V,V),\ \bar{x} \in V.$

b) E' $f(\bar{x},\bar{y}) = c^{12}_{12}\,(f \otimes \bar{x} \otimes \bar{y}) = i_{\bar{x} \otimes \bar{y}} f, \quad \forall\, f \in L^2(V)\ ,\ \bar{x},\bar{y} \in V.$

c) E' $h \circ k = C^2_1(h \otimes k) \qquad \forall\, h,k \in L(V,V).$

d) E' $f \circ (h x k) = c^{12}_{12}(f \otimes h \otimes k) \qquad \forall\, f \in L^2(V)\ ,\ h,k \in L(V,V)$.

0.5.5. PROPOSIZIONE Sia $p \leq q$.

La contrazione

$$i : \otimes^p V \times \otimes^q V^* \to \otimes^{q-p} V^*$$

è caratterizzata dalla seguente formula.

Siano $\bar{x} \in \otimes^p V$, $\underline{y} \in \otimes^q V^*$, allora

$$i_{\bar{x}}\, \underline{y} \in \otimes^{q-p} V^*$$

è l'unico tensore, tale che

$$< i_{\bar{x}}\, \underline{y} \, , \bar{z} > \equiv <\underline{y} \, , \bar{x} \otimes \bar{z}> , \ \forall\, \bar{z} \in \otimes^{q-p} V \, .$$

0.5.6. DEFINIZIONE Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Dicesi TENSORE FONDAMENTALE di V il tensore

$$\hat{1} \in V \otimes V^* \quad \text{o} \quad \hat{1} \in V^* \otimes V,$$

dato da

$$\hat{1} \equiv \delta^i{}_j \bar{v}_i \otimes \underline{\nu}^j \quad , \quad \hat{1} \equiv \delta^i{}_j \underline{\nu}^j \otimes \bar{v}_i$$

se $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ è una base di V e $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \ldots, \underline{\nu}^n\}$ è la sua base duale .

6 ALGEBRA ESTERNA : TENSORI SIMMETRICI ED ANTISIMMETRICI.

0 Sia U uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Come per le applicazioni multilineari anche per i tensori $\bar{x} \in \otimes^p U$ ha senso fare delle permutazioni degli indici e vedere se queste lasciano invariato o no $\bar{x}$.

Indichiamo con Σ_p l'insieme delle possibili permutazioni di $J_p \equiv \{1,\dots,p\}$ e con $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$ il segno della permutazione σ, dove m è il numero delle inversioni di σ , ossia il numero delle coppie $(i,j) \in J_p \times J_p$ tale che

$$1 \leq i < j \leq p \quad \text{e} \quad \sigma(i) > \sigma(j) \quad .$$

0.6.1. PROPOSIZIONE Sia p un intero positivo e $\sigma \in \Sigma_p$ una permutazione. Allora esiste un unico isomorfismo

$$\tilde{\sigma} : \otimes^p U \to \otimes^p U$$

tale che $$\tilde{\sigma} : \bar{u}_1 \otimes \dots \otimes \bar{u}_p \mapsto \bar{u}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \bar{u}_{\sigma^{-1}(p)} \quad \dot{-}$$

0.6.2. DEFINIZIONE Sia $\bar{x} \in \otimes^p U$.

Si dice che $\bar{x}$ è SIMMETRICO se è $\tilde{\sigma}(\bar{x}) = \bar{x}$, $\forall \sigma \in \Sigma_p$.

Si dice che $\bar{x}$ è ANTISIMMETRICO se è $\tilde{\sigma}(\bar{x}) = \varepsilon(\sigma)\bar{x}$, $\forall \sigma \in \Sigma_p$ $\dot{-}$

Gli insiemi dei tensori simmetrici e dei tensori antisimmetrici di grado p costituiscono due sottospazi vettoriali di $\otimes^p U$ che si indicano rispettivamente con $V^p U$ e $\Lambda^p U$.

0.6.3. Per poter costruire tensori simmetrici ed antisimmetrici di ordine p a partire da tensori qualsiasi, si definiscono degli opportuni operatori.

DEFINIZIONE

Dicesi OPERATORE DI SIMMETRIZZAZIONE l'applicazione

$$S : \otimes^p U \to \otimes^p U$$

data da $$S \equiv \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \tilde{\sigma} \quad .$$

Dicesi OPERATORE DI ANTISIMMETRIZZAZIONE l'applicazione

$$A : \otimes^p U \to \otimes^p U$$

data da $$A \equiv \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \varepsilon(\sigma)\tilde{\sigma} \quad .$$

0.6.4. DEFINIZIONE

Dicesi MOLTIPLICAZIONE TENSORIALE SIMMETRICA l'applicazione

$$s \equiv S \circ t : U^p \to V^p U$$

data da

$$s : (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p) \mapsto \bar{u}_1 v \dots v\bar{u}_p \equiv \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \bar{u}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \bar{u}_{\sigma(p)} \quad .$$

Dicesi MOLTIPLICAZIONE TENSORIALE ANTISIMMETRICA l'applicazione

$$a \equiv A \circ t : U^p \to \Lambda^p U$$

data da $a : (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p) \mapsto \bar{u}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{u}_p \equiv \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \varepsilon(\sigma) \bar{u}_{\sigma(1)} \times \ldots \times \bar{u}_{\sigma(p)}$ ∸

0.6.5. DEFINIZIONE

Un tensore $\bar{x} \in \Lambda^p U$ ($\bar{x} \in V^p U$) si dice DECOMPONIBILE se esistono $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p \in U$ tali che

$$\bar{x} = \bar{u}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{u}_p \qquad (\bar{x} = \bar{u}_1 \vee \ldots \vee \bar{u}_p) \quad ∸$$

Se $B \equiv \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ è una base di U, allora $B' \equiv \{\bar{u}_{i_1} \vee \ldots \vee \bar{u}_{i_p}\}$ con $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_p \leq n$ e $B'' \equiv \{\bar{u}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{u}_{i_p}\}$ con $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$ sono basi rispettivamente di $V^p U$ e $\Lambda^p U$.

Inoltre, è

$$\dim V^p U = \binom{p+n-1}{p}, \quad \dim \Lambda^p U = \binom{n}{p} \quad \text{se} \quad \dim U = n.$$

In particolare, se $p = n$, allora è $\dim \Lambda^n U = 1$, allora, $\bar{u}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{u}_n$ è una base di $\Lambda^n U$, indotta da B.

Questo fatto permette di trasportare i problemi relativi ad uno spazio vettoriale U di dimensione n allo spazio vettoriale $\Lambda^n U$ di dimensione 1. Pertanto gli spazi $\Lambda^p U$ sono molto interessanti e d'ora in poi ci soffermiamo a studiare i tensori antisimmetrici.

0.6.6. TEOREMA

E' equivalente stabilire se $B \equiv \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ è una base di U o se $B' \equiv \{\bar{u}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{u}_n\}$ è una base di $\Lambda^n U$, ossia se l'unico vettore di B' è diverso da quello nullo.

0.6.7. Introduciamo, innanzitutto, il concetto di "orientazione" di uno spazio vettoriale U di dimensione 1.

Se $\bar{u}, \bar{u}' \in U$ sono due vettori non nulli, allora esiste un unico $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, tale che $\bar{u}' = \lambda \bar{u}$.

Si vede, allora, che la relazione binaria definita in $U-\{\bar{o}\}$ nel modo seguente

$$\forall\ \bar{u}, \bar{u}' \in U-\{\bar{o}\}$$

tale che $\bar{u}' = \lambda\ \bar{u} : (\bar{u}' \sim \bar{u}) \Longleftrightarrow (\lambda > o)$

è una relazione d'equivalenza.

Tale relazione determina due classi d'equivalenza.

0.6.8. DEFINIZIONE

Dicesi ORIENTAZIONE di U la scelta di una delle due classi d'equivalenza nell'insieme delle basi di U.

Si dice che U è orientato se è scelta un'orientazione di U.

0.6.9. Possiamo ora definire l'orientazione dello spazio vettoriale U di dimensione n.

DEFINIZIONE

Due basi ordinate $(\bar{u}_1,\dots\bar{u}_n)$, $(\bar{u}'_1,\dots\bar{u}'_n)$ di $\underline{U}$ si dicono equivalenti se è $\bar{u}_1 \wedge\dots\wedge\bar{u}_n \sim \bar{u}'_1\wedge\dots\wedge\bar{u}'_n$.

Allora, dicesi ORIENTAZIONE di U la scelta di una delle due classi d'equivalenza nell'insieme delle basi ordinate di U o corrispondentemente nell'insieme delle basi di $\Lambda^n U$.

Si noti che in generale non esiste un'orientazione canonica di U, nel senso che non c'è un modo privilegiato di scegliere una delle due orientazioni. Ci sono, però, delle eccezioni.

Ad esempio, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ha un'orientazione canonica, perché possiede una base canonica $\{\bar{e}_1,\dots\bar{e}_n\}$.

Abbiamo visto che dal teorema 0.4.5. conseguivano degli importanti corollari che fornivano alcune regole pratiche.

Ora, in questo paragrafo, facendo un discorso analogo è possibile identificare, tramite isomorfismi canonici, i seguenti spazi vettoriali

$$\Lambda^p U^* \approx (\Lambda^p U)^* \qquad , \qquad \Lambda^p U^* \approx A^p U$$

dove $A^p U$ è lo spazio vettoriale delle forme p-lineari antisimmetriche.

0.6.10. Sia $B \equiv \{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n\}$ una base di U e sia $B^* \equiv \{\underline{u}^1,\dots,\underline{u}^n\}$ la sua duale. Valgono, allora, le seguenti regole.

I REGOLA

Identifichiamo

- la base di $(\Lambda^p U)^*$, indotta da B, con

$$\Lambda^p B^* \equiv \{\underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} .$$

Ossia, scriviamo

$$\underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p} : \bar{v}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \bar{v}_{j_p} \mapsto \det(\langle \underline{u}^i, \bar{v}_j \rangle) = \delta^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p}$$

(per $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n$) ;

- ogni vettore $$\underline{f} \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p} \in \Lambda^p U^*$$

con la forma lineare $\underline{f} \in (\Lambda^p U)^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, ossia che è data da

$$\underline{f}(\bar{x}) \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} (\underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p})(\bar{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} x^{i_1 \ldots i_p}$$

$$\forall\ \bar{x} \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} x^{i_1 \ldots i_p} \bar{v}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{v}_{i_p} \in \Lambda^p U;$$

- ogni forma lineare $\underline{f} \in (\Lambda^p U)^*$ con il vettore $\underline{f} \in \Lambda^p U^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, scrivendo

$$\underline{f} = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p} ,$$

dove $f_{i_1 \ldots i_p} \equiv \langle \underline{f} , \bar{v}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{v}_{i_p} \rangle$ sono gli elementi della matrice di $\underline{f} \in (\Lambda^p U)^*$.

Osserviamo che questa regola differisce dalla regola II di 0.4.6. per un fattore $p!$. Normalmente per i tensori antisimmetrici, useremo quella data poc'anzi.

II REGOLA

Identifichiamo

- la base di $\Lambda^p U$, indotta da B, con

$$\Lambda^p B^* \equiv \{\underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \quad .$$

Ossia, scriviamo

$$\underline{u}^{i_1} \ldots \underline{u}^{i_p} : (\bar{v}_{j_1}, \ldots, \bar{v}_{j_p}) \mapsto \det(\langle \underline{u}^i , \bar{v}_j \rangle) = \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_p}_{j_p} \quad ,$$

(per $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n$) ;

- ogni vettore

$$\underline{f} \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p} \in \Lambda^p U^*$$

con la forma p-lineare alternata $\underline{f} \in A^p U$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, ossia, che è data da

$$\underline{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p) \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} (\underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p})(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \det(x)^{i_1 \ldots i_p}_{1 \ldots p}$$

dove $(x)^{i_1 \ldots i_p}_{1 \ldots p} \in M^p_p$ è ottenuta dalla matrice delle componenti di $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p$, prendendo le righe $i_1, \ldots i_p$, $\forall\ \bar{x}_1 \equiv \sum_{i_1=1}^{n} x^{i_1}{}_1 \bar{v}_{i_1}$, ... $\ldots, \bar{x}_p \equiv \sum_{i_p=1}^{n} x^{i_p}{}_p \bar{v}_{i_p} \in U$;

- ogni forma p-lineare alternata $\underline{f} \in A^p U$ con il vettore $\underline{f} \in \Lambda^p U^*$, che ha la stessa rappresentazione matriciale, scrivendo

$$\underline{f} = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \underline{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{i_p} \quad ,$$

dove $f_{i_1 \ldots i_p} \equiv \langle \underline{f} , (\bar{v}_{i_1}, \ldots \bar{v}_{i_p}) \rangle$ sono gli elementi della matrice di $\underline{f} \in A^p U$.

Questa regola, invece, non è diversa dalla regola III di 0.4.6.

0.6.11. In modo analogo al 5° paragrafo, si introduce la nozione di contrazione fra gli spazi vettoriali

$$i' : \Lambda^p U \times \Lambda^q U^* \to \Lambda^{q-p} U^* \qquad \text{se} \quad p \leq q$$

data da

$$i'_{\bar{x}} \underline{y} = \frac{1}{p!} i_{\bar{x}} \underline{y}$$

D'ora in poi, quando non c'è pericolo di confusione e ci si riferisce ai tensori antisimmetrici, scriveremo per semplicità i al posto di i'.

PROPOSIZIONE Sia $p \leq q$.

La contrazione

$$i : \Lambda^p U \times \Lambda^q U^* \to \Lambda^{q-p} U^*$$

è caratterizzata dalla seguente formula.

Siano $\bar{x} \in \Lambda^p U$, $\underline{y} \in \Lambda^q U^*$, allora

$$i_{\bar{x}} \underline{y} \in \Lambda^{q-p} U^*$$

è l'unico tensore,tale che

$$< i_{\bar{x}} \underline{y} , \bar{z} > \equiv < \underline{y} , \bar{x} \wedge \bar{z} > \quad , \quad \forall \bar{z} \in \Lambda^{q-p} U \quad \underline{.}$$

0.6.12. PROPOSIZIONE Sia $p \leq q$.

a) L'applicazione

$$i : \Lambda^p U \times \Lambda^q U^* \to \Lambda^{q-p} U^*$$

è bilineare.

b) E'

$$i_{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2} \underline{y} = i_{\bar{x}_2} i_{\bar{x}_1} \underline{y} \quad , \forall \bar{x}_1 \in \Lambda^{p_1} U, \bar{x}_2 \in \Lambda^{p_2} U \ , \ \underline{y} \in \Lambda^{q} U^*$$

con $p_1 + p_2 = p$.

c) E'

$$i_{\bar{x}} \underline{y} \wedge \underline{z} = (i_{\bar{x}} \underline{y}) \wedge \underline{z} + (-1)^{q_1} \underline{y} \wedge i_{\bar{x}} \underline{z}$$

$\forall \bar{x} \in \Lambda^1 U \equiv U$, $\underline{y} \in \Lambda^{q_1} U^*$, $\underline{z} \in \Lambda^{q_2} U^*$ con $1 \leq q_1 + q_2$ $\dot{-}$

0.6.13. Introduciamo ora alcune notazioni che permettono lo studio della rappresentazione matriciale dei tensori antisimmetrici.

DEFINIZIONE Siano n, $1 \leq p \leq n$ interi.

a) Dicesi MATRICE DI ANTISIMMETRIZZAZIONE la matrice

$$\bar{\epsilon} \equiv (\epsilon^{i_1 \ldots i_p}{}_{j_1 \ldots j_p}) \in M^{\overbrace{n \ldots n}^{p \text{ volte}}}_{\underbrace{n \ldots n}_{p \text{ volte}}}$$

data da

$$\epsilon^{i_1 \ldots i_p}{}_{j_1 \ldots j_p} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } j_1, \ldots, j_p \text{ sono tutti distinti e se } \{i_1, \ldots, i_p\} \text{ è una permutazione pari di } \{j_1, \ldots, j_p\}; \\ 0 & \text{se } j_1, \ldots, j_p \text{ non sono tutti distinti o se } \{i_1, \ldots, i_p\} \text{ non è una permutazione di } j_1, \ldots, j_p; \\ -1 & \text{se } j_1, \ldots j_p \text{ sono tutti distinti e se } \{i_1, \ldots, i_p\} \text{ è una permutazione dispari di } \{j_1, \ldots, j_p\}. \end{cases}$$

b) Dicesi MATRICE DI RICCI

la matrice $\bar{\epsilon} \equiv (\epsilon^{i_1 \dots i_n}) \in M^{\overbrace{n \dots n}^{n \text{ volte}}}$

o la matrice $\underline{\epsilon} \equiv (\epsilon_{i_1 \dots i_n}) \in M_{\underbrace{n \dots n}_{n \text{ volte}}}$

data da

$$\epsilon^{i_1 .. i_n} \equiv \epsilon_{i_1 .. i_n} \equiv \begin{cases} 1 \text{ se } \{i_1,\dots,i_n\} \text{ è una permutazione pari di} \{1,\dots,n\}; \\ 0 \text{ se } \{i_1,\dots,i_n\} \text{ non è una permutazione di } \{1,\dots,n\}; \\ -1 \text{ se } \{i_1,\dots,i_n\} \text{ è una permutazione dispari di} \{1,\dots,n\} \end{cases}$$

c) Dicesi DETERMINANTE l'applicazione

$$\det : \mathbb{R}^{nn} \to \mathbb{R}$$

data da

$$\det : (x) \mapsto \det(x) \equiv \sum_{1 \leq i_1,\dots,i_n \leq n} \epsilon^{i_1 \dots i_n} x_{i_1 1} \dots x_{i_n n} \,,$$

$\forall\, x \equiv (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{nn}$ $\dot{-}$

0.6.14. Passando, dunque, allo studio della rappresentazione matriciale, incominciamo dall'operatore di antisimmetrizzazione.

PROPOSIZIONE Sia $B \equiv \{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n\}$ una base di U.

Allora, è

$$A(\bar{u}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\bar{u}_{j_p}) = \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_p\leq n} \epsilon^{i_1..i_p}_{j_1..j_p}\,\bar{u}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\bar{u}_{j_p} .$$

Pertanto, risulta

$$A(\bar{x})= \sum_{\substack{1\leq i_1,..,i_p\leq n\\ 1\leq j_1,..,j_p\leq n}} \epsilon^{i_1..i_p}_{j_1..j_p}\, x^{j_1..j_p}\,\bar{u}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\bar{u}_{i_p}$$

dove $\bar{x} = \sum_{1\leq j_1,..,j_p\leq n} x^{j_1..j_p}\,\bar{u}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\bar{u}_{j_p} \in \otimes^p U$ $\dot{-}$

0.6.15. Studiamo, ora, la rappresentazione matriciale dei tensori antisimmetrici.

PROPOSIZIONE Sia

$$\bar{x} = \sum_{1\leq i_1,..,i_p\leq n} x^{i_1...i_p}\,\bar{u}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\bar{u}_{i_p} \in \otimes^p U .$$

Allora, le tre condizioni seguenti sono equivalenti

a) $\bar{x}\in\Lambda^p U$;

b) $x^{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(p)}} = \epsilon^{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(p)}}_{i_1..i_p}\, x^{i_1..i_p}$, $\forall\ 1\leq i_1..i_p\leq n,\ \sigma\in\Sigma_p$;

c) $x^{i_1...i_p} = \sum_{1\leq j_1..j_p\leq n} \epsilon^{i_1..i_p}_{j_1...j_p}\, x^{j_1...j_p}$.

Sia, dunque, $\bar{x}\in\Lambda^p U \subset \otimes^p U$. Allora, valgono le seguenti decom posizioni di $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \sum_{1\le i_1,\dots,i_p\le n} x^{i_1\dots i_p}\,\bar{u}_{i_1}\otimes\dots\otimes\bar{u}_{i_p} =$$

$$= \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_p\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_p\le n}} \epsilon^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_p}\, x^{j_1\dots j_p}\,\bar{u}_{i_1}\otimes\dots\otimes\bar{u}_{i_p} =$$

$$= \sum_{1\le j_1,\dots,j_p\le n} x^{j_1\dots j_p}\,\bar{v}_{j_1}\otimes\dots\otimes\bar{v}_{j_p} \quad \dot{-}$$

Dunque, le componenti di $\bar{x}$, secondo la base $B'\equiv\{\bar{u}_{i_1}\wedge\dots\wedge\bar{u}_{i_p}\}_{1\le i_1<\dots<i_p\le n}$ di $\Lambda^p U$, sono uguali alle corrispondenti componenti, secondo la base $B''\equiv\{\bar{u}_{i_1}\otimes\dots\otimes\bar{u}_{i_p}\}_{1\le i_1,\dots,i_p\le n}$ di $\otimes^p V$.

0.6.16. Studiamo, poi, la rappresentazione matriciale della moltiplicazione tensoriale antisimmetrica.

PROPOSIZIONE

E'

$$a(\bar{u}_{j_1},\dots,\bar{u}_{j_p})\equiv\bar{u}_{j_1}\wedge\dots\wedge\bar{u}_{j_p} = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} \epsilon^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_p}\,\bar{u}_{i_1}\wedge\dots\wedge\bar{u}_{i_p} .$$

Pertanto, se

$$\bar{x}_1 \equiv \sum_{j=1}^{n} x_1^{\,j}\,\bar{u}_j, \dots\dots, \bar{x}_p \equiv \sum_{j=1}^{n} x_p^{\,j}\,\bar{u}_j \in U ,$$

allora, è

$$\bar{x}_1\wedge\dots\wedge\bar{x}_p = \sum_{1\le j_1<\dots<j_p\le n} x_1^{j_1}\dots x_p^{j_p}\,\bar{u}_{j_1}\wedge\dots\wedge\bar{u}_{j_p} =$$

$$= \sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_p\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_p\le n}} \epsilon^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_p}\, x_1^{j_1}\dots x_p^{j_p}\,\bar{u}_{i_1}\wedge\dots\wedge\bar{u}_{i_p} =$$

$$= \sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_p\le n\\ \sigma\in\Sigma_p}} \epsilon(\sigma)\, x_1^{i_{\sigma(1)}}\dots x_p^{i_{\sigma(p)}}\,\bar{u}_{i_1}\wedge\dots\wedge\bar{u}_{i_p} ,$$

ossia, è

$$\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \det(x)^{i_1 \dots i_p} \bar{u}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{i_p} ,$$

dove $(x)^{i_1 \dots i_p} \in M^p_p$ è il minore ottenuto da x, prendendo le righe $i_1, \dots, i_p$ $\dot{-}$

Dunque, le componenti $x^{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{R}$ di $\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p$, secondo i vettori $\bar{u}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{i_p}$ (con $1 \lesssim i_1 < \dots < i_p \lesssim n$) della base di $\Lambda^p U$, sono date dai determinanti dei minori $(x)^{i_1 \dots i_p}$ della matrice (x) costituita dalle componenti di $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p$

$$x^{i_1 \dots i_p} = \det(x)^{i_1 \dots i_p} .$$

0.6.17. Diamo, infine, una formula che esprima il modo di variare delle componenti dei tensori antisimmetrici, relativamente ad un cambiamento di base.

PROPOSIZIONE Sia $B' \equiv \{\bar{u}'_1, \dots, \bar{u}'_n\}$ una base di U.

Sia

$$\bar{u}'_j = \sum_{i=1}^{n} S^i_{\ j} \bar{u}_i .$$

Allora, è

$$\bar{u}'_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}'_{j_p} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \det(S)^{i_1 \dots i_p}_{\ \ j_1 \dots j_p} \bar{u}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{i_p} ,$$

dove $(S)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} \in M^p_p$ è il minore ottenuto da $S \in M^n_n$ prendendo le righe $i_1, \dots, i_p$ e le colonne $j_1, \dots, j_p$.

Pertanto, se

$$\bar{x} \equiv \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} x^{i_1 \dots i_p} \bar{u}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}_{i_p} \equiv$$

$$\equiv \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_p \le n} x'^{j_1 \dots j_p} \bar{u}'_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{u}'_{j_p} ,$$

allora, è

$$x^{i_1 \dots i_p} = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_p} x'^{j_1 \dots j_p} \det(S)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots i_p} .$$

In particolare, è

$$\bar{u}'_1 \wedge \dots \wedge \bar{u}'_n = \det (S) \quad \bar{u}_1 \wedge \dots \wedge \bar{u}_n ,$$

e se $\bar{x} \equiv x \; \bar{u}_1 \wedge \dots \wedge \bar{u}_n$

$\equiv x' \; \bar{u}'_1 \wedge \dots \wedge \bar{u}'_n$

allora,

$$x = \det(S) \, x' \qquad \dot{-}$$

7 FORMA BILINEARE SIMMETRICA

Sia V uno spazio vettoriale.

0 In questo paragrafo, fissata una forma bilineare simmetrica

$$f : V \times V \to \mathbb{R}$$

si studia la nozione di "ortogonalità" che essa induce in V.

Si dimostra che esiste sempre una base ortogonale (ne esistono infinite) rispetto ad f, cioè una base in cui la matrice di f è "diagonale"; inoltre, qualunque sia la base così fatta, il numero degli elementi diagonali positivi, negativi e nulli è invariante.

Ci si interessa, anche, della nozione di forma bilineare simmetrica "non degenere" e "definita positiva" osservando che la seconda ipotesi è più forte della prima.

Il presente paragrafo è particolarmente utile per parlare della moltiplicazione scalare negli spazi vettoriali "euclidei".

0.7.1. DEFINIZIONE Sia $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

Due vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$ di V si dicono ORTOGONALI rispetto ad f, e si scrive $\bar{u} \perp \bar{v}$

se $$f(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad .$$

Sia S un sottoinsieme di V. Dicesi ORTOGONALE di S l'insieme

$$S \equiv \{\bar{v} \in V \,/\, \bar{u} \perp \bar{v} \quad , \quad \forall\, \bar{u} \in S\} \quad .$$

Si vede che $S^{\perp}$ è un sottospazio di V.

0.7.2. DEFINIZIONE Sia $\dim V = n$. Sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base di V.

Si dice che B è ORTOGONALE rispetto ad f se è

$$f_{ij} \equiv f(\bar{v}_i , \bar{v}_j) = o \qquad \forall\ i \neq j \quad \dot{-}$$

In termini matriciali, tale fatto si esprime dicendo che la matrice (f_{ij}) è diagonale.

0.7.3. DEFINIZIONE

Si dice che una forma bilineare $f : V \times V \to \mathbb{R}$ è NON DEGENERE se è

$$V^{\perp} = \bar{o} \quad ,$$

ossia, se è

$$(\forall\ \bar{v} \in V, \quad f(\bar{u} , \bar{v}) = o) \Rightarrow \bar{u} = \bar{o} \quad \dot{-}$$

L'applicazione f induce un'applicazione lineare

$$'f : V \to V^*$$

così definita $\qquad 'f : \bar{v} \mapsto \underline{v} \quad ,$

dove $\qquad \underline{v} : \bar{x} \mapsto \underline{v}(\bar{x}) \equiv f(\bar{v} , \bar{x}) \; .$

0.7.4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $m > o$. Sia $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

TEOREMA (di SYLVESTER)

Esistono tre interi positivi o nulli n, o, p tali che per ogni base ortogonale $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$, è (salvo eventuale ordinamento di B)

$$f(\bar{v}_i, \bar{v}_i) < o \qquad \text{se} \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$f(\bar{v}_i, \bar{v}_i) = o \qquad \text{se} \qquad n+1 \leq i \leq n+o$$

$$f(\bar{v}_i, \bar{v}_i) > o \qquad \text{se} \qquad n+o+1 \leq i \leq n+o+p = m \quad \underline{.}$$

0.7.5. DEFINIZIONE Sia $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

Si dice che f è DEFINITA POSITIVA se è

$$f(\bar{u}, \bar{u}) > o \quad , \quad \text{per ogni } \bar{o} \neq \bar{u} \in V \ \underline{.}$$

8 SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI

0 In questo paragrafo si introduce la nuova struttura di spazio vettoriale euclideo, ottenuta fissando in uno spazio vettoriale, a dimensione finita, una moltiplicazione scalare.

Questo concetto è importante per la costruzione di un modello matematico dello spazio fisico, ossia, per una formulazione assiomatica della Geometria Euclidea .

0.8.1. DEFINIZIONE Si dice SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO una coppia

$$(E , \underline{g})$$

dove

- E è uno spazio vettoriale a dimensione finita;
- $\underline{g}$ è una forma bilineare

$$\underline{g} : E \times E \to \mathbb{R} \quad ,$$

così indicata $\qquad \underline{g} : (\bar{x},\bar{y}) \mapsto \bar{x} \cdot \bar{y} \quad ,$

simmetrica e definita positiva, detta MOLTIPLICAZIONE SCALARE o METRICA.

0.8.2. Uno degli aspetti più importanti della metrica è la possibilità di eseguire "misure". Innanzitutto si possono misurare le "lunghezze" dei vettori.

Diamo, pertanto, la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Dicesi NORMA (relativa a $\underline{g}$) l'applicazione

$$|| \; || \quad : E \rightarrow \mathbb{R}$$

così indicata $\quad || \; || \; : \bar{x} \mapsto ||\bar{x}|| \equiv (\bar{x} \cdot \bar{x})^{\frac{1}{2}}$.

Si tenga presente che l'applicazione ora definita è detta norma, perché verifica le proprietà di una norma che è un concetto più generale:

a) $||\bar{x}|| > 0 \qquad \forall \, \bar{x} \neq \bar{0} \in E$;

b) $||\lambda\bar{x}|| = |\lambda| \cdot ||\bar{x}||$

c) $||\bar{x} + \bar{y}|| \leq ||\bar{x}|| + ||\bar{y}||$.

Inoltre, è

d) $|\, \bar{x} \cdot \bar{y} \,| \leq ||\bar{x}|| \; ||\bar{y}||$ "disuguaglianza di Schwarz".

0.8.3. DEFINIZIONE

Un vettore $\bar{v} \neq \bar{0} \in E$ si dice UNITARIO se è

$$||\bar{v}|| = 1 \quad .$$

Allora, dicesi VERSORE di $\bar{v}$ il vettore unitario

$$\text{vers } \bar{v} \equiv \bar{v}/||\bar{v}|| \; .$$

Inoltre, una base $B \equiv \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n\}$ di E si dice ORTONORMALE se è ortogonale e se i suoi vettori sono unitari .

0.8.4. Sia F un sottospazio di E. Il seguente teorema mostra che il supplementare di U è univocamente determinato.

TEOREMA

E'

$$E = F \oplus F^{\perp} \quad .$$

Nel caso particolare, in cui F è generato dal vettore $\bar{u} \neq \bar{o}$, allora ogni vettore $\bar{v} \in E$ ammette l'unica decomposizione

$$\bar{v} = \bar{v}'' + \bar{v}^{\perp} \quad ,$$

dove $\bar{v}'' = \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\bar{u}^2} \bar{u} \in F \quad , \bar{v}^{\perp} = \bar{v} - \bar{v}'' \in F^{\perp} \quad .$

0.8.5. PROPOSIZIONE Sia F un sottospazio di E. Sia

$B' \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\} \subset F$, con $m \leq n$, una base di F, ortogonale. Sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base di E, ortogonale, ottenuta estendendo B'.

Allora, una base di $F^{\perp}$ è

$$B'' \equiv \{ \bar{v}_{m+1}, \ldots, \bar{v}_n \} \quad .$$

0.8.6. DEFINIZIONE Sia F un sottospazio di E.

Le due proiezioni della somma diretta $E = F \oplus F^{\perp}$

$$p'' \equiv \pi^1 : E \to F'' \quad , \quad p^{\perp} \equiv \pi^2 : E \to F^{\perp}$$

sono dette LA PROIEZIONE PARALLELA e LA PROIEZIONE ORTOGONALE .

0.8.7. Introduciamo ora la nozione di "angolo non orientato". Per far ciò è necessaria la seguente premessa.

LEMMA

Sia $\sim$ la relazione binaria in $(E - \{\bar{O}\})^2$, data da

$$(\bar{u},\bar{v}) \sim (\bar{u}' , \bar{v}') \Leftrightarrow \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||} = \frac{\bar{u}' \cdot \bar{v}'}{||\bar{u}'|| \cdot ||\bar{v}'||}$$

$\forall\ \bar{u},\bar{v},\bar{u}',\bar{v}' \in E - \{\bar{o}\}$.

Allora, $\sim$ è una relazione d'equivalenza.

Inoltre, si ha

$$(\bar{v},\bar{u}) \sim (\bar{u},\bar{v}) \sim (\lambda\ \bar{u},\ \mu\ \bar{v})$$

$\forall\ \bar{u},\bar{v} \in E - \{\bar{o}\}$, λ , $\mu > o$.

Per la disuguaglianza di Schwarz è

$$- 1 \leq \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||} \leq 1 .$$

Perciò, esiste un unico numero

$$o \leq \theta \leq \pi$$

tale che

$$\cos\theta = \frac{\bar{u} . \bar{v}}{||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||}$$

dove $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'applicazione data da

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \qquad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R} .$$

Il numero θ non dipende dai rappresentanti delle classi di

dove

$$<\underline{x}\ ,\ \bar{v}> \equiv \bar{x}\cdot\bar{v} \qquad , \qquad \forall\ \bar{v}\in E.$$

Si dà, così, la nozione di forma covariante ($\underline{x}$) e controvariante ($\bar{x}$) di un vettore.

Dunque, se $\bar{x}\in E$, $B\equiv\{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n\}$ è una base di E, indicheremo con x^i le componenti di $\bar{x}$ secondo la base B e con x_i le componenti di $\underline{x}$ secondo la base duale.

Si ha

$$x_i = g_{ij}x^j \quad .$$

dove $$g_{ij} \equiv \underline{g}\ (\bar{v}_i\ ,\ \bar{v}_j) \quad .$$

L'isomorfismo $'\underline{g}$ si estende mediante $\otimes$ ai prodotti tensoriali

$$\otimes^p E \to \otimes^p E^* \quad , \quad \Lambda^p E \to \Lambda^p E^*\ ,\ V^p E \to V^p E^* \quad .$$

In particolare, la forma controvariante $\bar{g}\in\otimes^2 E$ relativa a $\underline{g}\in\otimes^2 E^*$ è caratterizzata da

$$\bar{g}(\underline{x}\ ,\ \underline{y}) = \underline{g}(\bar{x}\ ,\ \bar{y}) \quad .$$

La molti_plicazione scalare si può estendere ai prodotti tensoriali nel modo seguente (mediante la proprietà universale di $\otimes$) .

$$\otimes^p E \times \otimes^p E \to \mathbb{R}$$

$$(\bar{x}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{x}_p \; , \; \bar{y}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{y}_p) \mapsto (\bar{x}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{x}_p) \cdot (\bar{y}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{y}_p) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x}_1 \cdot \bar{y}_1) \ldots (\bar{x}_p \cdot \bar{y}_p) \; .$$

In particolare risulta

$$\bar{g} \cdot \bar{g} = n \; .$$

Essendo $\Lambda^n E^*$ uno spazio vettoriale euclideo a dimensione 1, esistono esattamente due vettori unitari

$$\pm \underline{\eta} \in \Lambda^n E^*$$

che differiscono per il verso.

Allora, se E ha un'orientazione fissata, si ha l'unico elemento $\underline{\eta} \in \Lambda^n E^*$ di norma 1 ed orientazione positiva, ovvero l'unica forma $\underline{\eta} \in \Lambda^n E^*$ tale che $\underline{\eta}(\bar{v}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{v}_n) = 1$, per ogni base ortonormale ordinata, orientata positivamente, $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ di E.

Più precisamente, se $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \ldots, \underline{\nu}^n\}$ è la base duale di B, allora, è

$$\underline{\eta} = \sqrt{\det(\underline{g})}\; \underline{\nu}^1 \wedge \ldots \wedge \underline{\nu}^n$$

dove $(\underline{g}) \equiv (g_{hk})$.

In particolare, se tale base è ortonormale, allora, è

$$\underline{\eta} = \underline{\varepsilon}^1 \wedge \ldots \wedge \underline{\varepsilon}^n \; .$$

Pertanto, $\underline{\eta}$ è la base (canonica) ortonormale di $\Lambda^n E^*$.

Allora, ogni vettore $\underline{\nu} \in \Lambda^n E^*$ si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare di $\underline{\eta}$

$$\underline{\nu} = \nu \underline{\eta}$$

con $\nu \equiv \underline{\nu} \cdot \underline{\eta} \equiv < \underline{\nu} , \bar{\eta} >$.

L'applicazione

$$* : \Lambda^n E^* \rightarrow R$$

data da $$* : \underline{\nu} \mapsto \nu \equiv \underline{\nu} \cdot \underline{\eta} \qquad \forall \; \underline{\nu} \in \Lambda^n E^*$$

è un isomorfismo che mette in corrispondenza le basi canoniche di $\Lambda^n E^*$ e di R

$$* : \underline{\eta} \mapsto 1 .$$

Analogamente, si può parlare di $\bar{\eta}$ come base ortonormale di $\Lambda^n E$ duale di $\underline{\eta}$, essendo data da

$$\bar{\eta} = (\sqrt{\det(\underline{g})})^{-1} \bar{v}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{v}_n ,$$

e quindi definire l'isomorfismo che si indicherà ancora con $*$

$$* : \Lambda^n E \rightarrow R$$

dato da $$* : \bar{v} \mapsto v \equiv \bar{v} \cdot \bar{\eta} .$$

0.8.9 . Generalizzando, si trova un isomorfismo canonico, detto di

HODGE, tra $\Lambda^p E^*$ e $\Lambda^{n-p} E^*$ il cui significato geometrico è quello di far corrispondere le forme volume unitarie dei sottospazi (di dim. p e n - p) mutuamente supplementari e ortogonali di E.

PROPOSIZIONE

Sia $\underline{\eta} \in \Lambda^n E^*$ la forma volume unitaria.

Allora, l'applicazione

$$* : \Lambda^p E^* \to \Lambda^{n-p} E^*$$

data da $$* : \underline{x} \mapsto i_{\bar{x}} \underline{\eta}$$

è un isomorfismo, detto ISOMORFISMO DI HODGE.

Valgono, inoltre, le seguenti proprietà

a) $\underline{y} \wedge * \underline{x} = (-1)^{q(p-q)} * i_{\bar{y}} \underline{x}$, se $q \leq p$

b) $\underline{y} \wedge * \underline{x} = \underline{x} \wedge * \underline{y} = \bar{x} \cdot \bar{y}\, \underline{\eta}$, se $q = p$

c) $* \underline{x} \cdot * \underline{y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$, se $q = p$

d) $** \underline{x} = (-1)^{p(n-p)} \underline{x}$,

$\forall\, \underline{x} \in \Lambda^p E^*$, $\underline{y} \in \Lambda^q E^*$.

Analogamente, l'applicazione (indicata ancora con $*$)

$$* : \Lambda^p E \to \Lambda^{n-p} E$$

data da $$* : \bar{x} \mapsto i_{\underline{x}} \bar{\eta}$$

è un isomorfismo. Inoltre, valgono proprietà analoghe alle precedenti. E, ancora, l'isomorfismo $*$ commuta con $'\underline{g}$, ossia, è

$$'\bar{g}(*\underline{x}) = *\bar{x} .$$

0.8.10.Un caso importante si verifica, se dim E = 3. Infatti, in tal caso, è $*(\underline{x}\wedge\underline{y}) \in E^*$, $\forall\, \underline{x}, \underline{y} \in E^*$.

DEFINIZIONE Sia E uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, orientato. Sia $\underline{\eta}$ la forma volume unitaria.

Dicesi MOLTIPLICAZIONE VETTORIALE l'applicazione bilineare alternata

$$E^* \times E^* \to E^*$$

indicata con $(\underline{u}, \underline{v}) \mapsto \underline{u} \times \underline{v} \equiv *(\underline{u} \wedge \underline{v})$.

Il significato geometrico del prodotto vettoriale è dato dalle seguenti proprietà :

a) $\underline{u} \times \underline{v}$ è ortogonale ad $\underline{u}$ e $\underline{v}$;

b) se $\underline{u}, \underline{v} \neq \underline{o}$, allora $\|\underline{u} \times \underline{v}\| = \|u\|\|v\| \operatorname{sen}\theta$, dove θ è l'angolo non orientato formato da $\underline{u}$ e $\underline{v}$ e sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'applicazione data da

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots , \forall\, x \in \mathbb{R} .$$

Se $\underline{u} = \underline{o}$ o $\underline{v} = \underline{o}$, allora $\|\underline{u} \times \underline{v}\| = o$;

c) se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti, allora la base ordinata $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v}\}$ determina l'orientazione positiva di E.

Tramite $'\bar{g}$ si può anche considerare la moltiplicazione vettoriale

$$E \times E \to E$$

data da $$\bar{u} \times \bar{v} \equiv i_{\underline{u} \wedge \underline{v}} \bar{\eta} \equiv {}^{\prime}\bar{g}(\underline{u} \times \underline{v}) .$$

Per maggiori dettagli si veda [11] .

La struttura euclidea di E permette di trovare una relazione tra un endomorfismo $\hat{f}: E \to E$ e una forma bilineare $\underline{f} : E \times E \to R$

Più precisamente, poniamo

$$\underline{f}(\bar{x},\bar{y}) \equiv \hat{f}(\bar{x})\cdot\bar{y} \quad , \qquad \forall\ \bar{x},\bar{y} \in E.$$

Si vede che la forma bilineare associata alla somma di due endomorfismi (che è ancora un endomorfismo) è data dalla somma delle forme bilineari associate agli endomorfismi.

Allora, si vede che l'applicazione

$$End(E) \to L^2(E)$$

è un isomorfismo.

In termini matriciali, si ha il seguente risultato.

0.8.11.PROPOSIZIONE Sia $B \equiv \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n\}$ una base di E.

E' $$f_{ij} = f^k{}_i\, g_{kj} \quad ,$$

dove (f_{ij}) , $(f^k{}_i)$, (g_{kj}) sono le matrici, rispettivamente, di $\underline{f}$, $\hat{f}$, $\underline{g}$ relative alla base B.

Sia $h \in End(E)$. Diamo ora la nozione di "endomorfismo unitario".

0.8.12.DEFINIZIONE

Si dice che h è un ENDOMORFISMO UNITARIO se è

$$h(\bar{x}) \cdot h(\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y} \qquad , \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in E \quad \dot{-}$$

In particolare, h conserva la lunghezza e l'ortogonalità.

0.8.13.PROPOSIZIONE Sia $h \in \mathrm{End}\,(E)$.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) h è unitario.

b) h è un automorfismo e,in una base ortonormale,si ha

$$(h^i{}_j)^{-1} = (h^j{}_i) \qquad \dot{-}$$

Indichiamo con $U(E) \subset Gl(E)$ l'insieme degli endomorfismi unitari. Allora, si vede che $U(E)$, con la legge di composizione

$$\circ : U(E) \times U(E) \rightarrow U(E)$$

data da
$$\circ : (h,k) \mapsto h \circ k$$

è un gruppo, detto " gruppo unitario" di E.

Determiniamo ora gli endomorfismi unitari quando E ha dimensione 1,2,3.

0.8.14.LEMMA Sia $\dim E = 1$.

Allora, gli endomorfismi unitari sono:

1) id_E endomorfismo identico;

2)$- id_E$ endomorfismo opposto.

0.8.15. LEMMA Sia $\dim E = 2$. Sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ una base ortonormale di E.

Allora, gli endomorfismi unitari sono rappresentati da una delle seguenti matrici

$$1) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad 2) \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

con $0 \leq \theta < 2\pi$.

La 1) è detta matrice di "rotazione", la 2) è detta matrice di "ribaltamento" ed è data dal prodotto della matrice di rotazione e della matrice di "riflessione" $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

0.8.16. LEMMA Sia $\dim E = 3$. Sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base ortonormale di E. Allora, gli endomorfismi unitari sono rappresentati da una delle seguenti matrici.

$$1) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad 2) \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

con $0 \leq \theta < 2\pi$.

Quindi, ogni endomorfismo unitario ha un autovettore $(\bar{e}_3)$.

0.8.17. Sia E orientato e $\dim E = 2$. Siano $\bar{o} \neq \bar{u}, \bar{v} \in E$.

Allora, esiste un unico endomorfismo unitario h che conserva l'orientazione dello spazio ($\det h = 1$), tale che

$$h(\bar{u}) = \frac{||\bar{u}||}{||\bar{v}||} \cdot \bar{v} \quad .$$

Diamo, pertanto, la seguente definizione .

DEFINIZIONE

Dicesi ANGOLO ORIENTATO di $(\bar{u},\bar{v})$, l'unico numero reale $0 \leq \theta < 2\pi$, tale che

$$(h) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

nella base ordinata ortonormale che ha come primo vettore vers $\bar{u}$

0 INTRODUZIONE

Uno "spazio affine" è un qualsiasi insieme su cui operano gli elementi di uno spazio vettoriale, detti "vettori liberi", tramite le cosiddette "traslazioni". Sostanzialmente esso è uno spazio vettoriale, dove si è tolto il privilegio del vettore nullo: quindi, in un tale spazio tutti i punti sono "equivalenti".

La nozione di "spazio affine" è alla base di una visione moderna della geometria euclidea. Infatti, un modello semplice ed elegante della geometria euclidea può essere costituito da uno spazio affine con una forma bilineare simmetrica definita positiva.

La nozione di spazio affine è parimenti alla base di una visione moderna della fisica classica e relativistica. Infatti, possiamo rappresentare gli spazi degli eventi, delle posizioni, degli istanti, ecc... mediante spazi affini.

Nelle esposizioni più tradizionali dell'analisi, della geometria e della fisica, al posto degli spazi affini si usano spazi vettoriali o più in particolare $\mathbb{R}^n$. Noi riteniamo più soddisfacente il nostro punto di vista sotto vari aspetti. Infatti, non privilegiando punti o direzioni particolari, o basi particolari, possiamo centrare gli aspetti sostanziali delle ulteriori nozioni che andremo ad introdurre, senza fare uso di elementi spuri. Per esempio, possiamo trattare le applicazioni geometriche della teoria senza fare uso di sistemi di coordinate e le applicazioni fisiche senza fare uso dei sistemi di riferimento.

In questo capitolo, dopo la nozione di spazio affine, si danno le principali regole di calcolo con le quali si caratterizzano gli elementi di tale spazio.

Diamo, quindi, il concetto di "dimensione" di uno spazio affine, tra mite quella del suo spazio vettoriale.

Definiamo poi i "sottospazi affini", come i sottoinsiemi di uno spazio affine, che conservano ancora tale struttura.

Si osservi che la nozione di spazio "prodotto cartesiano" permetterà di introdurre gli spazi tangenti e cotangenti di uno spazio affine.

Dato uno spazio affine $(E,\bar{E},\tau)$, definiamo lo "spazio tangente" TE di E nel modo seguente

$$TE \equiv E \times \bar{E} = \bigcup_{p \in E} T_p\bar{E}$$

dove $T_p\bar{E}$ è "lo spazio vettoriale dei vettori applicati in p".

Facciamo notare che TE ha una struttura naturale di spazio affine.

Diamo, quindi, le nozioni di "fibrato tangente e cotangente" di E.

Ad esempio, definiamo il fibrato tangente di E come una terna

$$\tau E \equiv (TE\ ,\ p_E,\ E\ )$$

dove $p_E : TE \to E$, data da $p_E\colon (p,\bar{u}) \mapsto p$, è detta "proiezione".

Le nozioni precedenti saranno iterate, poi, nel 3° paragrafo.

Nel 4° paragrafo, diamo la nozione di campo di vettori e covettori "liberi" ed "applicati".

A tale proposito si consiglia il lettore di leggere la relativa introduzione, in modo da avere chiara la differenza sostanziale tra i termini "libero" ed "applicato".

Relativamente agli insiemi dei campi tensoriali si considerano, poi, delle opportune operazioni con le quali è possibile munire tali insiemi di una struttura di spazio vettoriale.

Facciamo, infine, un notevole esempio di campo tensoriale.

Un punto importante di questo capitolo è rappresentato, senz'altro, dai "sottospazi verticali ed orizzontali", rispettivamente, dello spazio tangente e cotangente di un fibrato banale $\eta \equiv (E \times \bar{F}, \pi, E)$.

Sostanzialmente, il sottospazio verticale $\nu\, T(E\times\bar{F}) \equiv (E\times\bar{F})\times(\bar{o}\times\bar{F})$ di $T(E\times\bar{F})$ è quel sottospazio affine di $T(E\times\bar{F})$, ottenuto bloccando gli incrementi dei punti di E e considerando solo incrementi dei vettori applicati. Osserviamo, allora, che questo sottospazio continua ad esistere sulle "sottovarietà" e sulle "varietà differenziabili"in quanto ha senso confrontare incrementi del vettore nello stesso punto di applicazione. Questo è il motivo per cui diamo più importanza a tale spazio che a quello orizzontale su $T(E\times\bar{F})$.

Invece, il sottospazio orizzontale $\circ\, T^*(E\times\bar{F}) \equiv (E\times\bar{F}) \times (\bar{E}^* \times \underline{o})$ di $T^*(E\times\bar{F})$ è lo spazio affine i cui punti sono costituiti dai covettori di $E\times\bar{F}$, che si annullano sui "vettori verticali". Quindi, anche questo sottospazio continua ad esistere sulle varietà differenziabili.

Si osservi che il sottospazio orizzontale $\circ\, T(E\times\bar{F}) \equiv (E\times\bar{F}) \times (\bar{E}\times\bar{o})$ di $T(E\times\bar{F})$ è il supplementare di $\nu T(E\times\bar{F})$ e che il sottospazio verticale $\nu\, T^*(E\times\bar{F}) \equiv (E\times\bar{F}) \times (\underline{o}\times\bar{F}^*)$ è il supplementare di $\circ\, T^*(E\times\bar{F})$.

Un maggior approfondimento su queste nozioni, si possono avere leggendo le note riportate nel 6° paragrafo.

Naturalmente, possiamo applicare i risultati precedenti al caso in cui $\bar{F} \equiv \bar{E}$, o $\bar{F} \equiv \bar{E}^*$.

Introduciamo anche le applicazioni Γ e Π dette rispettivamente "connessione affine" e "proiezione naturale". Mentre Π è estendibile al caso delle varietà differenziabili, in quanto dipende dalla sola struttura "differenziabile", l'applicazione Γ è una nuova struttura di "connessione" che bisogna aggiungere a quella differenziabile, affinché i sottospazi $\circ T(Ex\bar{F})$ e $\nu T^{*}(Ex\bar{F})$ abbiano significato anche nel caso delle varietà differenziabili.

Infine, terminiamo questo capitolo dedicando l'ultimo paragrafo alle importanti nozioni di "rilevamento" di funzioni e campi.

Esse possono essere estese al caso delle varietà differenziabili. Inoltre, si riveleranno utili nella trattazione dei sistemi di coordinate sugli spazi tangenti, cotangenti, ecc... .

1 SPAZI AFFINI

0 La prima nozione fondamentale che si incontra è quella di "spazio affine".

In questo paragrafo ne diamo la definizione e le sue primissime conseguenze.

Introduciamo, poi, la "dimensione" di uno spazio affine, le nozioni di "sottospazio", di "quoziente" di uno spazio affine.

Concludiamo, quindi, facendo vedere che il "prodotto cartesiano" di più spazi affini è uno spazio affine.

I.1.1. DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO AFFINE una terna $(E,\bar{E},\tau)$, dove

- E è un insieme, detto lo "spazio dei punti",
- $\bar{E}$ è uno spazio vettoriale, detto lo "spazio vettoriale dei vettori liberi",
- τ è un'applicazione, detta "traslazione"

$$\tau : E \times \bar{E} \to E$$

così indicata $\tau : (p,\bar{u}) \mapsto p+\bar{u}$

la quale gode delle seguenti proprietà:

E_1) $p + (\bar{u}+\bar{v}) = (p+\bar{u}) + \bar{v}$ $\forall\, p \in E,\ \bar{u},\bar{v} \in \bar{E}$;

E_2) $p + \bar{o} = p$ $\forall\, p \in E,\ \bar{o} \in \bar{E}$;

E_3) $p+\bar{u} = p \Rightarrow \bar{u} = \bar{o}$ se $p \in E,\ \bar{u} \in \bar{E}$;

E_4) $\forall\, p \in E \Rightarrow \{p+\bar{u}\}_{\bar{u} \in \bar{E}} = E$.

Si vede poi facilmente che, se E_1 vale per un certo p, allora essa vale per ogni $p \in E$.

L'applicazione

$$\tau_{\bar{u}} : E \to E$$

così indicata $\quad \tau_{\bar{u}} : p \mapsto p+\bar{u}$

dicesi "traslazione secondo il vettore $\bar{u}$" .

In seguito, indicheremo uno spazio affine, più semplicemente, con E.

Si badi bene a non confondere lo spazio affine E con lo spazio vettoriale euclideo, indicato con lo stesso simbolo.

I.1.2. PROPOSIZIONE Sia $\bar{u} \in \bar{E}$.

L'applicazione $\tau_{\bar{u}}$ è una biiezione e la biiezione inversa è $\tau_{-\bar{u}}$, ossia è

$$\tau_{\bar{u}} \circ \tau_{-\bar{u}} = id_E = \tau_{-\bar{u}} \circ \tau_{\bar{u}} \quad .$$

D. $\forall \; p \in E$ è

- $\quad (\tau_{\bar{u}} \circ \tau_{-\bar{u}})(p) = \tau_{\bar{u}}(\tau_{-\bar{u}}(p)) = \tau_{\bar{u}}(p+(-\bar{u})) = (p+(-\bar{u}))+\bar{u} =$

$$= p+(-\bar{u}+\bar{u}) = p+\bar{o} = p \; ;$$

- $\quad (\tau_{-\bar{u}} \circ \tau_{\bar{u}})(p) = \tau_{-\bar{u}}(\tau_{\bar{u}}(p)) = \tau_{-\bar{u}}(p+\bar{u}) = (p+\bar{u}) + (-\bar{u}) =$

$$\equiv p+(\bar{u}-\bar{u}) = p+\bar{o} = p \quad \underline{.}$$

Sostanzialmente, detti $p,q \in E$, se da p si va a q tramite l'unico $\bar{u}$, allora da q si va a p tramite l'unico $-\bar{u} \in \bar{E}$: è quan to esprime la seguente proposizione.

I.1.3. PROPOSIZIONE   Siano $p,q \in E$.

Esiste un unico vettore $\bar{u} \in E$, tale che

$$p + \bar{u} = q \quad .$$

D.

L'esistenza è assicurata dalla E_4. Si vede facilmente che tale vettore è unico.

I.1.4. Da questa proposizione discende la seguente definizione.

DEFINIZIONE   Sia (p,q) una coppia ordinata di punti di E.

Dicesi DIFFERENZA di q e p l'unico vettore libero

$$\bar{u} = q-p \in \bar{E}$$

tale che $$p + \bar{u} = q$$.

I.1.5. PROPOSIZIONE   Siano $p,q,r \in E$ e $\bar{u} \in \bar{E}$.

Valgono le seguenti formule:

a) $p-p = \bar{o}$

b) $p = q+(p-q)$

c) $p-q = -(q-p)$

d) $(p+\bar{u}) - q = (p-q)+\bar{u}$

e) $p-q = (p-r) + (r-q)$

f) $q-p = s-r \Rightarrow r-p = s-q$.

I.1.6. Il concetto di "dimensione" di uno spazio affine, dato dalla seguente definizione, è importante ed ha un significato profondo, in quanto permette di caratterizzare ogni punto di E con un'unica n-pla di numeri reali. Pertanto, esso risulterà più chiaro allorché introdurremo i sistemi di coordinate su E, ossia, allorché identificheremo punti di E con n-ple di $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE

Si dice che E ha DIMENSIONE n, se $\bar{E}$ ha dimensione n.

I.1.7. Diamo ora un particolare esempio di spazio affine.

PROPOSIZIONE

Ogni spazio vettoriale V è uno spazio affine, assumendo, come spazio vettoriale dei vettori liberi, V stesso ed assumendo, come traslazione, l'applicazione somma vettoriale

$$\tau : V \times V \to V$$

data da
$$\tau : (\bar{u},\bar{v}) \mapsto \bar{u} + \bar{v} \quad .$$

I.1.8. DEFINIZIONE Sia $F \subset E$ un sottoinsieme di E.

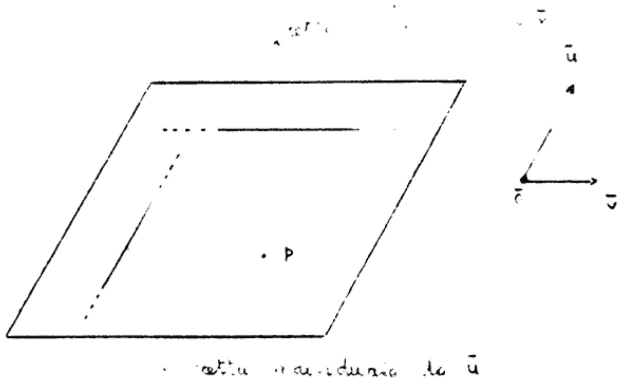
Si dice che F è un SOTTOSPAZIO AFFINE di E se esiste un punto $p \in E$ ed un sottospazio vettoriale $\bar{F} \subset \bar{E}$, tali che

$$F = \{ p + \bar{u} \}_{\bar{u} \in \bar{F}} \quad .$$

Si vede che è $\dim F \leq \dim E$.

Per esempio, se $(E,\bar{E} \equiv \{\bar{u},\bar{v},\bar{o}\} ,\tau)$ è un piano dello spazio generico, allora i sottospazi affini più importanti di E sono:

1) retta individuata da $\bar{u}$
2) " " " $\bar{v}$
3) ciascun punto p di E, individuato dal vettore nullo.



I.1.9. Diamo, ora, l'importante nozione di spazio "prodotto cartesiano" la quale servirà, per esempio, nello studio degli spazi "tangenti", "cotangenti", ecc... di uno spazio affine.

PROPOSIZIONE Siano $E_1,\dots,E_n$ spazi affini.

L'insieme "prodotto cartesiano"

$$E \equiv E_1 x \dots x E_n$$

ha una struttura canonica di spazio affine, assumendo, come spazio vettoriale dei vettori liberi, il prodotto

$$\bar{E} \equiv \bar{E}_1 x \dots x \bar{E}_n$$

ed assumendo, come traslazione, l'applicazione

$$\tau : E \times \bar{E} \to E$$

data da $$\tau : (p_1,\dots,p_n ; \bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n) \mapsto (p_1+\bar{u}_1,\dots,p_n+\bar{u}_n) .$$

D.

E' una immediata conseguenza delle definizioni di spazio affine e di prodotto.

E'

$$\dim E = \dim E_1 + \ldots + \dim E_n \quad .$$

I.1.10. PROPOSIZIONE . Sia $\bar{F} \subset \bar{E}$ un sottospazio vettoriale di $\bar{E}$.

La terna

$$(E\ ,\ \bar{E}\ ,\ \tau)_{/\bar{F}} = (E/\bar{F}\ ,\ \bar{E}/\bar{F},\ \tau')$$

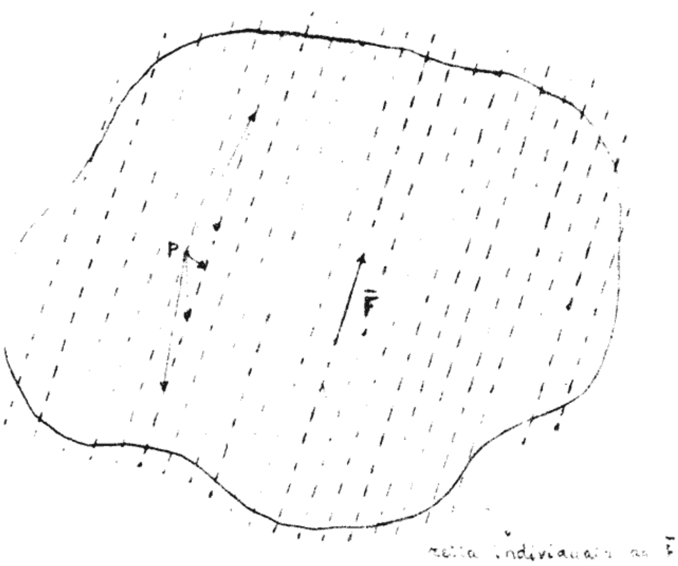
dove

- $E/\bar{F} \equiv \{[\ p\ ]\}_{p \in E} \equiv \{p + \bar{F}\}_{p \in E}$

- $\bar{E}/\bar{F} = \{[\ \bar{u}\ ]\}_{\bar{u} \in \bar{E}} \equiv \{\bar{u} + \bar{F}\}_{\bar{u} \in E}$

- $\tau' : E/\bar{F} \times \bar{E}/\bar{F} \to E/\bar{F}$ data da $\tau'([\ p\ ]+[\ \bar{u}\ ]) = [\ p+\bar{u}\ ]$

è uno spazio affine, detto SPAZIO QUOZIENTE di E, rispetto ad $\bar{F}$.



Se è $\dim \bar{F} = 1$, ossia se $\bar{F}$ è un qualsiasi vettore libero di $\bar{E}$, allora ogni classe d'equivalenza di $E/\bar{F}$ è costituita da punti di E, tali che la loro differenza sia un vettore libero "parallelo" ad $\bar{F}$. Sicché ogni elemento di $E/\bar{F}$ è una "retta parallela" a quella individuata da $\bar{F}$. Gli elementi di ogni classe d'equivalenza di $\bar{E}/\bar{F}$ sono vettori liberi che "congiungono" punti di una retta con punti di un'altra retta. Inoltre τ' è ben definita perché è indipendente dalla scelta dei rappresentanti della classe.

Si vede che

$$\dim E/\bar{F} = \dim E - \dim F \ .$$

dove F è il sottospazio affine di E, il cui spazio vettoriale dei vettori liberi è $\bar{F}$.

2 SPAZI TANGENTE E COTANGENTE

Sia E uno spazio affine.

Cominciamo questo paragrafo con il concetto di "spazio vettoriale dei vettori applicati" in un punto $p \in E$. Tenendo conto che in E tutti i punti sono equivalenti, evidentemente questo spazio vettoriale viene a coincidere proprio con $\bar{E}$. Se adesso consideriamo l'insieme costituito da tutte le coppie $(p,\bar{u})$ $(\forall\, p \in E \;, \forall\, \bar{u} \in \bar{E})$ si vede che esso è uno spazio affine (e non vettoriale) detto "spazio tangente" di E. Analogo discorso lo possiamo fare per i covettori applicati. Passando, invece, alle sottovarietà di uno spazio affine e alle varietà differenziabili vedremo che occorre ragionare in modo diverso. Ciò dipende, principalmente, dal fatto che con queste ultime nozioni non possiamo parlare di equivalenza fra punti, e quindi, non è possibile confrontare vettori applicati in punti diversi. Nasce, così, l'esigenza di introdurre ulteriori strumenti matematici(connessione...) in modo da permettere un tale confronto.

Concludiamo questo paragrafo, dando delle applicazioni importanti che mettono in relazione gli spazi tangenti e cotangenti di uno spazio affine con quest'ultimo.

I.2.1. DEFINIZIONE Sia $p \in E$.

Dicesi SPAZIO VETTORIALE DEI VETTORI APPLICATI in p, o SPAZIO TANGENTE in p, l'insieme

$$T_pE \equiv \{(p,\bar{u})\}_{\bar{u}\,\in\,\bar{E}} \quad .$$

Ogni elemento di T_pE dicesi VETTORE APPLICATO in p, o VETTORE TANGENTE in p.

Dicesi SPAZIO DEI VETTORI APPLICATI, o SPAZIO TANGENTE, l'insieme

$$TE \equiv E \times \bar{E} = \bigcup_{p \in E} T_pE \;\; .$$

I.2.2. PROPOSIZIONE Siano $p,q \in E$.

Allora, si hanno gli isomorfismi canonici

$$T_pE \approx \bar{E} \approx T_qE$$

dati da $$(p,\bar{u}) \mapsto \bar{u} \mapsto (q,\bar{u}) \qquad \forall\, \bar{u} \in \bar{E} \;\; .$$

Ossia T_pE ha una struttura naturale di spazio vettoriale.

Passando alle varietà differenziabili, tale equivalenza non sussisterà poiché non ha senso confrontare lo stesso vettore in due punti distinti. A ciò si ovvia introducendo sulle varietà una nuova struttura che "connette" vettori applicati in punti diversi.

I.2.3. Invece, TE non è, in generale, uno spazio vettoriale.

COROLLARIO

Lo spazio tangente TE, essendo un prodotto di spazi affini, ha una struttura naturale di spazio affine, assumendo, come spazio vettoriale dei vettori liberi di TE, lo spazio vettoriale

$$\overline{TE} \equiv \bar{E} \times \bar{E}$$

ed assumendo, come traslazione, l'applicazione

$$\tau : TE \times \overline{TE} \to TE$$

data da $$\tau : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p+\bar{v},\bar{u}+\bar{w}) \qquad .$$

I.2.4. DEFINIZIONE

Dicesi FIBRATO TANGENTE di E la terna

$$\tau E \equiv (TE, p_E, E)$$

dove

- TE è lo spazio tangente,
- p_E è l'applicazione

$$p_E : TE \to E$$

così definita $\quad p_E : (p,\bar{u}) \mapsto p$

detta "proiezione" $\quad \dot{-}$

I.2.5. La definizione duale alla I.2.1, è espressa nel modo seguente.

DEFINIZIONE Sia $p \in E$.

Dicesi SPAZIO VETTORIALE DEI COVETTORI APPLICATI in p, o SPAZIO COTANGENTE in p, l'insieme

$$T_p^* E \equiv \{p,\underline{u}\}_{\underline{u} \in \bar{E}^*} .$$

Ogni elemento di T_p^*E dicesi COVETTORE APPLICATO in p.

Dicesi SPAZIO DEI COVETTORI APPLICATI, o SPAZIO COTANGENTE, l'insieme

$$T^*E \equiv E \times \bar{E}^* = \bigcup_{p \in E} T_p^* E \quad \dot{-}$$

I.2.6. PROPOSIZIONE

Lo spazio cotangente T^*E, essendo un prodotto di spazi affini, ha una struttura naturale di spazio affine, assumendo, come spazio vettoriale dei covettori liberi di T^*E, lo spazio vettoriale

$$\overline{T^*E} \equiv \bar{E} \times \bar{E}^*$$

ed assumendo, come traslazione, l'applicazione

$$\tau : T^*E \times \overline{T^*E} \to T^*E$$

data da $\tau : (p,\underline{u} \; ; \; \bar{v},\underline{w}) \mapsto (p+\bar{v}, \; \underline{u}+\underline{w})$.

I.2.7. DEFINIZIONE

Dicesi FIBRATO COTANGENTE di E la terna

$$\tau^*E \equiv (T^*E \; , \; q_E \; , \; E)$$

dove

- T^*E è lo spazio cotangente,
- q_E è l'applicazione

$$q_E : T^*E \to E$$

così definita $q_E : (p,\underline{u}) \mapsto p$

detta "proiezione" .

3 SPAZI TENSORIALI

Questo paragrafo può essere letto in un secondo momento in quanto è una generalizzazione del precedente.

Resta assegnato sempre uno spazio affine E.

Per i simboli di prodotto tensoriale si veda il Capitolo 0.

I.3.1. DEFINIZIONE

Si definisce SPAZIO TENSORIALE (risp. SPAZIO TENSORIALE ESTERNO) di E l'insieme

$$T^r_s E \equiv E \times \otimes^r_s \bar{E} \equiv E \times (\otimes^r \bar{E} \otimes \otimes^s \bar{E}^*)$$

(risp.
$$\Lambda^r_s E \equiv E \times \Lambda^r_s \bar{E} \equiv E \times (\Lambda^r \bar{E} \otimes \Lambda^s \bar{E}^*)\ )\ .$$

I.3.2. PROPOSIZIONE

Lo spazio tensoriale $T^r_s E$ (risp. $\Lambda^r_s E$) è uno spazio affine, assumendo, come spazio vettoriale dei tensori liberi (risp. come spazio vettoriale dei tensori esterni liberi) lo spazio vettoriale

$$\overline{T^r_s E} \equiv \bar{E} \times \otimes^r_s \bar{E} \qquad (\text{risp. } \overline{\Lambda^r_s E} \equiv \bar{E} \times \Lambda^r_s \bar{E})$$

ed assumendo, come traslazione, l'applicazione

$$\tau : T^r_s E \times \overline{T^r_s E} \to T^r_s E$$

data da
$$\tau : (p, t\ ; \bar{u}, \bar{t}) \mapsto (p+\bar{u}\ ,\ t+\bar{t})$$

(risp.
$$\tau : \Lambda^r_s E \times \overline{\Lambda^r_s E} \to \Lambda^r_s E$$

data da $\quad \tau : (p,t\ ;\ \bar{u},\bar{t}) \mapsto (p+\bar{u},\ t+\bar{t}) \quad)$.

I.3.3. DEFINIZIONE

Dicesi FIBRATO TENSORIALE di E (risp. FIBRATO TENSORIALE ESTERNO di E la terna

$$\tau^r_s E \equiv (T^r_s E,\ \tau^r_{sE},\ E)$$

(risp. $\quad \lambda^r_s E \equiv (\Lambda^r_s E,\ \tau^r_{sE},\ E) \quad)$,

dove

- $T^r_s E$ è lo spazio tensoriale (risp. $\Lambda^r_s E$ è lo spazio tensoriale esterno) di E;

- τ^r_{sE} è l'applicazione, detta PROIEZIONE

$$\tau^r_{sE} : T^r_s E \to E$$

così definita $\quad \tau^r_{sE} : (p,t) \mapsto p$

(risp. $\quad \tau^r_{sE} : \Lambda^r_s E \to E$

così definita $\quad \tau^r_{sE} : (p,t) \mapsto p \quad)$.

4 CAMPI DI VETTORI E COVETTORI

0 In questo numero facciamo alcune osservazioni sull'impiego delle nozioni di campo vettoriale "libero" ed "applicato ".

Analoghe osservazioni possono essere fatte per i campi covettoriali.

Negli spazi affini, poiché tutti i punti sono"equivalenti" , si utilizza, principalmente, la prima nozione e si vede che essa è equivalente alla seconda, mediante una semplice regola.

Tale equivalenza sussiste, ancora, per un "sistema di coordinate cartesiane". Infatti, come si vedrà chiaramente nel 6° capitolo, poiché le "curve coordinate" sono delle rette, allora, la base indotta da tale sistema è costante e, quindi, non è necessario precisare il punto di applicazione.

Invece, bisogna tenerne conto quando si ha un sistema di coordinate "non cartesiano", in quanto le basi indotte dalle coordinate non sono costanti.

Infine, per le varietà differenziabili, occorre utilizzare solo la seconda nozione, in quanto la prima non ha significato .

Sia, dunque, E uno spazio affine.

1.4.1 . DEFINIZIONE

Dicesi CAMPO VETTORIALE LIBERO (risp. CAMPO COVETTORIALE LIBERO) un'applicazione

$$\bar{X}^{\ell} : E \to \bar{E}$$

così indicata $\quad \bar{X}^{\ell} : p \mapsto \bar{X}^{\ell}(p)$

(risp. $\quad \underline{X}^{\ell} : E \to \bar{E}^{*}$

così indicata $\quad \underline{X}^{\ell} : p \mapsto \underline{X}^{\ell}(p) \quad$) .

Dicesi CAMPO VETTORIALE APPLICATO (risp. CAMPO COVETTORIALE APPLICATO) un'applicazione

$$\bar{X} : E \rightarrow TE$$

data da $\bar{X} : p \mapsto (p, \bar{X}^{\ell}(p))$,

(risp. $\underline{X} : E \rightarrow T^{*}E$

data da $\underline{X} : p \mapsto (p, \underline{X}^{\ell}(p))$) .

Si osservi che le definizioni date sono equivalenti, nel senso che, fissato un campo vettoriale libero $\bar{X}^{\ell}$ (risp. un campo covettoriale libero $\underline{X}^{\ell}$), questo determina un campo vettoriale applicato $\bar{X}$ (risp. un campo covettoriale applicato $\underline{X}$) e viceversa, mediante la regola

$$\bar{X} = (id_E, \bar{X}^{\ell})$$

(risp. $\underline{X} = (id_E, \underline{X}^{\ell})$) .

Indichiamo con

$$\mathcal{T} E \equiv \{\bar{X} : E \rightarrow TE\}$$

(risp. $\mathcal{T}^{*}E \equiv \{\underline{X} : E \rightarrow T^{*}E\}$)

l'insieme dei campi vettoriali (risp. covettoriali) applicati .

Si vede che $\mathcal{T}E$ (risp. $\mathcal{T}^{*}E$) munito delle operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari, date nel modo seguente

$$(\bar{X}+\bar{Y})(p) \equiv \bar{X}(p) + \bar{Y}(p) \qquad \forall\, p \in E$$
$$(\lambda\bar{X})(p) \equiv \lambda\bar{X}(p)$$

(risp. $(\underline{X}+\underline{Y})(p) \equiv \underline{X}(p) + \underline{Y}(p) \qquad \forall\, p \in E$
$(\lambda\underline{X})(p) \equiv \lambda\underline{X}(p)$)

è uno spazio vettoriale.

5 CAMPI TENSORIALI

0 Anche questo paragrafo può essere letto in un secondo momento in quanto è una generalizzazione del precedente.

Sia, dunque, E uno spazio affine. Sia $\bar{F} \equiv \otimes^r_s \bar{E}$.

I.5.1. DEFINIZIONE

Dicesi CAMPO TENSORIALE LIBERO un'applicazione

$$t^\ell : E \to \bar{F}$$

così indicata $\qquad t^\ell : p \mapsto t^\ell(p) \quad .$

Dicesi CAMPO TENSORIALE APPLICATO un'applicazione

$$t : E \to E \times \bar{F}$$

data da $\qquad t : p \mapsto (p, t^\ell(p))$

e soddisfacente a

$$\tau^r_{sE} \circ t = id_E \quad .$$

In modo del tutto analogo si definiscono i CAMPI TENSORIALI ESTERNI LIBERI ED APPPLICATI ponendo $\bar{F} \equiv \Lambda^r_s \bar{E}$.

Anche in questo caso le definizioni date sono equivalenti, mediante la regola

$$t = (id_E, t^\ell) \quad .$$

Indichiamo con

$$\mathcal{T}^r_s E \equiv \{(t : E \to T^r_s E) / \tau^r_{sE} \circ t = id_E\}$$

(risp. $\Omega^r_s E \equiv \{(t : E \to \Lambda^r_s \bar{E}) \;/\; \tau^r_{sE} \circ t = id_E\}$)

l'insieme dei campi tensoriali applicati (risp. campi tensoriali esterni applicati).

Scriviamo, anche

$$\mathfrak{F}E \equiv \mathcal{T}^o_o E \equiv \Omega^o_o E \equiv \{f : E \to \mathbb{R}\} \quad .$$

I.5.2. DEFINIZIONE

Relativamente agli insiemi di campi tensoriali liberi o applicati su E, si definiscono le operazioni di addizione, moltiplicazione per gli scalari, moltiplicazione per le funzioni, moltiplicazione tensoriale, contrazione, ecc..., mediante le analoghe operazioni relative a tensori di $\bar{E}$, eseguendole punto per punto di E.

In particolare, poniamo

a) $(f+g)(p) \equiv f(p) + g(p)$ $\quad \forall\, f,g \in \mathfrak{F}E,\ p \in E$

b) $(\lambda\cdot f)(p) \equiv \lambda\cdot f(p)$ $\quad \forall\, f \in \mathfrak{F}E,\ \lambda \in \mathbb{R},\ p \in E$

c) $(f\cdot g)(p) \equiv f(p) \cdot g(p)$ $\quad \forall\, f,g \in \mathfrak{F}E,\ p \in E$

d) $(t+t')(p) \equiv t(p) + t'(p)$ $\quad \forall\, t,t' \in \mathcal{T}^r_s E,\ p \in E$

e) $(\lambda\cdot t)(p) \equiv \lambda\cdot t(p)$ $\quad \forall\, t \in \mathcal{T}^r_s E,\ \lambda \in \mathbb{R},\ p \in E$

f) $(f\cdot t)(p) \equiv f(p)\cdot t(p)$ $\quad \forall\, t \in \mathcal{T}^r_s E,\ f \in \mathfrak{F}E,\ p \in E$

g) $(t \otimes t')(p) \equiv t(p) \otimes t'(p)$ $\quad \forall\, t \in \mathcal{T}^p_q E,\ t' \in \mathcal{T}^r_s E,\ p \in E$

h) $<\underline{t},\bar{t}'>(p) \equiv <\underline{t}(p),\bar{t}'(p)>$ $\quad \forall\, \underline{t} \in \mathcal{T}^o_1 E\ ,\ \bar{t}' \in \mathcal{T}^1_o E\ ,\ p \in E$.

In modo analogo al paragrafo precedente si vede che l'insieme $\mathcal{T}^r_s E$ (risp. $\Omega^r_s E$), con le operazioni di addizione e di moltiplicazione per gli scalari, costituisce uno spazio vettoriale.

E' utile esprimere i campi tensoriali liberi mediante l'uso di basi, costanti e non.

Allo stesso modo si esprimono i campi tensoriali applicati, in virtù dell'equivalenza tra gli uni e gli altri.

I.5.3. PROPOSIZIONE Sia dim E = n. Sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base di $\bar{E}$ e sia $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \ldots, \underline{\nu}^n\} \subset \bar{E}^*$ la base duale. Si identifichino gli elementi di queste basi con campi tensoriali costanti.

Allora

$$B\ ,\ B^*\ ,\ B \otimes B,\ B \otimes B^*\ ,\ B^* \otimes B^*$$

sono basi rispettivamente di

$$\mathcal{T}^1_o E \equiv \mathcal{T} E\ ,\ \mathcal{T}^o_1 E \equiv \mathcal{T}^* E\ ,\ \mathcal{T}^2_o E\ ,\ \mathcal{T}^1_1 E,\ \mathcal{T}^o_2 E\quad .$$

Più in generale

$$t^\ell : E \to \otimes^r_s \bar{E}$$

ha un'unica espressione

$$t^\ell = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \ldots i_r \leq n \\ 1 \leq j_1 \ldots j_s \leq n}} t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\ \bar{v}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \bar{v}_{i_r} \otimes \underline{\nu}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \underline{\nu}^{j_s}$$

dove $t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ è la funzione $t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} : E \to \mathbb{R}$

data da $\quad t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \equiv \langle \underline{\nu}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\nu}^{i_r} \otimes \bar{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{v}_{j_s} , t^{\ell} \rangle$

Un altro modo interessante per esprimere i campi tensoriali è quello di usare una base variabile da punto a punto.

Questo metodo si rivelerà utile allorché si introdurranno "sistemi di coordinate non cartesiani". Infatti, si vedrà che tali sistemi di coordinate generano, in modo naturale, delle basi variabili da punto a punto.

I.5.4. Facciamo infine un esempio importante di campo tensoriale.

DEFINIZIONE Sia E uno spazio affine di dimensione n.

Dicesi CAMPO TENSORIALE FONDAMENTALE di E il campo tensoriale costante $\hat{1}$ che associa ad ogni punto $p \in E$ il tensore fondamentale di $\bar{E}$ (vedi 0.5.6).

Sia $B \equiv \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ una base di campi vettoriali (costanti o no) di $\mathcal{T}E$ e sia $B^* \equiv \{\underline{\nu}^1, \dots, \underline{\nu}^n\}$ la base duale di B in $\mathcal{T}^*E$.

Allora, l'espressione di $\hat{1}$ è

$$\hat{1}(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta^i_j \, \bar{v}_i \otimes \underline{\nu}^j \equiv \bar{v}_1 \otimes \underline{\nu}^1 + \dots + \bar{v}_n \otimes \underline{\nu}^n .$$

Dunque, le componenti di $\hat{1}$ sono le funzioni costanti δ^i_j.

Si noti che tali componenti non dipendono dalla scelta della base, sia essa costituita da campi vettoriali costanti o no.

Naturalmente, questa è una proprietà del tutto eccezionale di questo campo tensoriale: il motivo consiste nella sua canonicità.

6 SOTTOSPAZI VERTICALE ED ORIZZONTALE DELLO SPAZIO TANGENTE E COTANGENTE DI UN FIBRATO BANALE.

0 Consideriamo uno spazio affine E ed uno spazio vettoriale $\bar{F}$.

Diamo la nozione di "fibrato banale" η, di"base" E e "fibra" $\bar{F}$.

Definiamo poi, i notevoli "sottospazi verticale ed orizzontale" dello spazio tangente e cotangente di η, osservando che i più importanti sono $\nu\, T(E \times \bar{F})$ e $\circ\, T^*(E \times \bar{F})$. Ulteriori osservazioni preferiamo farle nel contesto del discorso, in modo da fornire un quadro chiaro di queste nozioni.

Facciamo, infine, menzione delle applicazioni Γ e Π le quali svolgono un ruolo fondamentale: in particolare, la "connessione affine" Γ.

Tutte queste nozioni possono essere generalizzate alle varietà differenziabili.

1.6.1. Diamo, ora, l'importante nozione di "fibrato banale".

DEFINIZIONE

Dicesi FIBRATO BANALE di "base" E e "fibra" $\bar{F}$ una terna

$$\eta \equiv (E \times \bar{F}, \pi, E)$$

dove

- $E \times \bar{F}$ è detto lo "spazio totale" di η,
- E è detto la"base" di η
- π è l'applicazione, detta la "proiezione"

$$\pi : E \times \bar{F} \to E$$

data da $\pi : (p,\bar{u}) \mapsto p$.

Dicesi FIBRA nel punto $p \in E$ lo spazio vettoriale

$$\bar{F}_p \equiv \pi^{-1}(p) = \{(p,\bar{u}) \ / \ \bar{u} \in \bar{F}\}$$

che è naturalmente isomorfo ad $\bar{F}$.

Esempi notevoli di fibrati banali sono quello tangente τE, cotangente $\tau^* E$ e tensoriale $\tau^r_s E$.

Il fibrato η si dice "banale" perché lo spazio totale $E \times \bar{F}$ è il prodotto cartesiano della base E per la fibra $\bar{F}$.

Nel nostro caso abbiamo, dunque, anche la proiezione $E \times \bar{F} \to \bar{F}$, che però non consideriamo.

1.6.2. Passiamo ora ad introdurre l'importante "sottospazio verticale" di $T(E \times \bar{F})$ e quello "orizzontale" di $T(E \times \bar{F})$.

DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO VERTICALE di $T(E \times \bar{F})$ il sottospazio affine di $T(E \times \bar{F})$

$$\nu\, T(E \times \bar{F}) \equiv (E \times \bar{F}) \times (\bar{o} \times \bar{F}) \quad .$$

Dicesi SPAZIO ORIZZONTALE di $T(E \times \bar{F})$ il sottospazio affine di $T(E \times \bar{F})$

$$o\, T(E \times \bar{F}) \equiv (E \times \bar{F}) \times (\bar{E} \times \bar{o}) \quad .$$

Osserviamo che $o\, T(E \times \bar{F})$ è il supplementare di $\nu\, T(E \times \bar{F})$, ossia è

$$T(E \times \bar{F}) = \nu\, T(E \times \bar{F}) \oplus o\, T(E \times \bar{F}) \quad .$$

Osserviamo, inoltre, che lo spazio verticale è ottenuto da $T(E \times \bar{F})$

bloccando gli incrementi dei punti e considerando solo incrementi di vettori applicati.

Tale spazio continuerà ad esistere passando alle varietà differenziabili, in quanto ha senso confrontare incrementi del vettore nello stesso punto di applicazione.

Invece, lo spazio orizzontale $oT(E\times\bar{F})$, ottenuto considerando solo incrementi del punto e lasciando invariato il vettore applicato, affinché esista, abbisogna di una ulteriore struttura che "connetta" vettori applicati in punti distinti.

1.6.3. Si danno, allora, alcune importanti applicazioni valide, a priori, sugli spazi affini.

DEFINIZIONE

Dicesi CONNESSIONE AFFINE l'applicazione

$$\Gamma : T(E\times\bar{F}) \to \nu T(E\times\bar{F})$$

data da
$$\Gamma : (p,\bar{u};\ \bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\ \bar{o},\bar{w}) \quad .$$

Dicesi PROIEZIONE NATURALE l'applicazione

$$\Pi : \nu\, T(E\times\bar{F}) \to E\times\bar{F}$$

data da
$$\Pi : (p,\bar{u};\ \bar{o},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{w}) \quad .$$

Si noti che Π induce un isomorfismo

$$\nu\, T_{(p,\bar{u})}(E\times\bar{F}) \to \bar{F}_p \quad .$$

1.6.4. Introduciamo ora l'importante "sottospazio orizzontale" di

$T^*(Ex\bar{F})$ e quello "verticale" di $T^*(Ex\bar{F})$.

DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO ORIZZONTALE di $T^*(Ex\bar{F})$ il sottospazio affine di $T^*(Ex\bar{F})$

$$o\,T^*(Ex\bar{F}) \equiv (Ex\bar{F}) \times (\bar{E}^* x\ \underline{o}) \quad .$$

Dicesi SPAZIO VERTICALE di $T^*(Ex\bar{F})$ il sottospazio affine di $T^*(Ex\bar{F})$

$$\nu T^*(Ex\bar{F}) \equiv (Ex\bar{F}) \times (\underline{o} x \bar{F}^*) \quad .$$

Osserviamo che $\nu T^*(Ex\bar{F})$ è il supplementare di $oT^*(Ex\bar{F})$, ossia è

$$T^*(Ex\bar{F}) = oT^*(Ex\bar{F}) \oplus \nu T^*(Ex\bar{F}) \ .$$

Osserviamo,anche, che la scelta dei supplementari $oT(Ex\bar{F})$ e $\nu T^*(Ex\bar{F})$ equivale a considerare le rispettive proiezioni Γ che si annullano su di essi.

Inoltre, il sottospazio $oT^*(Ex\bar{F})$ è il duale di $\nu T(Ex\bar{F})$.

Pertanto, esso continuerà ad esistere sulle varietà differenziabili.

Non continua, invece, ad esistere il sottospazio verticale $\nu T^*(Ex\bar{F})$.

1.6.5. Di notevole importanza sono le seguenti applicazioni, valide anche sulle varietà differenziabili.

DEFINIZIONE

Dicesi CONNESSIONE AFFINE l'applicazione (indicata ancora con Γ)

$$\Gamma : T^*(Ex\bar{F}) \rightarrow oT^*(Ex\bar{F})$$

data da $$\Gamma : (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \mapsto (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) \quad .$$

Dicesi PROIEZIONE NATURALE l'applicazione (indicata ancora con Π)

$$\Pi : o\, T^*(E \times \bar{F}) \to T^*E$$

data da $$\Pi : (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) \mapsto (p,\underline{\nu}) \quad .$$

Si noti che Π induce un isomorfismo

$$o\, T^*_{(p,\bar{u})}(E \times \bar{F}) \to \bar{F}^*_p$$

Per quanto riguarda le generalizzazioni alle varietà differenziabili, valgono osservazioni analoghe alle precedenti.

7 SECONDI SPAZI TANGENTI E COTANGENTI

0 Questo paragrafo può essere letto dopo quello sulle derivate seconde.

Sia E uno spazio affine.

Possiamo applicare i risultati del precedente paragrafo al caso in cui è $\bar{F} \equiv \bar{E}$, oppure $\bar{F} \equiv \bar{E}^*$.

Abbiamo visto che gli spazi TE e T^*E sono spazi affini. Allora, è naturale definire i loro spazi tangenti e cotangenti, i quali hanno, a loro volta, una struttura di spazio affine.

1.7.1. PROPOSIZIONE

Lo spazio tangente di TE (risp. di T^*E)

$$TTE \equiv (E \times \bar{E}) \times (\bar{E} \times \bar{E})$$

$$(\text{risp.} \qquad TT^*E \equiv (E \times \bar{E}^*) \times (\bar{E} \times \bar{E}^*) \qquad)$$

è uno spazio affine, detto 2-SPAZIO TANGENTE di E .

Dunque, abbiamo il fibrato tangente di TE (risp. di T^*E)

$$\tau TE \equiv (TTE\ ,\ p_{TE}\ ,\ E\ )$$

$$(\text{risp.} \qquad \tau T^*E \equiv (TT^*E\ ,\ p_{T^*E},\ E) \qquad)$$

detto 2-FIBRATO TANGENTE di E.

1.7.2. PROPOSIZIONE

Lo spazio cotangente di TE (risp. di T^*E)

$$T^*TE \equiv (E \times \bar{E}) \times (\bar{E}^* \times \bar{E}^*)$$

(risp. $T^*T^*E \equiv (E\times\bar{E}^*) \times (\bar{E}^*\times\bar{E})$)

è uno spazio affine, detto 2-SPAZIO COTANGENTE di E .

Dunque, abbiamo il fibrato cotangente di TE (risp. di T^*E)

$$\tau^*TE \equiv (T^*TE\ ,\ q_{TE},\ E)$$

(risp. $\tau^*T^*E \equiv (T^*T^*E\ ,\ q_{T^*E},\ E)$)

detto 2-FIBRATO COTANGENTE di E .

In modo del tutto analogo al paragrafo precedente possiamo considera re i seguenti sottospazi notevoli

- $\nu TTE \equiv (E\times\bar{E}) \times (\bar{o}\times\bar{E})$ SPAZIO VERTICALE di TTE
- $oTTE \equiv (E\times\bar{E}) \times (\bar{E}\times\bar{o})$ " ORIZZONTALE di TTE
- $\nu TT^*E \equiv (E\times\bar{E}^*)\times(\bar{o}\times\bar{E}^*)$ " VERTICALE di TT^*E
- $oTT^*E \equiv (E\times\bar{E}^*)\times(\bar{E}\times\underline{o})$ " ORIZZONTALE di TT^*E
- $oT^*TE \equiv (E\times\bar{E}) \times (\bar{E}^*\times\underline{o})$ SPAZIO ORIZZONTALE di T^*TE
- $\nu T^*TE \equiv (E\times\bar{E})\times(\underline{o}\times\bar{E}^*)$ " VERTICALE di T^*TE
- $oT^*T^*E \equiv (E\times\bar{E}^*) \times (\bar{E}^*\times\bar{o})$ " ORIZZONTALE di T^*T^*E
- $\nu T^*T^*E \equiv (E\times\bar{E}^*) \times (\underline{o} \times \bar{E})$ " VERTICALE di T^*T^*E

e le seguenti applicazioni

- $\Gamma : TTE \to \nu\, TTE$ data da $\Gamma :(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w})\mapsto(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w})$
- $\Pi : \nu TTE \to TE$ " " $\Pi :(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w})\mapsto (p,\bar{w})$
- $\Gamma : TT^*E \to \nu TT^*E$ " " $\Gamma : (p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \mapsto (p,\underline{u};\bar{o},\underline{\omega})$

- $\Pi : \nu TT^*E \to T^*E$ data da $\Pi : (p,\underline{u};\bar{o},\underline{\omega}) \mapsto (p,\underline{\omega})$

- $\Gamma : T^*TE \to o\,T^*TE$ " " $\Gamma : (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \mapsto (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o})$

- $\Pi : oT^*TE \to T^*E$ " " $\Pi : (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) \mapsto (p,\underline{\nu})$

- $\Gamma : T^*T^*E \to oT^*T^*E$ " " $\Gamma : (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \mapsto (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{o})$

- $\Pi : oT^*T^*E \to T^*E$ " " $\Pi : (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{o}) \mapsto (p,\underline{\nu})$.

1.7.3. Possiamo definire, infine, delle applicazioni importanti tra spazi tangenti e cotangenti, le quali possono essere estese anche nel caso di varietà differenziabili.

Tali applicazioni giocano un ruolo interessante nella Meccanica Analitica.

DEFINIZIONE

Dicesi INVOLUZIONE CANONICA l'applicazione

$$s : TTE \to TTE$$

data da $$s : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{v};\bar{u},\bar{w}) .$$

Dicesi ENDOMORFISMO CANONICO l'applicazione

$$\nu : TTE \to \nu TTE$$

data da $$\nu : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{v}) .$$

Dicesi APPLICAZIONE SIMPLETTICA l'applicazione

$$\omega : TT^*E \to T^*T^*E$$

data da $$\omega : (p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \mapsto (p,\underline{u};\underline{\omega},-\bar{v}) .$$

Dicesi CAMPO VETTORIALE DI LIOUVILLE l'applicazione

$$\bar{V} : TE \quad \to \quad \nu\, TTE$$

data da $$\bar{V} : (p,\bar{u}) \mapsto \quad (p,\bar{u};\bar{o},\bar{u}) \; .$$

Dicesi CAMPO COVETTORIALE DI LIOUVILLE l'applicazione

$$\underline{\lambda} : T^{*}E \quad \to \quad oT^{*}T^{*}E$$

data da $$\underline{\lambda} : (p,\underline{u}) \mapsto \quad (p,\underline{u};\underline{u},\bar{o}) \; .$$

8 RILEVAMENTO DI FUNZIONI E CAMPI

0 Riteniamo opportuno consigliare il lettore di rivedere questo paragrafo prima di passare ai sistemi di coordinate su TE e T^*E.

Le nozioni contenute in questo numero risulteranno invarianti rispetto a "cambiamenti di coordinate". Inoltre possono essere estese al caso delle varietà differenziabili.

Consideriamo, una volta per tutte, uno spazio affine E, uno spazio vettoriale $\bar{F}$ ed un fibrato banale $\eta \equiv (E \times \bar{F}, \pi, E)$.

1.8.1. DEFINIZIONE Sia $f : E \to R$ una funzione.

Dicesi RILEVAMENTO di f secondo la proiezione π, l'applicazione

$$f^r : E \times \bar{F} \to R$$

data da
$$f^r : (p,\bar{u}) \mapsto f(p)$$

ossia, tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} E \times \bar{F} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f^r"] & \\ E \arrow[r, "f"'] & R \end{tikzcd} \quad .$$

Nel caso in cui è $\bar{F} \equiv \bar{E}$, detto $\tau E \equiv (TE, p_E, E)$ il fibrato tangente di E, poniamo

$$f^r \equiv \check{f} \equiv f \circ p_E \quad .$$

Nel caso in cui è $\bar{F} \equiv \bar{E}^*$, detto $\tau^* E \equiv (T^*E, q_E, E)$ il fibrato cotangente di E, poniamo

$$f^r \equiv \hat{f} \equiv f \circ q_E \quad .$$

1.8.2. Passiamo, ora, a definire il rilevamento dei campi.

DEFINIZIONE Sia $t : E \to E \times \bar{F}$ un campo.

Dicesi RILEVAMENTO di t secondo π l'applicazione

$$t^r : E \times \bar{F} \to \nu\, T(E \times \bar{F})$$

data da
$$t^r : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\, \bar{o}, t^\ell(p))$$

ossia, tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{array}{ccc} E \times \bar{F} & \xrightarrow{t^r} & \nu\, T(E \times \bar{F}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ E & \xrightarrow{t} & E \times \bar{F} \end{array} \quad \underline{\cdot}$$

In particolare, per $\bar{F} \equiv \bar{E}$, il rilevamento di $t : E \to TE$ secondo p_E è l'applicazione

$$t^r \equiv \check{t} : TE \to \nu TTE$$

data da
$$\check{t} : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},t^\ell(p) \quad)$$

ossia, tale che risulti

$$\Pi \circ \check{t} = t \circ p_E \quad ,$$

dove $\Pi : \nu\, TTE \to TE$ è la proiezione naturale.

Invece, per $\bar{F} \equiv \bar{E}^*$, il rilevamento di $t : E \to T^*E$ secondo

q_E (indicato ancora con $\check{t}$) è l'applicazione

$$t^r \equiv \check{t} : T^*E \rightarrow \nu\, TT^*E$$

data da $$\check{t} : (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\, \bar{o}, t^\ell(p))$$

ossia, tale che risulti

$$\Pi \circ \check{t} = t \circ q_E \quad ,$$

dove $\Pi : \nu\, TT^*E \rightarrow T^*E$ è la proiezione naturale.

1.8.3. Nel caso in cui si abbia un campo covettoriale applicato è possibile definire un altro rilevamento, come mostra la seguente definizione.

DEFINIZIONE Sia $t : E \rightarrow T^*E$ un campo covettoriale applicato .

Dicesi RILEVAMENTO di t secondo π l'applicazione

$$t_r : E \times \bar{F} \rightarrow \circ\, T^*(E \times \bar{F})$$

data da $$t_r : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u}, t^\ell(p), \underline{o}) \quad ,$$

ossia, tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{array}{ccc} E \times \bar{F} & \xrightarrow{t_r} & \circ\, T^*(E \times \bar{F}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ E & \xrightarrow[t]{} & T^* E \end{array} \quad \dot{-}$$

In particolare, se $\bar{F} \equiv \bar{E}$, il rilevamento di t secondo p_E è l'applicazione

$$t_r \equiv \hat{t}: TE \rightarrow \circ\, T^*TE$$

data da $\hat{t}: (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\ t^{\ell}(p),\underline{o})$,

ossia, tale che risulti

$$\Pi \circ \hat{t} = t \circ p_E \quad ,$$

dove $\Pi : \circ\, T^*TE \rightarrow T^*E$ è la proiezione naturale .

Invece, per $\bar{F} \equiv \bar{E}^*$, il rilevamento di t secondo q_E (indicata ancora con $\hat{t}$) è l'applicazione

$$t_r \equiv \hat{t}: T^*E \rightarrow \circ\, T^*T^*E$$

data da $\hat{t}: (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\ t^{\ell}(p),\bar{o})$,

ossia, tale che risulti

$$\Pi \circ \hat{t} = t \circ q_E \quad ,$$

dove $\Pi : \circ\, T^*T^*E \rightarrow T^*E$ è la proiezione naturale.

0 INTRODUZIONE

Una nozione basilare della Geometria differenziale degli spazi affini è quella di "differenziabilità" e di "derivata".

Dati due spazi affini E ed F, un'applicazione

$$f : E \to F$$

è differenziabile se opera linearmente sui vettori applicati, "almeno in prima approssimazione". L'applicazione che effettua tale approssimazione è detta la "derivata" di f e si indica con Df.

In questo capitolo, dopo aver dato tale nozione, consideriamo i casi più interessanti ritrovando, in particolare, la derivata classica definita in $\mathbb{R}^n$.

Allora, un sistema di coordinate cartesiano genera, in modo naturale, delle basi per i campi vettoriali e covettoriali costanti punto per punto.

Usando i sistemi di coordinate non cartesiani la nozione di derivata si rivela insufficiente. Pertanto, si rende necessario l'introduzione della "applicazione tangente" che tenga conto del punto di applicazione della derivata.

Notiamo che l'applicazione derivata non si estende alle varietà differenziabili, mentre continua a valere quella di applicazione tangente.

Le regole di derivazione consistono in pochi teoremi che forniscono le principali regole di calcolo delle derivate.

Per semplicità, consideriamo solo applicazioni del tipo $f : E \to F$, ma i risultati ottenuti si estendono immediatamente anche nel caso in

cui le applicazioni siano definite solo su un aperto degli spazi affi
ni considerati.

Si ricorda che ci interessiamo solo a spazi affini di dimensione finita.

1 APPLICAZIONI DIFFERENZIABILI

0 Siano E ed F due spazi affini. Sia $f : E \to F$ un'applicazione.

Cominciamo ad introdurre l'importante nozione di "differenziabilità" di f in un punto $p \in E$ e, più in generale, di "applicazione differenziabile".

Sostanzialmente, f è differenziabile se opera linearmente sui vettori applicati, "almeno in prima approssimazione". L'applicazione che effettua tale approssimazione è detta "derivata" di f ed è indicata con Df.

Osserviamo che Df non si estende alle varietà differenziabili. dove non esistono i vettori liberi.

Allora, è naturale introdurre la "applicazione tangente", Tf, di f legata a Df mediante la regola

$$Tf = (f, Df) \quad .$$

Tf invece, ha validità sulle varietà differenziabili.

Inoltre, essa è importante poiché permetterà di definire dei sistemi di coordinate sui vari spazi tangenti di E, mediante un sistema di coordinate "differenziabile" definito su E.

2.1.1. DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione. Sia $p \in E$.

Si dice che f è DIFFERENZIABILE in p se esiste un'applicazione lineare

$$Df(p) \in L(\bar{E}, \bar{F}) \approx \bar{E}^* \otimes \bar{F}$$

tale che

$$\lim_{\bar{h} \to 0} \frac{f(p+\bar{h}) - f(p) - Df(p)(\bar{h})}{||\bar{h}||} = 0 \quad ,$$

o, equivalentemente, tale che l'espressione di f sia

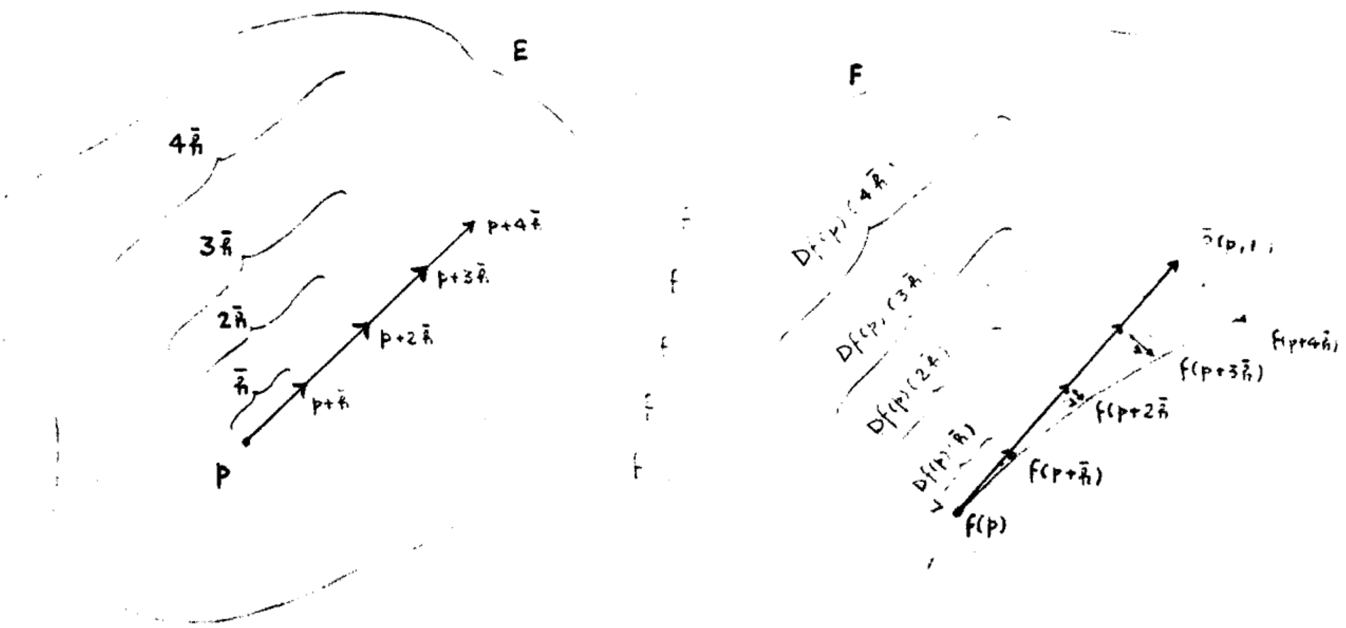
$$f(p+\bar{h}) = f(p) + Df(p)(\bar{h}) + \bar{o}(p,\bar{h}) \qquad , \qquad \forall\, \bar{h} \in \bar{E} \ ,$$

dove $\bar{o}(p,\bar{h})$ è un infinitesimo di ordine superiore ad $\bar{h}$, cioè tale che

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{o}} \frac{\bar{o}(p,\, \bar{h})}{||\bar{h}||} = o \quad .$$

Praticamente, la dipendenza di f, a partire da p, è "quasi lineare" rispetto ad $\bar{h}$, ossia l'errore che si commette rispetto alla linearità è un errore infinitesimo di ordine superiore rispetto ad $\bar{h}$ (quindi è trascurabile per $\bar{h} \to \bar{o}$) .

Graficamente, possiamo basare le nostre intuizioni nel modo seguente.



Si osservi che abbiamo usato una qualsiasi norma, in virtù del teorema che dice che tutte le norme sono "equivalenti". Si veda [4] (teorema 1.3. pag. 5) .

2.1.2. Facciamo, vedere, ora, che l'applicazione lineare $Df(p)$, se esiste, è unica.

PROPOSIZIONE Sia $p \in E$.

L'applicazione lineare $Df(p)$ è unica.

D. Siano $\alpha, \beta : \bar{E} \to \bar{F}$ due applicazioni lineari tali che

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{f(p+\bar{h}) - f(p) - \alpha(\bar{h})}{||\bar{h}||} = o = \lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{f(p+\bar{h}) - f(p) - \beta(\bar{h})}{||\bar{h}||} .$$

Sia dato $\bar{o} \neq \bar{k} \in \bar{E}$ e sia $o \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Allora, per la linearità di α e β, si ha:

$$o = \lim_{\lambda\to o} \frac{\alpha(\lambda\bar{k}) - \beta(\lambda\bar{k})}{||\lambda\bar{k}||} = \lim_{\lambda\to o} \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{\alpha(\bar{k}) - \beta(\bar{k})}{||\bar{k}||} = \frac{\lambda}{|\lambda|} \lim_{\lambda\to o} \frac{\alpha(\bar{k}) - \beta(\bar{k})}{||\bar{k}||}$$

da cui $\alpha(\bar{k}) - \beta(\bar{k}) = o$ (non variando $\bar{k}$ con λ) .

Inoltre, è $\alpha(\bar{o}) = \bar{o} = \beta(\bar{o})$, sicché risulta

$$\alpha(\bar{h}) = \beta(\bar{h}) \quad , \quad \forall\, \bar{h} \in \bar{E} \quad \underline{.}$$

L'applicazione lineare $Df(p)$ (che è unica) è detta la DERIVATA di f in p.

2.1.3. DEFINIZIONE

Si dice che f è DIFFERENZIABILE se è differenziabile in ogni punto di E.

Allora, dicesi DERIVATA di f l'applicazione

$$Df : E \to \bar{E}^* \otimes \bar{F}$$

data da

$$Df : p \mapsto Df(p) \quad \underline{.}$$

2.1.4. Introduciamo adesso l'importante nozione di "applicazione tangente" di f.

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile.

Dicesi APPLICAZIONE TANGENTE di f l'applicazione

$$Tf : TE \to TF$$

data da $$Tf : (p,\bar{u}) \mapsto (f(p), Df(p)(\bar{u})) \quad \underline{\cdot}$$

Dunque, dare l'applicazione tangente di f equivale a dare, in ogni punto p di E, la derivata $Df(p)$.

Si osservi che Df non si estende alle varietà differenziabili, mentre continua a valere l'applicazione tangente Tf.

2 CASI PARTICOLARI DI DERIVATA

0 Sia E uno spazio affine di dimensione finita.

In questo paragrafo, studiamo i casi più importanti di differenziabilità.

Per esempio, nel caso $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ritroviamo la derivata di f dell'analisi classica.

Interessanti sono, anche, i casi $f : \mathbb{R} \to E$ ed $f : E \to \mathbb{R}$ che sono l'uno il duale dell'altro.

2.2.1. CASO $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sia f una funzione differenziabile. Allora, tramite l'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$, si identifica la derivata di f in $x \in \mathbb{R}$ con l'unico numero

$$Df(x)(1) \in \mathbb{R}$$

e si scrive

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + o(x,h) \qquad \forall\, h \in \mathbb{R} \quad .$$

Infatti, ricordando che $Df(x)$ è un'applicazione lineare, abbiamo che

$$Df(x)(h) \equiv Df(x)(1 \cdot h) = h \cdot Df(x)(1)$$

e quindi possiamo riguardare $Df(x)(h)$ come prodotto di numeri reali.

Pertanto

$$Df : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è una funzione.

Inoltre, ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x \in \mathbb{R}$ se e solo se esiste il limite seguente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ed in tal caso $Df(x)$ è il limite precedente.

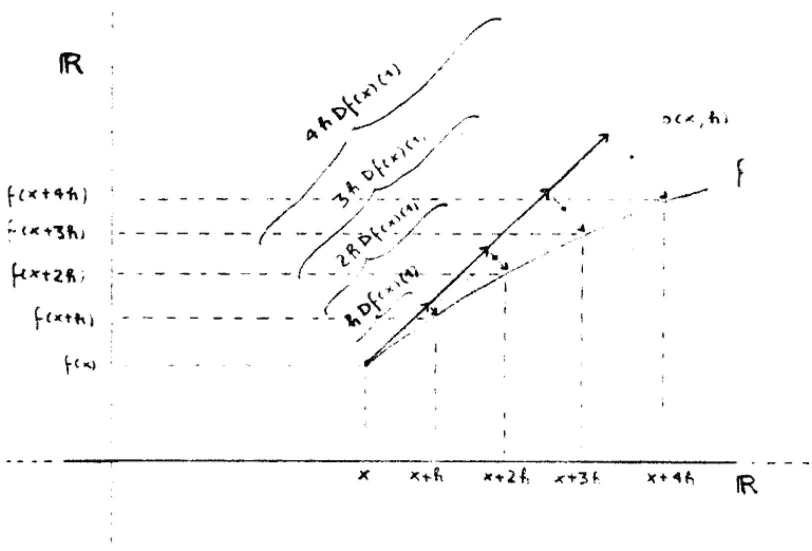
Ha senso considerare tale limite, in quanto h è un numero e quindi ha senso dividere per h. Ciò non vale quando lo spazio di partenza ha dimensione maggiore di 1.

L'applicazione tangente è

$$Tf : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

data da $$Tf : (x,h) \mapsto (f(x), Df(x) \cdot h) \quad .$$

In questo caso possiamo fare riferimento al seguente grafico.



2.2.2. CASO $f : \mathbb{R} \to E$.

Sia f una curva differenziabile. Allora, grazie all'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R},\bar{E}) \approx \bar{E}$, si identifica la derivata di f in $x \in R$ con un vettore

$$Df(x)(1) \in \bar{E}$$

e si scrive

$$(*) \quad f(x+h) = f(x) + Df(x)\, h + o(x,h) \quad , \quad \forall\, h \in \mathbb{R} \quad .$$

Pertanto, è

$$Df : \mathbb{R} \to \bar{E} \quad .$$

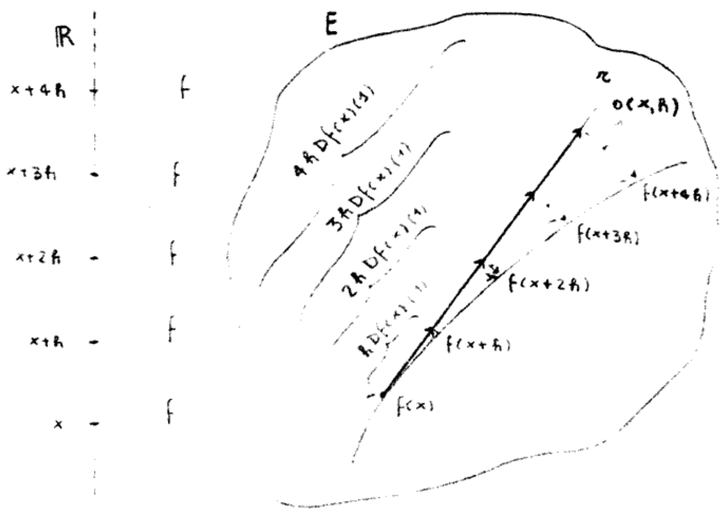
Facciamo ora alcune osservazioni sulla curva (*) .

Se in (*), l'infinitesimo $o(x,h)$ fosse rigorosamente nullo, allora la curva

$$f(x+h) = f(x) + hDf(x)$$

sarebbe una retta parametrizzata mediante h.

Infatti, per $h = o$, è $f(x) = f(x)$, invece per $h \neq o$, $f(x+h)$ varierebbe linearmente rispetto ad h.



Le freccette rappresentano l'errore fra la linearità, rispetto ad h, della curva approssimata (rappresentata dalla retta r) e il vero valore della curva.

Si vede che f è differenziabile quando tale errore è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h, cioé $o(x,h)$ tende più rapidamente a zero di h stesso.

Ogni curva $f : \mathbb{R} \to E$ è differenziabile in x se e solo se esiste il limite seguente

$$\lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ed in tal caso è

$$Df(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

Il vettore $Df(x)$ è detto "vettore tangente" alla curva in x.

Se è

$$Df(x) \neq \bar{o} \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

allora, la curva dicesi "regolare". In tal caso dicesi "retta tangente" ad f in x la retta (ossia il sottospazio affine, di dimensione 1) di E, determinata dal punto $f(x) \in E$ e dal vettore $Df(x) \in \bar{E}$.

Abbiamo, inoltre, l'applicazione tangente

$$Tf : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to TE$$

data da $$Tf : (x,h) \mapsto (f(x), hDf(x)) \quad .$$

Dunque, possiamo definire anche l'applicazione

$$df : \mathbb{R} \to TE$$

data da $$df(x) \equiv Tf(x,1) \quad ,$$

detta "derivata applicata" di f, o anche "differenziale " di f.

2.2.3. CASO $f : E \to \mathbb{R}$.

Sia f una funzione differenziabile. Allora è

$$Df(p) \in L(\bar{E}, \mathbb{R}) \equiv \bar{E}^* \quad , \forall\, p \in E \quad ,$$

e si scrive anche

$$(**) \qquad f(p+\bar{h}) = f(p) + \langle Df(p), \bar{h}\rangle + \bar{o}(p,\bar{h}) \quad , \quad \forall\, \bar{h} \in \bar{E} .$$

Se in $(**)$, fosse $\bar{o}(p,\bar{h}) = \bar{o}$, allora

$$(***) \qquad f(p+\bar{h}) = f(p) + \langle Df(p) , \bar{h}\rangle$$

avrebbe un andamento interessante.

Distinguiamo, allora, due casi.

1) $Df(p) = \underline{o}$.

In tal caso è

$$f(p+\bar{h}) = f(p) \Longrightarrow f = \text{cost.}$$

2) $Df(p) \neq \underline{o}$.

In tal caso, per cercare le superfici su cui la funzione, data da $(***)$, assuma uno stesso valore, dobbiamo determinare i punti $q \in E$ tali che $f(q) = f(p)$.

Ossia, occorre determinare tutti i vettori $\bar{h}$ per cui è

$f(p+\bar{h}) = f(p)$.

Allora, essi sono tutti e soli i vettori $\bar{h}$ per cui è

$$\langle Df(p) , \bar{h}\rangle = o$$

Questi vettori individuano lo spazio vettoriale (di dimensione dim E - 1) ortogonale alla forma $Df(p)$. Dunque, la superficie, costituita dai punti $q \in E$ tali che f è costantemente uguale a $f(p)$, è il piano ortogonale a $Df(p)$ e passante per p.

Nel caso generale, in cui $\bar{o}(p,\bar{h}) \neq \bar{o}$, se $Df(p) \neq \underline{o}$, si può dimostrare (parte II 1.1.) che le superfici per cui f è costante, sono delle superfici "liscie" approssimate al 1° ordine dei piani citati.

Vedremo, in seguito, che alla forma $Df(p)$ si può associare, tramite la metrica, un vettore di $\bar{E}$, duale di $Df(p)$, detto "gradiente" di f in p, indicata con il simbolo grad $f(p)$, dato da

$$\langle Df(p),\bar{u}\rangle \equiv \operatorname{grad} f(p) \cdot \bar{u} \quad , \quad \forall\, \bar{u} \in \bar{E} \;.$$

Abbiamo l'applicazione derivata

$$Df : E \rightarrow \bar{E}^*$$

data da

$$Df : p \rightarrow Df(p) \; .$$

Abbiamo, anche, l'applicazione

$$df : E \to T^{*}E$$

data da $$df : p \mapsto (p, Df(p)) \quad ,$$

detta "differenziale" di f.

Inoltre, possiamo definire l'applicazione tangente

$$Tf : TE \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

data da $$Tf : (p,\bar{u}) \mapsto (f(p), \langle Df(p),\bar{u}\rangle) \, ,$$

e quindi l'applicazione

$$\dot{f} \equiv \pi^{2} \circ Tf : TE \to \mathbb{R}$$

data da $$\dot{f}(p,\bar{u}) \equiv \langle Df(p),\bar{u}\rangle \quad , \forall (p,\bar{u}) \in TE.$$

2.2.4. CASO $t^{\ell} : E \to \otimes^{r}_{s} \bar{E}$.

Sia t^{ℓ} un campo tensoriale libero differenziabile. Allora, si identifica la derivata di t^{ℓ} in $p \in E$ con un tensore

$$Dt^{\ell}(p) \in \bar{E}^{*} \otimes \otimes^{r}_{s}\bar{E} \equiv \otimes^{r}_{s+1}\bar{E}$$

grazie all'isomorfismo canonico

$$L(\bar{E}, \otimes^{r}_{s}\bar{E}) \approx \bar{E}^{*} \otimes \otimes^{r}_{s}\bar{E} \quad .$$

3 REGOLE DI DERIVAZIONE

0 Continuando il discorso sulla differenziabilità, in questo paragrafo, diamo alcuni strumenti atti ad operare con applicazioni differenziabili.

Particolarmente importante è la "regola della catena" che risolve il problema della differenziabilità di applicazioni composte.

Studiamo, poi, alcuni casi importanti.

Successivamente, soffermiamo le nostre attenzioni sulla derivata delle applicazioni identità, costanti, lineari, di cui faremo uso, largamente, in seguito.

Concludiamo che la derivata dell'applicazione somma è
con l'importante "regola di Leibnitz".

Ovviamente, tutto ciò può essere espresso anche tramite le applicazioni tangenti.

Siano, dunque, E, F, G spazi affini.

2.3.1. TEOREMA (REGOLA DELLA CATENA)

Siano $f : E \to F$ e $g : F \to G$

due applicazioni differenziabili rispettivamente in $p \in E$ e in $f(p) \in F$.

Allora, l'applicazione

$$g \circ f : E \to G$$

è differenziabile in p.

Inoltre, è

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p).$$

D. Infatti, per la differenziabilità di f e g e per la linearità di $Dg(f(p))$, è

$$\begin{aligned}(g \circ f)(p+\bar{h}) &= g(f(p+\bar{h})) = g[\, f(p) + Df(p)(\bar{h}) + \bar{o}'(p+\bar{h})\,] = \\ &= g(f(p)) + Dg(f(p))[\, Df(p)(\bar{h}) + \bar{o}'(p,\bar{h})\,] + \\ &+ \bar{o}''(f(p)\,,\, Df(p)(\bar{h}) + \bar{o}'(p,\bar{h})) = \\ &= g(f(p)) + [\, Dg(f(p)) \circ Df(p)\,](\bar{h}) + \bar{o}(p,\bar{h})\end{aligned}$$

dove si è posto

$$\bar{o}(p,\bar{h}) = Dg(f(p))(\bar{o}'(p,\bar{h})) + \bar{o}''(f(p), Df(p)(\bar{h}) + \bar{o}'(p,\bar{h})) \,,$$

e dove

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}'(p,\bar{h})}{||\bar{h}||} = o = \lim_{\bar{k}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}''(f(p)\,,\,\bar{k})}{||\bar{k}||}$$

da cui

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}(p,\bar{h})}{||\bar{h}||} = \lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{Dg(f(p))(\bar{o}'(p,\bar{h}))}{||\bar{h}||} + \lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}''(f(p),\bar{k}(\bar{h}))}{||\,\bar{k}(\bar{h})||} = o + o = o \quad \dot{-}$$

avendo posto $\bar{k} \equiv \bar{k}(\bar{h}) \equiv Df(p)(\bar{h}) + o'(p,\bar{h})$ $\dot{-}$

Se f e g sono differenziabili, il teorema vale in ogni punto di E .

2.3.2. Per funzioni differenziabili, la regola della catena, in termini di applicazioni tangenti, assume una espressione semplice.

TEOREMA Siano $f : E \to F$ e $g : F \to G$ due applicazioni differenziabili.

Allora, l'applicazione

$$g \circ f : E \to G$$

è differenziabile e risulta

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf \quad .$$

D. Per la regola della catena, $g \circ f$ è differenziabile. Inoltre, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$\begin{aligned} T(g \circ f)(p,\bar{u}) &= ((g \circ f)(p) \ , D(g \circ f)(p)(\bar{u}))= \\ &= (g(f(p)) \ , (Dg(f(p))\circ Df(p))(\bar{u})) = \\ &= Tg(f(p), Df(p)(\bar{u})) = (Tg \circ Tf)(p,\bar{u}) \end{aligned}$$

2.3.3. Studiamo ora alcuni casi particolari di applicazioni differenziabili.

1) CASO $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$.

Siano f e g due funzioni differenziabili. Allora, $\forall x \in \mathbb{R}$, è

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) \ .$$

D'altronde, per l'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$, si identificano

$$D(g \circ f)(x) \quad , Dg(f(x)) \quad , \quad Df(x)$$

con numeri reali e la composizione

$$Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

con il prodotto dei due rispettivi numeri reali.

Allora scriviamo

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$$

ritrovando, così, la nozione dell'analisi classica.

2) CASO $\mathbb{R} \xrightarrow{c} E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Siano c ed f due applicazioni differenziabili. Allora, $\forall \ x \in \mathbb{R}$, è

$$D(f \circ c)(x) = < Df(c(x)) \ , \ Dc(x)> .$$

Infatti, per l'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R},\bar{E}) \approx \bar{E}$, è

$$(\underline{\alpha} \circ \beta)(h) = \underline{\alpha}(\beta(h)) = \underline{\alpha}(h \cdot \bar{\beta}) = h \ \underline{\alpha} \ (\bar{\beta}) \equiv h < \underline{\alpha}, \bar{\beta}> \ , \forall \ h \in \mathbb{R},$$

dove abbiamo posto

$$\underline{\alpha} \equiv Df(c(x))$$
$$\beta \equiv Dc(x) \qquad .$$

Questo secondo esempio è importante perché permetterà di esprimere le derivate mediante i sistemi di coordinate.

Le seguenti proposizioni mostrano che le applicazioni identità, costanti e lineari sono differenziabili.

2.3.4. PROPOSIZIONE

L'applicazione identità

$$id_E : E \to E$$

data da
$$id_E : p \mapsto p$$

è differenziabile ed è

$$Did_E(p) = id_{\bar{E}} \quad , \forall\ p \in E$$
$$T\ id_E = id_{TE} \quad .$$

D. Infatti, è

$$id_E(p + \bar{h}) \equiv p + \bar{h} \equiv id_E(p) + id_{\bar{E}}(\bar{h}) \quad .$$

Dunque, id_E è differenziabile ed è

$$Did_E(p) = id_{\bar{E}} \quad , \forall\ p \in E$$

Inoltre, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$T\ id_E(p,\bar{u}) \equiv (id_E(p), Did_E(p)(\bar{u})) = (p, id_{\bar{E}}(\bar{u})) = (p,\bar{u}) \equiv id_{TE}(p,\bar{u}) \quad \dot{-}$$

2.3.5. COROLLARIO Sia $f : E \to F$ un'applicazione biiettiva differenziabile con l'inversa f^{-1} .

Allora, è

$$Df^{-1}(q) = [\, Df(f^{-1}(q)\,]^{-1} \quad .$$

Inoltre, è

$$T(f^{-1}) = (Tf)^{-1} \quad .$$

D. E'

$$f^{-1} \circ f \equiv id_E \quad , \qquad f \circ f^{-1} \equiv id_F \; .$$

Pertanto, è

$$Df^{-1}(f(p)) \circ Df(p) = id_{\bar{E}} \quad ,$$

ossia

$$Df^{-1}(q) \circ Df(f^{-1}(q)) = id_{\bar{E}} \; ;$$

$$Df(f^{-1}(q)) \circ Df^{-1}(q) = id_{\bar{F}} \quad .$$

Inoltre, è

$$T(f^{-1}) \circ Tf = id_{TE}$$

$$Tf \circ T(f^{-1}) = id_{TF} \quad .$$

Dunque, i risultati seguono immediatamente dalla definizione generale di applicazione inversa (si veda [11]) $\underline{.}$

2.3.6. PROPOSIZIONE Sia $q \in F$. Sia $f : E \to F$ un'applicazione costante, ossia tale che

$$f(p) = q \qquad\qquad \forall\, p \in E$$

Allora, f è differenziabile ed è

$$Df(p) = o \in \bar{E}^* \otimes \bar{F} \quad .$$

D. E'

$$f(p+\bar{h}) = q = f(p) \quad .$$

Pertanto, è

$$Df(p) = o \quad , \quad \bar{o}(p,\bar{h}) = o \quad \underline{.}$$

2.3.7. PROPOSIZIONE Siano E ed F due spazi vettoriali (e quindi due spazi affini) .

Sia $f : E \to F$ un'applicazione lineare.

Allora, f è differenziabile ed è

$$Df(p) = f \quad , \quad \forall\, p \in E \, .$$

D. E'

$$f(p+\bar{h}) = f(p) + f(\bar{h}) \quad .$$

Pertanto, è

$$Df(p) = f \quad , \quad \bar{o}(p,\bar{h}) = o \qquad \underline{.}$$

2.3.8. Studiamo, ora, la differenziabilità dell'applicazione "somma".

PROPOSIZIONE Sia $\bar{F}$ uno spazio vettoriale. Siano $h : E \to \bar{F}$ e $k : E \to \bar{F}$ due applicazioni differenziabili.

Allora, l'applicazione

$$h + k : E \to \bar{F}$$

data da $\quad h + k : p \mapsto h(p) + k(p)$

è differenziabile ed è

$$D(h+k)(p) = Dh(p) + Dk(p) \quad .$$

D. E'

$$\begin{aligned}[h+k](p+\bar{u}) &= h(p+\bar{u}) + k(p+\bar{u}) = \\ &= [h(p)+Dh(p)(\bar{u})+\bar{o}'(p,\bar{u})]+[k(p)+Dk(p)(\bar{u})+\bar{o}''(p,\bar{u})] = \\ &= [h(p)+k(p)]+[Dh(p)(\bar{u})+Dk(p)(\bar{u})]+[\bar{o}'(p,\bar{u})+\bar{o}''(p,\bar{u})] = \\ &= [h+k](p)+[Dh(p)+Dk(p)](\bar{u})+[\bar{o}'(p,\bar{u})+\bar{o}''(p,\bar{u})]\end{aligned}$$

dove è

$$\lim_{\bar{u}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}'(p,\bar{u})+\bar{o}''(p,\bar{u})}{||\bar{u}||} = \lim_{\bar{u}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}'(p,\bar{u})}{||\bar{u}||} + \lim_{\bar{u}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}''(p,\bar{u})}{||\bar{u}||} = o \quad .$$

Pertanto, è

$$D(h+k)(p) = Dh(p) + Dk(p) \qquad \underline{\cdot}$$

2.3.9. Concludiamo questo paragrafo con l'importante"regola di Leibnitz".

PROPOSIZIONE (REGOLA DI LEIBNITZ)

Siano $\bar{F}, \bar{F}_1, \bar{F}_2$ spazi vettoriali. Siano $h : E \to \bar{F}_1$ e $k : E \to \bar{F}_2$ due applicazioni differenziabili. Sia $\theta : \bar{F}_1 x \bar{F}_2 \to \bar{F}$

un'applicazione bilineare.

Allora, l'applicazione

$$h \odot k : E \to \bar{F}$$

data da $\qquad h \odot k : p \mapsto h(p) \odot k(p)$

è differenziabile ed è

$$D(h \odot k)(p)(\bar{u}) = Dh(p)(\bar{u}) \odot k(p) + h(p) \odot Dk(p)(\bar{u}) \quad .$$

D. E'

$$[h \odot k](p+\bar{u}) \equiv h(p+\bar{u}) \odot k(p+\bar{u}) =$$

$$= [\, h(p) + Dh(p)(\bar{u}) + \bar{o}'(p,\bar{u}) \,] \odot [\, k(p) + Dk(p)(\bar{u}) + \bar{o}''(p,\bar{u}) \,] =$$

$$= [\, h \odot k \,](p) + [\, Dh(p)(\bar{u}) \odot k(p) + h(p) \odot Dk(p)(\bar{u}) \,] + \bar{o}(p,\bar{u})$$

avendo posto

$$\bar{o}(p,\bar{u}) \equiv [\, h(p) \odot \bar{o}''(p,\bar{u}) \,] + [\, \bar{o}'(p,\bar{u}) \odot k(p) \,] + [\, Dh(p)(\bar{u}) + \bar{o}'(p,\bar{u}) \,] \odot$$

$$\odot [Dk(p)(\bar{u}) + \bar{o}''(p,\bar{u}) \,]$$

e dove è

$$\lim_{\bar{u} \to \bar{o}} \frac{\bar{o}(p,\bar{u})}{||\bar{u}||} = o \quad .$$

Pertanto, è

$$D(h \odot k)(p)(\bar{u}) = Dh(p)(\bar{u}) \odot k(p) + h(p) \odot Dk(p)(\bar{u}) \quad \underline{\cdot}$$

2.3.10. Diamo, quindi, la regola di Leibnitz per alcuni casi particolari.

1) Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sono due funzioni differenziabili, allora la funzione $h \cdot k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile ed è

$$D(h \cdot k)(x) = Dh(x) \cdot k(x) + Dk(x) \cdot h(x) \quad .$$

Si ritrova, così la regola di Leibnitz dell'analisi classica.

2) Se $t_1 : E \to \otimes^{r_1}_{s_1} \bar{E}$ e $t_2 : E \to \otimes^{r_2}_{s_2} \bar{E}$ sono due campi differenziabili, allora il campo

$$t_1 \otimes t_2 : E \to \otimes^{r_1+r_2}_{s_1+s_2} \bar{E}$$

è differenziabile ed è

$$D(t_1 \otimes t_2)(p)(\bar{u}) = Dt_1(p)(\bar{u}) \otimes t_2(p) + t_1(p) \otimes Dt_2(p)(\bar{u})$$

3) Sia $\circ : L(\bar{H},\bar{K}) \times L(\bar{K},\bar{M}) \to L(\bar{H},\bar{M})$ la composizione .

Se $h : E \to L(\bar{H},\bar{K})$ e $k : E \to L(\bar{K},\bar{M})$ sono differenziabili, allora l'applicazione

$$h \circ k : E \to L(\bar{H},\bar{M})$$

è differenziabile ed è

$$D(h \circ k)(p)(\bar{u}) = Dh(p)(\bar{u}) \circ k(p) + h(p) \circ Dk(p)(\bar{u}) \quad \dot{-}$$

Queste proposizioni forniscono le regole principali di calcolo delle derivate.

4 DERIVATE E PRODOTTO CARTESIANO

0 Siano E, F, E_1, E_2, F_1, F_2 spazi affini.

Abbiamo iniziato questo capitolo, studiando la differenziabilità di applicazioni del tipo $E \to F$.

Ora ci proponiamo di estendere tale studio ad applicazioni del tipo

$$E_1 \times E_2 \to F \quad , \quad E \to F_1 \times F_2 \quad .$$

Tale studio sarà utilizzato, in particolare, nel calcolo delle derivate tramite i sistemi di coordinate.

2.4.1. LEMMA Sia $p \in E_1$, $q \in E_2$.

Le iniezioni

$$j_{1q} : E_1 \to E_1 \times E_2 \quad , \qquad j_{2p} : E_2 \to E_1 \times E_2$$

date da $\quad j_{1q} : p \mapsto (p,q) \quad , \qquad j_{2p} : q \mapsto (p,q)$

sono differenziabili ed è

$$Dj_{1q}(p)(\bar{h}) = (\bar{h},\bar{o}) \quad , \qquad Dj_{2p}(q)(\bar{k}) = (\bar{o},\bar{k}) \quad .$$

Le proiezioni

$$\overset{1}{\pi} : E_1 \times E_2 \to E_1 \quad , \qquad \overset{2}{\pi} : E_1 \times E_2 \to E_2$$

date da $\quad \overset{1}{\pi} : (p,q) \mapsto p \quad , \qquad \overset{2}{\pi} : (p,q) \mapsto q$

sono differenziabili ed è

$$D\pi^{1}(p,q)(\bar{h},\bar{k}) = \bar{h} \quad , \quad D\pi^{2}(p,q)(\bar{h},\bar{k}) = \bar{k} \qquad \dot{-}$$

2.4.2. Possiamo dare, dunque, la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE Sia $f : E_1 \times E_2 \to F$ un'applicazione differenziabile.

Allora, le applicazioni parziali

$$f_q \equiv f \circ j_{1q} : E_1 \to F \quad , \quad f_p \equiv f \circ j_{1p} : E_2 \to F$$

date da $f_q \quad : p \mapsto f(p,q) \quad , \quad f_p \quad : q \mapsto f(p,q)$

sono differenziabili ed è

$$Df(p,q)(\bar{h},\bar{k}) = Df_q(p)(\bar{h}) + Df_p(q)(\bar{k})$$

$\forall\ (p,q) \in E_1 \times E_2$, $\forall\ (\bar{h},\bar{k}) \in \bar{E}_1 \times \bar{E}_2$.

D. Per la regola della catena, tali applicazioni sono differenziabili.

Inoltre, per la linearità di $Df(p,q)$, è

$$\begin{aligned} Df(p,q)(\bar{h},\bar{k}) &= Df(p,q)(\bar{h},\bar{o}) + Df(p,q)(\bar{o},\bar{k}) = Df(p,q)(Dj_{1q}(p)(\bar{h})) + \\ &+ Df(p,q)(Dj_{2p}(q)(\bar{k})) = (Df(p,q) \circ Dj_{1q}(p))(\bar{h}) + \\ &+ (Df(p,q) \circ Dj_{2p}(q))(\bar{k}) = D(f \circ j_{1q})(p)(\bar{h}) + \\ &+ D(f \circ j_{2p})(q)(\bar{k}) \equiv Df_q(p)(\bar{h}) + Df_p(q)(\bar{k}) \qquad \dot{-} \end{aligned}$$

2.4.3. DEFINIZIONE

Sia $f : E_1 \times E_2 \to F$ un'applicazione differenziabile.

Allora, le applicazioni

$D_1 f : E_1 \times E_2 \to L(\bar{E}_1, \bar{F})$ data da $D_1 f(p,q) \equiv Df_q(p)$

$D_2 f : E_1 \times E_2 \to L(\bar{E}_2, \bar{F})$ data da $D_2 f(p,q) \equiv Df_p(q)$

diconsi DERIVATE PARZIALI di f .

2.4.4. PROPOSIZIONE

Sia $f : E \to F_1 \times F_2$ un'applicazione differenziabile.

Allora, le applicazioni

$$f^1 \equiv \pi^1 \circ f : E \to F_1 \quad , \quad f^2 \equiv \pi^2 \circ f : E \to F_2$$

sono differenziabili ed è

$$Df(p)(\bar{h}) = (Df^1(p)(\bar{h}) \ , \ Df^2(p)(\bar{h})) .$$

D. Le applicazioni f^1 ed f^2 sono differenziabili per la regola della catena. Inoltre, è

$$Df^1(p)(\bar{h}) \equiv D(\pi^1 \circ f)(p)(\bar{h}) = (D\pi^1 (f(p)) \circ Df(p))(\bar{h}) = \pi^1 (Df(p)(\bar{h}))$$

$$Df^2(p)(\bar{h}) \equiv D(\pi^2 \circ f)(p)(\bar{h}) = (D\pi^2 (f(p)) \circ Df(p))(\bar{h}) = \pi^2 (Df(p)(\bar{h}))$$

2.4.5. Diamo una condizione sufficiente per la differenziabilità di

$f : E_1 \times E_2 \to F$.

PROPOSIZIONE

Sia $f : E_1 \times E_2 \to F$ un'applicazione .

Se le applicazioni $f_q : E_1 \to F$ ed $f_p : E_2 \to F$ sono differenziabili, per ogni $q \in E_2$, $p \in E_1$ e se le applicazioni

$D_1 f : E_1 \times E_2 \to L(\bar{E}_1, \bar{F})$ e $D_2 f : E_1 \times E_2 \to L(\bar{E}_2, \bar{F})$ sono continue,

allora f è differenziabile.

D. La non facile dimostrazione si trova su [2] (prop. 3.7.2. pag. 51) .

Si noti che se $D_1 f$ e $D_2 f$ non sono continue, può darsi che f non sia differenziabile.

2.4.6. Diamo una condizione sufficiente per la differenziabilità di $f : E \to F_1 \times F_2$.

PROPOSIZIONE

Si consideri l'applicazione $f : E \to F_1 \times F_2$.

Se le applicazioni

$$f^1 \equiv \pi^1 \circ f : E \to F_1 \qquad , \qquad f^2 \equiv \pi^2 \circ f : E \to F_2$$

sono differenziabili, allora f è differenziabile.

D. E'

$$f(p+\bar{h}) = (f^1(p+\bar{h}) \ , \ f^2(p+\bar{h}) \ ) = (f^1(p) + Df^1(p)(\bar{h}) + \bar{o}'(p,\bar{h}) \ ,$$

$$f^2(p) + Df^2(p)(\bar{h}) + \bar{o}''(p,\bar{h}) \ ) = (f^1(p) \ , \ f^2(p) \ ) +$$

$$+ (Df^1(p)(\bar{h}) \ , \ Df^2(p)(\bar{h}) \ ) + (\bar{o}'(p,\bar{h}) \ , \ \bar{o}''(p,\bar{h}) \ )$$

e

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{(\bar{o}'(p,\bar{h}) \ , \ \bar{o}''(p,\bar{h}))}{||\bar{h}||} = \lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{\sqrt{(\bar{o}'(p,\bar{h}))^2 + (\bar{o}''(p,\bar{h}))^2}}{||\bar{h}||} = o \ .$$

Dunque, f è differenziabile.

2.4.7. Vediamo ora un caso particolare molto interessante.

- CASO $\quad f : \mathbb{R} \times E \to F$.

Si indica con

$$\delta f : E \to \bar{F}$$

l'applicazione data da $\quad \delta f : p \mapsto D_1 f(o,p) \equiv Df_p(o)$.

Si indica con

$$\partial f : E \to TF$$

l'applicazione data da $\quad \partial f : p \mapsto (f(o,p) \ , \ \delta f(p) \ )$.

Questi simboli saranno utilizzati, nei sistemi di coordinate, per definire gli elementi di una qualsiasi base di uno spazio vettoriale, come vettori tangenti in un medesimo punto alle curve coordinate.

Il primo simbolo servirà per le basi costanti (sistema di coordinate cartesiano); il secondo, per basi variabili punto per punto (sistema di coordinate sferico, cilindrico ...) .

Tali simboli si utilizzeranno, anche,nel calcolo delle variazioni.

In particolare per $F \equiv E$, oltre a ritrovare i simboli precedenti si indica con

$$\dot{f} : T^*E \to \mathbb{R}$$

l'applicazione data da $\dot{f} : (p,\underline{\nu}) \mapsto < \underline{\nu} , \delta f(p) >$.

Tale nozione servirà per il calcolo delle componenti dei covettori espresse tramite gli elementi di una base, duale ad una che abbia per elementi i vettori tangenti alle curve coordinate.

5 IMMAGINE RECIPROCA E INVERSA DI CAMPI COVARIANTI E CONTROVARIANTI

0 Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile tra spazi affini.

Iniziamo questo paragrafo con il concetto di "immagine reciproca" di f e di "immagine inversa" di f (se invertibile). Esse saranno utili, ad esempio, per definire la "derivata di Lie" di campi tensoriali. Pertanto, consigliamo il lettore di rivedere questo paragrafo prima di passare allo studio degli "operatori differenziali".

Inoltre, se f è invertibile, è possibile definire "l'immagine diretta" di f.

Definiamo, anche, "l'applicazione cotangente" di f, la quale servirà per precisare il sistema di coordinate su T^*E, indotto da quello definito su E.

Il concetto di immagine reciproca è utilizzato in Meccanica, per esempio, nella definizione di "lavoro".

Concludiamo il paragrafo, generalizzando i precedenti risultati.

2.5.1. Ricordiamo, brevemente, che l'applicazione tangente di f è l'applicazione

$$Tf : TE \to TF$$

data da
$$Tf : (p,\bar{u}) \mapsto (f(p)\ ,\ Df(p)(\bar{u}))\ .$$

2.5.2. Introduciamo, ora, il concetto di "immagine reciproca" di f.

DEFINIZIONE

Dicesi IMMAGINE RECIPROCA di f l'applicazione

$$f^* : \mathcal{T}^*F \to \mathcal{T}^*E$$

data da

$$(f^*\underline{X})(p) \equiv (p, \underline{X}^{\ell}(f(p)) \circ Df(p)) \equiv (p, Df(p)^*(\underline{X}^{\ell}(f(p)))) \; .$$

Si noti che tale formula, sostanzialmente, è quella della trasformazione indotta dall'applicazione lineare $Df(p)$. A tal proposito si veda [1] .

Il campo di covettori $f^*\underline{X} \in \mathcal{T}^*E$ è detto "immagine reciproca" di $\underline{X}$ secondo f .

Vediamo il significato intuitivo della precedente definizione.

Sia $\bar{u} \in \bar{E}$ un "incremento" del punto $p \in E$. Tale incremento è trasformato "approssimativamente" da f nell'incremento, del punto $f(p) \in F$, dato da $Df(p)(\bar{u}) \in \bar{F}$.

Allora, il covettore $(f^*\underline{X})(p) \in T^*E$ è definito in modo tale che esso operi su $\bar{u}$ come $\underline{X}(f(p)) \in T^*F$ (noto a priori) opera sul suo trasformato $Df(p)(\bar{u})$, mediante f.

Sostanzialmente, tale nozione è data in modo che il seguente diagramma commuti.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} & \\ T^*E \,\hat{\times}\, TE \arrow[ur, "{<\, ,\, >}"] & & T^*F \,\hat{\times}\, TF \arrow[ul, "{<\, ,\, >}"'] \\ E \arrow[u, "{(f^*\underline{X}, \bar{X})}"] \arrow[rr, "f"] & & F \arrow[u, "{(\underline{X}, Tf \circ \bar{X})}"'] \end{tikzcd}$$

dove il simbolo " ˆ " sul segno di prodotto cartesiano sta a significare che si opera solo sugli elementi "diagonali", ossia solo sui vettori e covettori applicati sullo stesso punto di E o F.

Si noti l'inversione : la f va da E in F, mentre f^* manda forme applicate in F in forme applicate in E.

2.5.3. Ricordiamo che è $Tid_E = id_{TE}$, inoltre se $g : F \to G$ è un'applicazione differenziabile e se f è invertibile è

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf \quad , \quad Tf^{-1} = (Tf)^{-1} \quad .$$

Abbiamo, allora, la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE

E'

$$(id_E)^* = id_{\mathcal{T}^*E}$$
$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \quad .$$

D. Infatti, per ogni $p \in E$, è

$$((id_E)^*\underline{X})(p) \equiv (p, \underline{X}^\ell(id_E(p)) \circ Did_E(p)) = (p, \underline{X}^\ell(p) \circ id_E) = (p, \underline{X}^\ell(p)) \equiv \underline{X}(p) =$$
$$= (id_{\mathcal{T}^*E}\ \underline{X})(p) \quad , \text{ per ogni } \underline{X} \in \mathcal{T}^*E \quad ;$$

$$((g \circ f)^*\underline{X})(p) \equiv (p, \underline{X}^\ell(g \circ f)(p) \circ D(g \circ f)(p)) = (p, \underline{X}^\ell(g(f(p)) \circ Dg(f(p)) \circ Df(p)) =$$
$$= (p, (g^*\underline{X})^\ell(f(p) \circ Df(p)) \equiv f^*(g^*\underline{X})(p) = ((f^* \circ g^*)\underline{X})(p) \ , \forall \underline{X} \in \mathcal{T}^*G .$$

Dunque, dalla seconda relazione segue il risultato

$$(f^{-1})^{*} = (f^{*})^{-1} \equiv f_{*} \quad .$$

2.5.4. Diamo, ora, la nozione duale di applicazione tangente.

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile invertibile.

Dicesi APPLICAZIONE COTANGENTE di f l'applicazione

$$T^{*}f : T^{*}E \to T^{*}F$$

data da
$$T^{*}f : (p,\underline{u}) \mapsto (f(p),\underline{u}\circ Df^{-1}(f(p))) \equiv (f(p),(Df^{-1}(f(p))^{*}(\underline{u})) \; .$$

Come abbiamo già detto, essa servirà per definire un sistema di coordinate su $T^{*}E$, più precisamente, quello indotto da un sistema di coordinate su E.

2.5.5. La seguente definizione esprime il concetto di "immagine inversa" di f (se invertibile).

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile e invertibile.

Dicesi IMMAGINE INVERSA di f l'applicazione (indicata ancora con f^{*})

$$f^{*} : \mathcal{T}F \to \mathcal{T}E$$

data da
$$(f^{*}\bar{X})(p) \equiv (p, Df^{-1}(f(p))(\bar{X}^{\ell}(f(p))) \; .$$

Dunque, il seguente diagramma è commutativo

$$
(*) \qquad
\begin{tikzcd}
TE & TF \arrow[l, "Tf^{-1}"'] \\
E \arrow[u, "f^{*}\bar{X}"] \arrow[r, "f"'] & F \arrow[u, "\bar{X}"']
\end{tikzcd}
$$

Si noti l'inversione : f va da E in F, f^{*} manda vettori applicati in F in vettori applicati in E.

Si vede facilmente che è

$$(id_E)^{*} = id_{\mathcal{T}E} \quad .$$

Inoltre, è

$$(f \circ g)^{*} = f^{*} \circ g^{*}$$

e in particolare

$$(f^{-1})^{*} = (f^{*})^{-1} \equiv f_{*} \quad .$$

2.5.6. Diamo ora il concetto di "immagine diretta" di f.

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile e invertibile.

Dicesi IMMAGINE DIRETTA di f l'applicazione

$$f_{*} : \mathcal{T}E \to \mathcal{T}F$$

tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$(**) \qquad \begin{array}{ccc} TE & \overset{Tf}{\rightarrow} & TF \\ \bar{X} \uparrow & & \uparrow f_*\bar{X} \\ E & \underset{f^{-1}}{\leftarrow} & F \end{array}$$

Si confrontino i diagrammi (*) e (**) .

2.5.7. Generalizziamo i risultati sinora acquisiti.

DEFINIZIONE

Dicesi APPLICAZIONE TANGENTE R-MA di f l'applicazione

$$T^r f : T^r E \rightarrow T^r F$$

data da
$$T^r f : (p, \bar{u}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{u}_r) \mapsto (f(p), Df(p)(\bar{u}_1) \otimes \ldots \otimes Df(p)(\bar{u}_r)) .$$

Se f è invertibile, dicesi APPLICAZIONE COTANGENTE S-MA di f l'applicazione

$$T_s f : T_s E \rightarrow T_s F$$

data da
$$T_s f : (p, \underline{\nu}^1 \otimes \ldots \otimes \underline{\nu}^s) \mapsto (f(p), [\underline{\nu}^1 \circ Df^{-1}(f(p))] \otimes$$
$$\otimes \ldots \otimes [\underline{\nu}^s \circ Df^{-1}(f(p))])$$

Tale definizione servirà per dare la "derivata di Lie" di un campo di vettori r controvariante ed s covariante.

2.5.8. DEFINIZIONE

Dicesi IMMAGINE RECIPROCA di f l'applicazione (indicata ancora con f^*)

$$f^* : \mathcal{T}_s F \to \mathcal{T}_s E$$

data da $\quad f^* : \underline{t} \mapsto (\underline{t} \circ f) \circ T^s f \quad ,$

(dove $\circ$ indica la composizione sugli spazi funzionali d'arrivo)

ossia, data da

$$(f^*\underline{t})(p) \equiv (p, [\, \underline{t}^\ell (f(p)) \,] \circ [\, Df(p) \otimes \ldots \otimes Df(p) \,]) \quad \forall\, p \in E \, .$$

Se f è invertibile, dicesi IMMAGINE INVERSA di f l'applicazione (indicata ancora con f^*)

$$f^* : \mathcal{T}^r F \to \mathcal{T}^r E$$

data da

$$(f^*\bar{t})(p) \equiv (p, [\, Df^{-1}(f(p)) \otimes \ldots \otimes Df^{-1}(f(p)) \,] (\bar{t}^\ell (f(p)))) \, .$$

Dicesi IMMAGINE DIRETTA di f l'applicazione (indicata ancora con f_*)

$$f_* : \mathcal{T}^r E \to \mathcal{T}^r F$$

data da

$$(f_*\bar{t})(q) \equiv (q \, , [\, Df(f^{-1}(q)) \otimes \ldots \otimes Df(f^{-1}(q)) \,] (\bar{t}^\ell (f^{-1}(q)))) \, .$$

6 EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE

0 Sia E uno spazio affine.

Sostanzialmente, una "equazione differenziale del 1° ordine" su E è un campo vettoriale

$$\bar{X} : E \to TE$$

le cui soluzioni sono tutte e sole le curve differenziabili $\mathbb{R} \to E$, dette "curve integrali", i cui vettori tangenti sono i valori assunti da $\bar{X}$ lungo esse.

Enunciamo, anche, i teoremi fondamentali di esistenza, unicità e dipendenza dai dati iniziali delle soluzioni.

Le equazioni differenziali del 1° ordine, così definite, assumeranno, tramite un sistema di coordinate, la forma classica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine, normali ed autonome.

Infine, introduciamo il concetto di "integrale primo" di $\bar{X}$ come una funzione differenziabile su E, costante lungo le curve integrali di $\bar{X}$.

2.6.1. DEFINIZIONE

Dicesi EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 1° ORDINE su E un qualsiasi campo vettoriale

$$\bar{X} : E \to TE \quad .$$

D'ora in poi, indicheremo con $\bar{X}$ un'equazione differenziale del

1° ordine.

2.6.2. Diamo l'importante nozione di "curva integrale".

DEFINIZIONE Sia $I \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Dicesi una CURVA INTEGRALE di $\bar{X}$, ogni curva differenziabile

$$c : I \to E$$

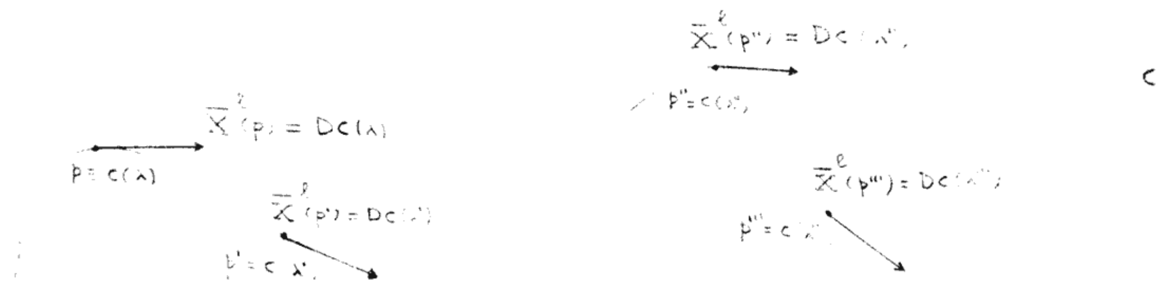
tale che

$$dc = \bar{X} \circ c$$

o equivalentemente

$$Dc = \bar{X}^{\ell} \circ c \quad .$$

Sostanzialmente, c è ogni curva differenziabile su E il cui vettore tangente in ogni punto di E è il valore di $\bar{X}$ nel punto stesso.



2.6.3. Nasce, allora, il problema, fissato $p \in E$, dell'esistenza di una curva integrale passante per p, ossia tale che $c(o) = p$, che sia unica almeno in un intorno di p.

Il seguente teorema risolve appunto, questo problema.

TEOREMA (DI ESISTENZA ED UNICITA' DELLE CURVE INTEGRALI)

Sia $\bar{X} : E \to TE$ un campo vettoriale differenziabile (basta anche un'ipotesi più debole).

Sia $p \in E$.

Esiste

- un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$,
- ed una curva integrale $c : I \to E$

tale che

$$c(o) = p \quad .$$

Se $I' \subset \mathbb{R}$ è un altro sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $c' : I' \to E$ è tale che $c'(o) = p$, allora è

$$c_{/I \cap I'} = c'_{/I \cap I'} \quad .$$

D. Si veda [2] (teorema 1.5.1. pag.118) .

2.6.4. Anche del seguente teorema, omettiamo la non facile dimostrazione.

TEOREMA(DI ESISTENZA, UNICITA' E DIPENDENZA DAI DATI INIZIALI DELLE CURVE INTEGRALI)

Sia $\bar{X} : E \to TE$ un campo vettoriale differenziabile (basta anche un'ipotesi più debole).

Esiste

- un intorno aperto U di $\{o\}\times E$ in $\mathbb{R}\times E$
- ed una applicazione differenziabile $c : U \to E$

avente, per ogni $p \in E$, le seguenti proprietà

1) $c_p : \lambda \mapsto c(\lambda,p)$ è una curva integrale di $\bar{X}$;

2) $c_o = id_E$, con $o \in \mathbb{R}$;

3) $c_{\lambda+\mu} = c_\lambda \circ c_\mu$ (se definito) ;

4) $\dot{c} = \bar{X}$, ossia $Dc_p = \bar{X}^{\ell}(p)$, $\forall\, p \in E$.

Se $o\times E \subset U' \subset \mathbb{R}\times E$ e $c' : U' \to E$ soddisfano le condizioni precedenti, allora è

$$c_{/U\cap U'} = c'_{/U\cap U'} .$$

D. Si veda [2] (§ 1.10, pag.124)

L'applicazione differenziabile $c : U \to E$ precedente, dicesi GRUPPO LOCALE AD UN PARAMETRO generato da $\bar{X}$ e si indica con

$$c \equiv \int \bar{X} .$$

Il termine "gruppo" è giustificato dal fatto che l'insieme

$$\{c_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$$

è un gruppo rispetto alla legge di composizione

$$(c_\lambda , c_\mu) \mapsto c_\lambda \circ c_\mu = c_{\lambda+\mu} .$$

Questo gruppo locale può essere interpretato cinematicamente come un "moto stazionario" dei punti di E, tenendo conto delle proprietà 1),2),3),4) .

Il punto $c(\lambda,p) \in U$ è la posizione occupata, all'istante λ, dalla particella che, all'istante o, era in p.

La curva $c_p : \lambda \mapsto c(\lambda,p)$ è il moto della particella che, all' istante o, era in p.

L'intervallo di tempo I_p, in cui è definito il moto c_p, può variare con la posizione p.

Inoltre, considerato un intorno $V \subset E$, abbastanza piccolo, di $p \in E$, allora le particelle, che partono all'istante o da punti di V, mantengono la propria individualità per un intervallo di tempo non nullo, sufficientemente piccolo.

Ma, in generale, tale individualità non è mantenuta e, quindi, la posizione iniziale non individua, in modo assoluto, la particella.

L'applicazione $c_\lambda : p \mapsto c(\lambda,p)$ dà lo spostamento subito dai punti di E, all'istante λ, a partire dall'istante o.

La "stazionarietà" del moto è garantita dalla proprietà 3) del teorema 2.6.4. Sostanzialmente, essa dice che una particella, che parte da una certa posizione $q \equiv c(\lambda',p)$, arriva, dopo un tempo λ, nella stessa posizione sia che parta al tempo o da p, sia che parta al tempo λ' da q.

2.6.5. Questa condizione dà un risultato molto interessante. Ossia, le velocità delle particelle, che passano per q, non dipendono dall'istante in cui ci passano, ma solo da q, come mostra la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE Sia $(\lambda , p) \in U$ tale che $q = c(\lambda,p) \in E$.

Allora, è

$$Dc_p(\lambda) = Dc_q(o) \equiv \bar{X}^{\ell}(q) \quad .$$

D. Per λ' sufficientemente vicino a λ, è

$$c_p(\lambda + \lambda') = c_q(\lambda')$$

da cui

$$Dc_p(\lambda + \lambda') = Dc_q(\lambda') \quad .$$

Pertanto, per $\lambda' = o$, è

$$Dc_p(\lambda) = Dc_q(o) \qquad \dot{-}$$

2.6.6. Diamo, ora, la nozione di "integrale primo" di $\bar{X}$.

DEFINIZIONE

Dicesi un INTEGRALE PRIMO di $\bar{X}$ ogni funzione differenziabile

$$f : E \to \mathbb{R}$$

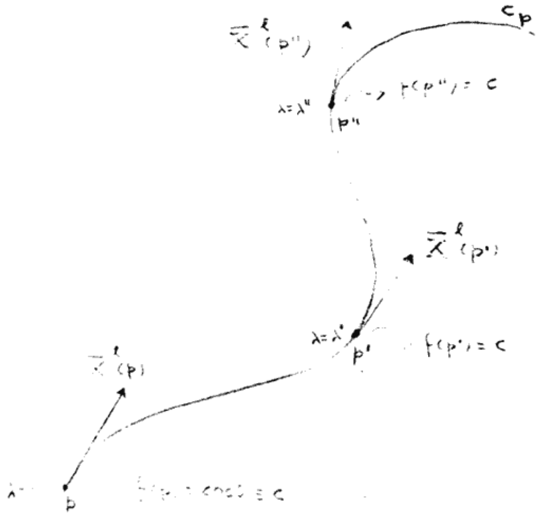
tale che f sia costante lungo le curve integrali, ossia $\forall p \in E$ è

$$f \circ c_p = \text{cost} \quad \dot{-}$$

Intuitivamente questo fatto si può vedere così.

Fissato $p \in E$, consideriamo il moto stazionario del fluido e supponiamo che in ogni punto dello spazio sia definita una funzione f (per esempio la temperatura).

Poi, consideriamo un osservatore che, all'istante $\lambda = o$ del suo orologio, si trova in p.



Allora supponiamo che egli si muova con velocità $\bar{X}$ lungo la curva integrale passante per p e supponiamo, inoltre, che non avverta "nessun cambiamento di temperatura". Se ciò vale per ogni $p \in E$, diciamo che la funzione f è un integrale primo.

2.6.7. La seguente *proposizione caratterizza un integrale primo di* $\bar{X}$.

PROPOSIZIONE Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) f è un integrale primo di $\bar{X}$;

b) per ogni soluzione $c_p : I \to E$ di $\bar{X}$, è

$$(\partial c \,.\, f)(p) \equiv D(f \circ c_p)(o) = o \quad ;$$

c) è

$$<df, \bar{X}> = <Df, \bar{X}^{\ell}> = o \quad .$$

D. a) $\Rightarrow$ b). Ovvia.

b) $\Rightarrow$ c). Sia $c_p : I \to E$, con $c_p(o) = p$, una soluzione di $\bar{X}$. Allora, è

$$\langle df,\bar{x}\rangle(p) = \langle Df(p) , \bar{X}^{\ell}(p)\rangle = \langle Df(c_p(o)) , Dc_p(o)\rangle = D(f \circ c_p)(o) = o$$

c) $\Rightarrow$ a). Ovvia $\underline{.}$

0 INTRODUZIONE

In questo capitolo, continuando il discorso sulla differenziabilità di un'applicazione $f : E \to F$, definiamo la "derivata seconda" di f e, più in generale, la "derivata di ordine k" di f, con $k > 2$.

In termini di vettori applicati, abbiamo allora le "2-applicazioni tangenti e cotangenti" di f; osserviamo che in esse intervengono anche le derivate prime, oltre alle derivate seconde.

L'importanza delle 2-applicazioni tangenti e cotangenti di f è data, anche, dal fatto che serviranno per definire, sui 2-spazi tangenti e cotangenti di uno spazio affine E, dei sistemi di coordinate indotti da quello definito su E.

Osserviamo inoltre che, passando alle varietà differenziabili, continuano ad essere definite solo le 2-applicazioni tangenti e cotangenti di f e non le derivate seconde.

Diamo, poi, la definizione di "equazione differenziale del 2° ordine" (e.d.s.o.) su E, come un campo vettoriale

$$\bar{X} : TE \to TTE$$

su TE, le cui "curve integrali" $I \to TE$ sono la derivata della propria proiezione su E. Ogni campo vettoriale $\bar{X}$ è caratterizzato dalle sue due componenti orizzontale e verticale, essendo $TTE = \nu TTE \oplus oTTE$.

Il teorema 3.3.4. dice, sostanzialmente, che $\bar{X}$ è una e.d.s.o. se e solo se la componente orizzontale è di un certo tipo fissato. Dunque, le e.d.s.o. sono caratterizzate dalla componente verticale $\Gamma \circ \bar{X}$, che può essere scelta arbitrariamente.

1 DERIVATE SECONDE

0 Considerati due spazi affini E ed F, proseguiamo il discorso sulla differenziabilità di un'applicazione $f : E \to F$.

Nel precedente capitolo abbiamo definito la derivata di f come un'applicazione

$$Df : E \to L(\bar{E},\bar{F}) \quad .$$

Essendo E e $L(\bar{E},\bar{F})$ spazi affini, ha senso parlare della differenziabilità di Df.

Ora, supposto che Df sia differenziabile, è naturale precisare la sua derivata: essa è detta "derivata seconda" di f. Iterando il procedimento si dà, più in generale, la nozione di applicazione differenziabile k volte.

Concludiamo tale paragrafo dando le applicazioni tangenti e cotangenti di Tf e T^*f facendo osservare che in queste nozioni entrano in gioco, non solo le derivate seconde ma, anche le derivate prime.

3.1.1. DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile.

Se l'applicazione

$$Df : E \to L(\bar{E},\bar{F}) \approx E^* \otimes \bar{F}$$

è differenziabile, allora l'applicazione

$$D^2f \equiv D(Df) : E \to L(\bar{E},L(\bar{E},\bar{F})) \approx L(\bar{E},\bar{E}^* \otimes \bar{F}) \approx \bar{E}^* \otimes \bar{E}^* \otimes \bar{F} \approx L^2(\bar{E},\bar{F})$$

dicesi DERIVATA SECONDA di f .

Pertanto, tenuto conto degli isomorfismi canonici precedenti, si scrive

$$[\,D^2f(p)(\bar{h})\,](\bar{k}) = D^2f(p)(\bar{h},\bar{k}) = \langle D^2f(p),\bar{h}\otimes\bar{k}\rangle \quad .$$

Abbiamo anche

$$Df(p+\bar{h})(\bar{k}) = Df(p)(\bar{k})+ D^2f(p)(\bar{h},\bar{k})+\bar{o}(p,\bar{h})(\bar{k}) \qquad \forall\, p \in E,\ \ \bar{h},\bar{k} \in \bar{E}\ ,$$

dove $\bar{o}(p,\bar{h})$ è un infinitesimo di ordine superiore ad $||\bar{h}||$.

3.1.2. Del seguente teorema omettiamo la non facile dimostrazione. Il lettore, a tale scopo, può consultare [2] (teorema 5.1.1. pag.65).

TEOREMA Sia $Df : E \to L(\bar{E},\bar{F})$ un'applicazione differenziabile.

Allora, l'applicazione bilineare $D^2f(p)$ è simmetrica, per ogni $p \in E$, ossia è

$$D^2f(p)(\bar{h},\bar{k})= D^2f(p)(\bar{k},\bar{h}) \qquad \underline{.}$$

3.1.3. Le considerazioni precedenti si estendono, per iterazione, alle derivate di ordine $k > 2$ (se esistono) .

DEFINIZIONE

L'applicazione $f : E \to F$ si dice DIFFERENZIABILE K VOLTE se sono differenziabili le applicazioni

$$f\ ,\ Df,\ D^2f\ ,\ldots,\ D^{k-1}f\ .$$

Inoltre, f si dice "di classe $\mathcal{C}^k$ " se è differenziabile k volte e se D^kf è continua. Conseguentemente, si dice di classe $\mathcal{C}^\infty$ se, per ogni intero positivo k, f è di classe $\mathcal{C}^k$ $\underline{.}$

Le due proposizioni seguenti assicurano la differenziabilità di alcune notevoli derivate nella sola ipotesi che l'applicazione di partenza sia differenziabile almeno due volte.

3.1.4. PROPOSIZIONE Siano E_1 , E_2 spazi affini.

Sia $f : E_1 \times E_2 \to F$ un'applicazione differenziabile 2 volte.

Allora, le applicazioni

$$D_1 f : E_1 \times E_2 \to L(\bar{E}_1,\bar{F}) \quad , \; D_2 f : E_1 x E_2 \to L(\bar{E}_2,\bar{F})$$

sono differenziabili.

D. Infatti $D_1 f$ e $D_2 f$ si ottengono mediante composizione delle seguenti applicazioni differenziabili

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{Df} L(\bar{E}_1 x \bar{E}_2,\bar{F}) \quad \to \quad L(\bar{E}_1,\bar{F})$$

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{Df} L(\bar{E}_1 x \bar{E}_2,\bar{F}) \quad \to \quad L(\bar{E}_2,\bar{F}) \qquad \dot{-}$$

3.1.5. PROPOSIZIONE Siano F_1 ed F_2 due spazi affini.

Sia $f : E \to F_1 x F_2$ un'applicazione differenziabile due volte.

Allora, le applicazioni

$$Df^1 : E \to L(\bar{E},\bar{F}_1) \quad , \quad Df^2 : E \to L(\bar{E},\bar{F}_2)$$

sono differenziabili.

D. Infatti Df^1 e Df^2 si ottengono mediante composizione delle applicazioni differenziabili

$$E \xrightarrow{Df} L(\bar{E}, \bar{F}_1 \times \bar{F}_2) \to L(\bar{E},\bar{F}_1)$$

$$E \xrightarrow{Df} L(\bar{E},\bar{F}_1 \times \bar{F}_2) \to L(\bar{E},\bar{F}_2) \qquad \dot{-}$$

3.1.6. Facciamo vedere ora l'equivalenza esistente, in termini di differenziabilità, tra la derivata di un'applicazione e la sua applicazione tangente.

PROPOSIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile.

Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti.

a) $Df : E \to L(\bar{E},\bar{F})$ è differenziabile,

b) $Tf : TE \to TF$ è differenziabile.

D. a) Sia Df differenziabile. Allora, Tf è differenziabile.
Infatti

$$\begin{aligned} Tf\,[(p,\bar{u})+(\bar{v},\bar{w})] &= Tf(p+\bar{v},\bar{u}+\bar{w}) = (f(p+\bar{v}) \;,\; Df(p+\bar{v})(\bar{u}+\bar{w})) = \\ &= (f(p)+Df(p)(\bar{v})+\bar{o}'(p,\bar{v}), Df(p)(\bar{u}+\bar{w})+D^2f(p)(\bar{v},\bar{u}+\bar{w})+o''(p,\bar{v})(\bar{u}+\bar{w}) \\ &= (f(p),Df(p)(\bar{u})) + (Df(p)(\bar{v}) \;,\; Df(p)(\bar{w}) + D^2f(p)(\bar{v},\bar{u}))+ \\ &+ (o'(p,\bar{v}) \;,\; D^2f(p)(\bar{v},\bar{w})) + o''(p,\bar{v})(\bar{u}+\bar{w}) = \\ &= Tf(p,\bar{u}) + (Df(p)(\bar{v}) \;,\; Df(p)(\bar{w})+ D^2f(p)(\bar{v},\bar{u}))+o(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \;, \end{aligned}$$

dove il secondo termine è lineare rispetto a $(\bar{v},\bar{w})$ ed o è un infinitesimo di ordine superiore a $(\bar{v},\bar{w})$.

b) Sia Tf differenziabile. Allora, Df è differenziabile.

Infatti,

$$Tf(p+\bar{v},\bar{u}) = (Tf)(p,\bar{u}) + D_1(Tf)(p,\bar{u})(\bar{v}) + o(p,\bar{u};\bar{v})$$

dove

$$\begin{cases} Tf(p+\bar{v},\bar{u}) = (f(p+\bar{v}),\ Df(p+\bar{v})(\bar{u})) = (f(p)+Df(p)(\bar{v}) + o'(p,\bar{v}),Df(p+\bar{v})(\bar{u})) \\ Tf(p,\bar{u}) = (f(p)\ ,\ Df(p)(\bar{u})) \end{cases},$$

e dove o è un infinitesimo di ordine superiore a $\bar{v}$.

Quindi

$$Df(p+\bar{v})(\bar{u}) = Df(p)(\bar{u}) + \pi^2(D_1(Tf)(p,\bar{u})) + o(p,\bar{u};\bar{v}) ,$$

da cui

$$D^2f(p)(\bar{u},\bar{v}) = \pi^2(D_1Tf)(p,\bar{u})(\bar{v}) \qquad \dot{-}$$

3.1.7. Diamo ora la nozione di "seconda applicazione tangente" di f.

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile almeno due volte.

Dicesi 2-APPLICAZIONE TANGENTE di f o "applicazione tangente" di Tf l'applicazione

$$TTf : TTE \to TTf$$

data da $TTf : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (Tf(p,\bar{u})\ ,\ D(Tf)(p,\bar{u})(\bar{v},\bar{w}))$ $\dot{-}$

3.1.8. PROPOSIZIONE

E'

$$TTf(p,\bar{u},\bar{v},\bar{w}) = (f(p),Df(p)(\bar{u});\ Df(p)(\bar{v}),\ D^2f(p)(\bar{u},\bar{v}) + Df(p)(\bar{w})) \quad .$$

*

D. Infatti, posto $Tf \equiv g$, $TE \equiv M$, $TF \equiv N$, dobbiamo determinare l'applicazione tangente

$$Tg : TM \to TN$$

data da

$$Tg : (q,\bar{z}) \mapsto (g(q)\ ,\ Dg(q)(\bar{z}))$$

$\forall\ q \equiv (p,\bar{u}) \in M \quad , \quad \bar{z} \equiv (\bar{v},\bar{w}) \in N$.

Essendo $g(q) \equiv Tf(p,\bar{u}) \equiv (f(p)\ ,\ Df(p)(\bar{u}))$, allora resta da determinare

$$Dg\ (q)\ (\bar{z}) \quad .$$

Per la proposizione 2.4.4., è

$$Dg(q)(\bar{z}) = (Dg^1(q)(\bar{z})\quad ,\ Dg^2(q)(\bar{z})) \quad ,$$

dove si è posto

$$g^1 \equiv \pi^1 \circ g : M \to F \quad , \quad g^2 \equiv \pi^2 \circ g : M \to F \quad .$$

$$Dg^1(q)(\bar{z}) \equiv \langle Dg^1(q),\bar{z}\rangle \equiv \langle Dg^1(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})\rangle = \langle D_1g^1(p,\bar{u}),\bar{v}\rangle + \langle D_2g^1(p,\bar{u}),\bar{w}\rangle =$$

$$= \langle Dg^1_{\bar{u}}(p),\bar{v}\rangle + \langle Dg^1_p(\bar{u}),\bar{w}\rangle \overset{1)}{=} \langle Df(p),\bar{v}\rangle + \langle \underline{o}\ ,\ \bar{w}\rangle = \langle Df(p),\bar{v}\rangle \ .$$

1a) $E \xrightarrow{J_{\bar{u}}} E\times\bar{E} \xrightarrow{g^1} F$ $\qquad g^1_{\bar{u}}(p) \equiv (g^1 \circ J_{\bar{u}})(p) \equiv f(p) \Rightarrow Dg^1_{\bar{u}}(p) \equiv Df(p)$

$\quad p \mapsto (p,\bar{u}) \mapsto f(p)$

1b) $\bar{E} \xrightarrow{J_p} E\times\bar{E} \xrightarrow{g^1} F$ $\qquad g^1_p(\bar{u}) \equiv (g^1 \circ J_p)(\bar{u}) \equiv f(p) = \text{cost} \Rightarrow Dg^1_p(\bar{u}) = o$.

$\quad \bar{u} \mapsto (p,\bar{u}) \mapsto f(p)$

$$Dg^2(q)(\bar z) \equiv \langle Dg^2(q),\bar z\rangle \equiv \langle Dg^2(p,\bar u),(\bar v,\bar w)\rangle = \langle D_1 g^2(p,\bar u),\bar v\rangle + \langle D_2 g^2(p,\bar u),\bar w\rangle =$$

$$= \langle Dg^2_{\bar u}(p),\bar v\rangle + \langle Dg^2_p(\bar u),\ \bar w\rangle \overset{1)}{=} \langle D^2 f(p)\ ,\ (\bar u,\bar v)\rangle + \langle Df(p),\ \bar w\rangle \qquad \dot{-}$$

*(Per comodità del lettore è ripetuta più esplicitamente la dim. 3.1.6.

Dunque, l'espressione della seconda applicazione tangente coinvol ge la derivata prima, oltre alla derivata seconda. Possiamo "isolare" quest'ultima, componendo la seconda applicazione tangente con la connessione affine.

3.1.8. PROPOSIZIONE Siano $\vee TTE \subset TTE$, $\circ TTE \subset TTE$.

Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile due volte.

Allora, l'espressione di $\Gamma \circ TTf : \circ TTE \to \vee TTF$ è data da

$$\begin{array}{ccccccc} \circ TTE & \to & TTE & \xrightarrow{TTf} & TTF & \xrightarrow{\Gamma} & \vee TTF \\ (p,\bar u;\bar v,\bar o) & \mapsto & (p,\bar u;\bar v,\bar o) & \mapsto & (f(p),Df(p)(\bar u);Df(p)(\bar v),D^2f(p)(\bar u,\bar v)) & \mapsto & (f(p),Df(p)(\bar u);\bar o,D^2f(p)(\bar u,\bar v)). \end{array}$$

3.1.9. Possiamo ora esprimere la simmetria della derivata seconda, tramite la 2-applicazione tangente e l'involuzione canonica s.

PROPOSIZIONE

Il seguente diagramma

---

1 a) $E \xrightarrow{Df} \bar E^* \otimes \bar F \xrightarrow{\langle\ ,\bar u\rangle} \bar F$ $\qquad g^2_{\bar u}(p) \equiv \langle Df(p),\bar u\rangle \Rightarrow Dg^2_{\bar u}(p) = \langle D^2 f(p),\bar u\rangle$ essendo

$p \mapsto Df(p) \mapsto \langle Df(p),\bar u\rangle$ $\qquad \langle\ ,\ \bar u\ \rangle$ un'applicazione lineare.

1 b) $\bar E \xrightarrow{\langle Df(p),\ \rangle} \bar F$ $\qquad g^2_p(\bar u) \equiv \langle Df(p),\bar u\rangle \Rightarrow Dg^2_p(\bar u) = \langle Df(p),\bar u\rangle$ essendo

$\langle Df(p),\ \rangle$ un'applicazione lineare.

$$\begin{tikzcd} TTE \arrow[r, "TTf"] & TTF \arrow[d, "s"] \\ TTE \arrow[u, "s"] \arrow[r, "T\vec{T}f"'] & TTF \end{tikzcd}$$

dato da

$$\begin{array}{ccc} (f,\bar{v},\bar{u},\bar{w}) & \overset{TTf}{\mapsto} & (f(p),Df(p)(\bar{v});\ Df(p)(\bar{u})\ ,\ D^2f(p)(\bar{v},\bar{u})+Df(p)(\bar{w})) \\ s \ \updownarrow & & \updownarrow \ s \\ (f,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) & \underset{TTf}{\mapsto} & (f(p),Df(p)(\bar{u});\ Df(p)(\bar{v})\ ,\ D^2f(p)(\bar{u},\bar{v})+Df(p)(\bar{w})) \end{array}$$

è commutativo, ossia,è

$$TTf = s \circ TTf \circ s \qquad \underline{\cdot}$$

In modo analogo a 3.1.7. si dà l'altra 2-applicazione tangente di f

$$TT^*f : TT^*E \to TT^*F$$

data da $$TT^*f : (p,\underline{u},\bar{v},\underline{\omega}) \mapsto (T^*f(p,\underline{u})\ ,\ D(T^*f)(p,\underline{u})(\bar{v},\underline{\omega}))\ .$$

3.1.10. Inoltre, se f è invertibile, allora abbiamo anche le nozioni di "2-applicazioni cotangenti" di f.

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile almeno due volte ed invertibile .

Dicesi 2-APPLICAZIONE COTANGENTE di f l'applicazione

$$T^*Tf : T^*TE \rightarrow T^*TF$$

data da $$T^*Tf : (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \mapsto (Tf(p,\bar{u}) \ , (\underline{\nu},\underline{\omega}) \circ D(Tf)^{-1}(Tf(p,\bar{u}))),$$

o l'applicazione

$$T^*T^*f : T^*T^*E \rightarrow T^*T^*F$$

data da $$T^*T^*f : (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \mapsto (T^*f(p,\underline{u}),(\underline{\nu},\bar{w}) \circ D(T^*f)^{-1}(T^*f(p,\underline{u}))).$$

Poiché tali nozioni, in questo lavoro, serviranno principalmente per i sistemi di coordinate sui 2- spazi tangenti e cotangenti, faremo uno studio più approfondito e dettagliato di ciò, nel 5° capitolo.

2 CASI PARTICOLARI DI DERIVATE SECONDE

0 Sia E uno spazio affine.

Vediamo ora i casi più interessanti , trattati di solito nell'analisi classica.

Ossia, i casi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to E$, $f : E \to \mathbb{R}$.

3.2.1. CASO $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sia f un'applicazione differenziabile almeno due volte. Allora, per l'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R},\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$, la derivata seconda di f

$$D^2 f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è data da

$$D^2 f(x)(\lambda,\mu) = D^2 f(x)\lambda\mu \quad .$$

Possiamo, quindi, considerare il differenziale secondo

$$d^2 f : \mathbb{R} \to TT\mathbb{R}$$

dato da $$d^2 f : x \mapsto (f(x), Df(x);\ Df(x), D^2 f(x)) \quad .$$

Inoltre, la 2-applicazione tangente

$$TTf : TT\mathbb{R} \to TT\mathbb{R}$$

è data da $$TTf : (x,y;\lambda,\mu) \mapsto (f(x), Df(x)y; Df(x)\lambda, D^2 f(x)\lambda y + Df(x)\mu) \ .$$

3.2.2. CASO $f : \mathbb{R} \to E$.

Sia f una curva differenziabile almeno due volte. Allora, per l'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R},\bar{E}) \approx \bar{E}$, la derivata seconda di f

$$D^2 f : \mathbb{R} \to \bar{E}$$

è data da
$$D^2 f(x)(\lambda,\mu) = D^2 f(x)\lambda\mu \quad .$$

Dunque, il differenziale secondo di f

$$d^2 f : \mathbb{R} \to TTE$$

è dato da
$$d^2 f : x \mapsto (f(x),\, Df(x) \,;\, Df(x) \,,\, D^2 f(x)) \quad .$$

Possiamo comporre, allora, $d^2 f$ con la connessione affine

$\Gamma : TT\mathbb{R} \to \nu TTE$, ottenendo così l'applicazione

$$\Gamma \circ d^2 f : \mathbb{R} \to \nu TTE$$

data da
$$\Gamma \circ d^2 f : x \mapsto (f(x) \,,\, Df(x) \,;\, \bar{o},\, D^2 f(x)) \quad .$$

Tale applicazione gioca un ruolo importante nella Meccanica Analitica.

Inoltre, la 2-applicazione tangente

$$TTf : TT\mathbb{R} \to TTE$$

è data da
$$TTf : (x,y;\lambda,\mu) \mapsto (f(x),Df(x)y;Df(x)\lambda,D^2 f(x)\lambda y+Df(x)\mu) \quad .$$

3.2.3. CASO $f : E \to \mathbb{R}$.

Sia f una funzione differenziabile almeno due volte. Allora, essendo $L(\bar{E},R) \equiv \bar{E}^*$, la derivata seconda di f

$$D^2 f : E \to \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$$

è data da

$$D^2f(p)(\bar{u},\bar{v}) = < D^2f(p) \; , \; \bar{u} \otimes \bar{v} > \quad .$$

Inoltre, la 2-applicazione tangente di f

$$TTf : TTE \rightarrow TT\mathbb{R}$$

è data da

$$TTf(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv (f(p),<Df(p),\bar{u}> \; ; \; <Df(p),\bar{v}>,<D^2f(p),\bar{u}\otimes\bar{v}> + <Df(p),\bar{w}> \;).$$

3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

0 Sia E uno spazio affine.

Una "equazione differenziale del 2° ordine" (e.d.s.o.) su E è un campo vettoriale $\bar{X} : TE \to TTE$ le "cui curve integrali" $I \to TE$ sono la derivata della propria proiezione su E.

Ogni campo vettoriale $\bar{X} \in \Im TE$ è caratterizzata dalle sue due componenti orizzontale e verticale, essendo $TTE = \nu TTE \oplus oTTE$. Allora diamo un teorema il quale, sostanzialmente, dice che $\bar{X}$ è una e.d.s.o. se e solo se la componente orizzontale è di un certo tipo fissato. Dunque, le e.d.s.o. sono caratterizzate dalla componente verticale $\Gamma \circ \bar{X}$, che può essere scelta arbitrariamente.

E' un procedimento che ricostruisce intrinsecamente le definizioni dell'Analisi Classica.

3.3.1. DEFINIZIONE Sia $I \subset R$.

Dicesi CURVA BASICA ogni curva $\mathcal{C}^\infty$

$$c : I \to TE$$

tale che

$$c = d(p_E \circ c).$$

In tal caso la curva $p_E \circ c : I \to E$ è detta la BASE di c $\underline{.}$

3.3.2. Caratterizziamo le curve basiche, più esplicitamente.

PROPOSIZIONE Sia $c : I \to TE$ una curva $\mathcal{C}^\infty$ e sia $\gamma \equiv p_E \circ c : I \to E$.

Allora c è una curva basica se e solo se

$$c = (\gamma, D\gamma).$$

D. Segue immediatamente dalla definizione 3.3.1. $\underline{.}$

3.3.3. Diamo, allora, l'importante nozione di e.d.s.o. .

Dicesi EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE su E ogni campo vettoriale

$$\bar{X} : TE \to TTE$$

le cui curve integrali sono curve basiche, ossia tale che $\bar{X}$ soddisfi la condizione

$$(c : I \to TE \ , \ dc = \bar{X} \circ c) \Rightarrow (c = d(p_E \circ c)) \quad .$$

In tal caso la curva

$$\gamma \equiv p_E \circ c : I \to E$$

dicesi UNA SOLUZIONE di $\bar{X}$.

3.3.4. Una caratterizzazione delle e.d.s.o. è data nel modo seguente.

TEOREMA Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ un campo vettoriale su TE.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) $\bar{X}$ è una e.d.s.o. .

b) Per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$\bar{X}(p,\bar{u}) = (p,\bar{u};\ \bar{u},\ \bar{y}) \quad , \text{ con } \ \bar{y} = \bar{y}(p,\bar{u}) \in \bar{E} \quad .$$

D. a) $\Rightarrow$ b) .

Se $(p,\bar{u}) \in TE$, esiste una curva integrale $c : I \to TE$ di $\bar{X}$, tale che

$$c(\theta) = (p,\bar{u}) \quad , \text{ con } \ \theta \in I \quad .$$

Allora, è

$$c(\theta) = d(p_E \circ c)(\theta) \equiv d\gamma(\theta) = (\gamma(\theta)\ ,\ D\gamma\ (\theta)) = (p,\bar{u})$$

e quindi

$$\bar{X}(p,\bar{u}) = \bar{X}(c(\theta)) = (\bar{X} \circ c)\ (\theta) = dc(\theta) = (\gamma(\theta),\ D\gamma(\theta);\ D\gamma\ (\theta),\ D^2\gamma\ (\theta)) =$$

$$= (p,\bar{u};\ \bar{u},\bar{y})$$

avendo posto $\bar{y} \equiv D^2\gamma(\theta)$.

b) $\Rightarrow$ a).

Sia $c : I \to TE$ una curva integrale $\mathcal{C}^\infty$ di $\bar{X}$. Posto

$$\gamma \equiv p_E \circ c \qquad , \quad \tilde{c} \equiv \pi^2 \circ c : I \to \bar{E}$$

allora, è

$$(\ \gamma,\ \tilde{c}\ ;\ \tilde{c}\ ,\ \pi^4 \circ \bar{X} \circ c) = \bar{X} \circ c = c' = (\gamma\ ,\ \tilde{c}\ ,\ D\gamma\ ,\ D\ \tilde{c}\ )$$

e quindi

$$\tilde{c} = D\gamma$$

da cui

$$c = (\gamma,\ D\gamma) \equiv d\gamma \equiv d(p_E \circ c) \quad .$$

Dunque, $\bar{X}$ è una e.d.s.o. $\underline{.}$

3.3.5. Tenendo presente il precedente teorema, è possibile caratterizzare una e.d.s.o. in altri modi: uno di questi è suggerito dal seguente teorema.

TEOREMA Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ un campo vettoriale su TE.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) $\bar{X}$ è una e.d.s.o., ossia è

$$\bar{X}(p,\bar{u}) = (p,\bar{u};\ \bar{u},\ \bar{y}(p,\bar{u})) \qquad , \forall\ (p,\bar{u}) \in TE\ .$$

b) $Tp_E \circ \bar{X} = id_{TE}$.

c) $s \circ \bar{X} = \bar{X}$

dove s è l'involuzione canonica

$$s : TTE \to TTE$$

data da $$s : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{v};\bar{u},\bar{w}) \qquad .$$

d) $\nu \circ \bar{X} = \bar{V}$

dove ν è l'endomorfismo canonico

$$\nu : TTE \to \nu TTE$$

dato da $$\nu : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{v})$$

e $\bar{V}$ è il campo vettoriale di Liouville

$$\bar{V} : TE \to TTE$$

dato da $$\bar{V} : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{u}) \qquad .$$

D. Infatti, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

b) $(Tp_E \circ \bar{X})(p,\bar{u}) = Tp_E(p,\bar{u};\bar{u},\bar{y}(p,\bar{u})) = (p,\bar{u}) \equiv id_{TE}\ (p,\bar{u})$.

c) $(s \circ \bar{X})(p,\bar{u}) = s(p,\bar{u};\ \bar{u},\bar{y}(p,\bar{u})) = (p,\bar{u};\bar{u},\bar{y}(p,\bar{u})) \equiv \bar{X}(p,\bar{u})$.

d) $(\nu \circ \bar{X})(p,\bar{u}) = \nu(p,\bar{u};\ \bar{u},\bar{y}(p,\bar{u})) = (p,\bar{u};\bar{o},\bar{u}) \equiv \bar{V}(p,\bar{u})$ $\underline{\cdot}$

3.3.6. Caratterizziamo ora una soluzione di una e.d.s.o. .

TEOREMA Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ una e.d.s.o. . Sia $\gamma : I \to E$ una curva $\mathcal{C}^\infty$.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) γ è una soluzione di $\bar{X}$.

b) E'

$$d^2\gamma = \bar{X} \circ d\gamma$$

o equivalentemente

$$D^2\gamma = (\Gamma \circ \bar{X} \circ d\gamma)^\ell$$

dove Γ è la connessione affine

$$\Gamma : TTE \to \nu TTE$$

data da $\qquad \Gamma : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w})$.

D. a) $\Rightarrow$ b) .

Se γ è una soluzione di $\bar{X}$, è

$$\gamma = p_E \circ c \quad ,$$

dove $c : I \to TE$ è una curva integrale di $\bar{X}$, ossia è

$$d\gamma = d(p_E \circ c) = c$$

e quindi

$$d^2\gamma = dc \quad .$$

b) $\Rightarrow$ a).

Bisogna dimostrare che è

$$\gamma = p_E \circ c \quad .$$

Intanto, per ipotesi, è

$$d^2\gamma = dc \ ,$$

dove $c = d(p_E \circ c)$ è una curva integrale di $\bar{X}$. Allora, è

$$d^2\gamma = dc = d(d(p_E \circ c)\ ) = d^2(p_E \circ c\ )$$

e quindi abbiamo

$$\gamma = P_E \circ c \qquad \doteq$$

Dunque, una e.d.s.o. è caratterizzata dalla sua componente verticale $\Gamma \circ \bar{X}$.

3.3.7. Possiamo considerare,allora, l'e.d.s.o. privilegiata, la cui componente verticale è nulla.

DEFINIZIONE

Dicesi EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE GEODETICA su E l'unico campo vettoriale $\mathcal{C}^\infty$

$$\bar{X}_0 : TE \to TTE$$

dato da $$\bar{X}_0 : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{u},\bar{o}) \quad ,$$

o, equivalentemente, l'unico campo vettoriale $\bar{X}_0$ tale che $\Gamma \circ \bar{X}_0 = \bar{o}$ $\doteq$

Allora, le soluzioni di $\bar{X}_o$ sono gli isomorfismi di spazi affini, ossia sono del tipo

$$\gamma(\lambda)= p_o+ \lambda\bar{v} \quad , \text{con} \quad p_o \in E, \; \bar{v} \in \bar{E} \quad .$$

3.3.8. DEFINIZIONE Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ una e.d.s.o. .

Dicesi INTEGRALE PRIMO di $\bar{X}$ ogni funzione $\mathcal{C}^\infty$

$$f : TE \to \mathbb{R}$$

tale che, per ogni curva integrale c di $\bar{X}$ è

$$D(f \circ c) = o \quad \underline{.}$$

3.3.9. Possiamo caratterizzare gli integrali primi in termini di soluzioni, anziché di curve integrali.

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ una e.d.s.o. . Sia $f : TE \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$.

Allora, f è un integrale di $\bar{X}$ se e solo se per ogni soluzione γ di $\bar{X}$ è

$$D(f \circ d\gamma)= o \quad \underline{.}$$

3.3.10. Caratterizziamo, infine, gli integrali primi mediante $\bar{X}$, direttamente.

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ una e.d.s.o. . Sia $f : TE \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$. Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) f è integrale primo di $\bar{X}$.

b) E'

$$< df,\bar{X}>= o$$

D. a)$\Leftrightarrow$ b) .

Sia $(p,\bar{u}) \in TE$ e sia $c : I \to TE$ una curva integrale di $\bar{X}$ tale che

$$c(\lambda) = (p,\bar{u}) \; .$$

Allora, per la definizione di e.d.s.o., è

$$<df,\bar{X}>(p,\bar{u}) \equiv D(f \circ c)(\lambda) \quad \underline{.}$$

0 INTRODUZIONE

Finora l'oggetto principale del nostro lavoro è stata la nozione di spazio affine E, di dimensione finita.

Ora, introduciamo la nuova struttura di "spazio affine euclideo", ottenuta fissando in $\bar{E}$ una moltiplicazione scalare.

Questo nuovo concetto è fondamentale, costituendo una tappa importante per la costruzione di un modello matematico dello spazio fisico, cioé, per una formulazione assiomatica della Geometria Euclidea.

Questa nuova struttura induce, in modo naturale, gli isomorfismi tra $\bar{E}^*$ ed $\bar{E}$, permettendo, così, l'identificazione degli elementi di $\bar{E}^*$ con elementi del duale di $\bar{E}$. Allora, è possibile definire l'isomorfismo di "Legendre" tra gli spazi TE e T^*E.

Tale applicazione è un isomorfismo di fibrato, ossia induce una biiezione tra le basi ed un isomorfismo tra le fibre.

La metrica induce anche un isomorfismo tra il fibrato dei vettori verticali e quello dei covettori orizzontali.

Si potrebbero definire altri isomorfismi, ma non sarebbero generalizzabili al caso delle varietà differenziabili.

In questo capitolo definiamo,anche, altre applicazioni importanti (per esempio, la "funzione metrica", la"co-funzione metrica", il "differenziale verticale", ...).

In Meccanica, la funzione metrica assume il ruolo di "energia cinetica", mentre l'isomorfismo di Legendre stabilisce l'equivalenza tra l'espressione di moto sullo spazio delle "fasi" (equazioni di Lagrange) e delle "cofasi" (equazioni di Hamilton).

Tutte le nozioni qui introdotte sulla metrica sono facilmente generalizzabili alle varietà differenziabili.

1 METRICA

0 Sia E uno spazio affine, di dimensione finita.

In questo paragrafo, introduciamo la nuova struttura di "spazio affine euclideo" ottenuta fissando in $\bar{E}$ una moltiplicazione scalare $\underline{g}$, ossia un tensore simmetrico non degenere, del 2° ordine .

Dopo aver ricordato alcune nozioni introdotte nel capitolo o, definiamo l'importante "isomorfismo di Legendre".

Tale applicazione viene trasportata, mediante l'applicazione tangente, sugli spazi affini TTE e $TT^{*}E$.

La metrica induce anche gli isomorfismi $\underset{\sim}{g}$ e $\tilde{g}$ tra lo spazio verticale νTTE e lo spazio orizzontale $oT^{*}TE$, l'uno inverso dell'altro.

Tali applicazioni si estendono, dunque, alle varietà differenziabili.

Definiamo poi la "funzione metrica" $g : TE \to \mathbb{R}$ la quale, in Meccanica, assume il ruolo di "energia cinetica".

In Meccanica, invece, l'isomorfismo di Legendre stabilisce l'equivalenza tra lo spazio delle "fasi" (equazioni di Lagrange) e delle "cofasi" (equazioni di Hamilton).

La funzione metrica g permette di definire il suo "differenziale verticale" $d_{v}g$.

Diamo poi una proposizione che sarà importante in seguito, in quanto permetterà di esprimere in coordinate la connessione affine Γ , mediante la metrica. Tale proposizione diventa, nel caso delle varietà differenziabili, la definizione di "connessione(riemanniana o) metrica".

Precisiamo infine, conformemente alle nuove notazioni, l'isomorfismo di Hodge che mette in relazione i volumi dei sottospazi di dimensione p di E con i volumi dei sottospazi ortogonali di dimensione $n-p$, con $p < n$, (se $\dim E = n$) .

4.1.1. DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO AFFINE EUCLIDEO ogni coppia

$$(E, \underline{g})$$

dove

- E è uno spazio affine, di dimensione finita .
- $\underline{g} \in \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$ è un tensore simmetrico non degenere, del 2° ordine .

Si dice che lo spazio affine è PROPRIAMENTE EUCLIDEO se $\underline{g}$ è definita positiva .

D'ora in poi, scriveremo E al posto di $(E,\underline{g})$, se non ci sarà pericolo di confusione.

Sia, dunque, E uno spazio affine euclideo, di dimensione finita.

Ricordiamo alcune nozioni introdotte all'inizio.

4.1.2. Il tensore

$$\underline{g} \in \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$$

è detto TENSORE METRICO (COVARIANTE) .

Esso è identificato alla forma bilineare $\underline{g} \in L^2(E) \simeq E^* \otimes E^*$, data da

$$\underline{g}(\bar{u},\bar{v}) \equiv \bar{u} \cdot \bar{v}, \qquad \forall\ \bar{u},\bar{v} \in \bar{E} \quad .$$

4.1.3. Il tensore

$$\bar{g} \in \bar{E} \otimes \bar{E}$$

dato da $\bar{g}(\underline{u},\underline{v}) \equiv \underline{u} \cdot \underline{v} \quad , \qquad \forall\ \underline{u},\underline{v} \in \bar{E}^* \ ,$

è detto TENSORE METRICO (CONTROVARIANTE) .

4.1.4. Il tensore metrico induce gli isomorfismi

1) $\quad {}'\underline{g} : \bar{E} \to \bar{E}^*$

dato da $\quad {}'\underline{g} : \bar{x} \mapsto \underline{x}$

dove

$$\langle \underline{x},\bar{v}\rangle \equiv \bar{x} \cdot \bar{v} \quad , \qquad \forall\ \bar{v} \in \bar{E} \quad .$$

2) $\quad {}'\bar{g} : \bar{E}^* \to \bar{E}$

dato da

$${}'\bar{g} : \underline{x} \mapsto \bar{x}$$

dove

$$\langle \bar{x},\underline{\nu}\rangle \equiv \underline{x} \cdot \underline{\nu} \quad , \qquad \forall\ \underline{\nu} \in \bar{E}^* \quad .$$

Dunque, è

$$({}'\underline{g})^{-1} = {}'\bar{g} \quad .$$

I tensori metrici controvariante e covariante sono legati tra loro dalla relazione

$$\bar{g} = T({}'\underline{g}^{-1},{}'\underline{g}^{-1})(\underline{g}) \quad .$$

4.1.5. DEFINIZIONE

Dicesi CAMPO TENSORIALE METRICO LIBERO COVARIANTE (risp. CONTROVARIANTE) l'applicazione costante (indicata con lo stesso simbolo)

$$\underline{g} : E \to \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$$

data da $\quad \underline{g} : p \mapsto \underline{g}$

(risp. $\quad \bar{g} : E \to \bar{E} \otimes \bar{E}$

data da $\quad \bar{g} : p \mapsto \bar{g} \quad$).

Dicesi CAMPO TENSORIALE METRICO APPLICATO COVARIANTE (risp. CONTROVARIANTE) l'applicazione (indicata con lo stesso simbolo)

$$\underline{g} : E \to T_2 E$$

data da $\quad \underline{g} : p \mapsto (p, \underline{g})$

(risp. $\quad \bar{g} : E \to T^2 E$

data da $\quad \bar{g} : p \mapsto (p, \bar{g}) \quad$).

4.1.6. Dopo aver ricordato alcune nozioni, introduciamo l'importante "isomorfismo di Legendre".

DEFINIZIONE

Dicesi ISOMORFISMO DI LEGENDRE l'applicazione

$$\hat{g} : TE \to T^* E$$

data da $\quad \hat{g} : (p, \bar{u}) \mapsto (p, \underline{u})$

dove

$$\underline{u} \equiv {}'\underline{g}(\bar{u}) \quad .$$

Dunque, tale isomorfismo è una estensione di $'\underline{g}$. Tale applicazione è un isomorfismo di fibrati, ossia induce una biiezione tra le basi ed un'isomorfismo tra le fibre.

L'isomorfismo di Legendre viene trasportato, mediante l'applicazione tangente, agli spazi affini TTE e TT^*E. Dunque, abbiamo l'applicazione

$$T\hat{g}: TTE \to TT^*E$$

data da
$$T\hat{g}: (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\underline{u};\bar{v},\underline{w}) \; .$$

4.1.7. La metrica induce anche un isomorfismo tra il fibrato dei vettori verticali e quello dei covettori orizzontali. Altri isomorfismi analoghi potrebbero essere definiti, ma non sarebbero generalizzabili al caso delle varietà differenziabili.

DEFINIZIONE

Indichiamo con $\underset{\sim}{g}$ l'applicazione

$$\underset{\sim}{g} : \nu TTE \to oT^*TE$$

data da
$$\underset{\sim}{g} : (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\, \underline{w},\underline{o}) \; .$$

Indichiamo con $\tilde{g}$ l'applicazione inversa

$$\tilde{g} : o\,T^*TE \to \nu TTE$$

data da
$$\tilde{g} : (p,\bar{u};\, \underline{v},\underline{o}) \mapsto (p,\bar{u};\, \bar{o},\bar{v}) \; .$$

4.1.8. Introduciamo ora la " funzione metrica" g la quale, in Meccanica, assume il ruolo di "energia cinetica".

DEFINIZIONE

Dicesi FUNZIONE METRICA l'applicazione differenziabile

$$g : TE \to \mathbb{R}$$

data da
$$g : (p,\bar{u}) \mapsto \frac{1}{2}\,\underline{g}\,(p)(\bar{u},\bar{u}) \equiv \frac{1}{2}\,\bar{u}\cdot\bar{u} \quad .$$

Dicesi CO-FUNZIONE METRICA l'applicazione differenziabile

$$g^{*} : T^{*}E \to \mathbb{R}$$

data da
$$g^{*} : (p,\underline{u}) \mapsto \frac{1}{2}\,\bar{g}(p)(\underline{u},\underline{u}) \equiv \frac{1}{2}\,\underline{u}\cdot\underline{u} \quad .$$

Dunque, è
$$g^{*} = g \circ \hat{g}^{-1}$$
$$g = g^{*} \circ \hat{g} \quad .$$

Si noti che è
$$\dot{g}\,(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \bar{u}\cdot\bar{w} \quad , \forall\,(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE \; .$$

4.1.9. DEFINIZIONE Sia $g : TE \to \mathbb{R}$ la funzione metrica.

Dicesi DIFFERENZIALE VERTICALE di g l'applicazione

$$d_V g : TE \to o\, T^{*}TE$$

data da
$$d_V g : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\underline{u},o) \quad .$$

4.1.10. Le precedenti applicazioni sono legate tra loro mediante i seguenti diagrammi .

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& TE & \\
\nu TTE \arrow[ur, "p_{TE}"] \arrow[rr, dashed, "\underset{\sim}{g}"] \arrow[d, "\Pi"'] & & oT^{*}TE \arrow[ul, "q_{TE}"'] \arrow[d, "\Pi"] \\
TE \arrow[rr, "\hat{g}"] \arrow[dr, "p_E"'] & & T^{*}E \arrow[dl, "q_E"] \\
& E &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& TE \arrow[dl, "\bar{V}"'] \arrow[dr, "d_V g"] & \\
\nu TTE \arrow[rr, "g"', "\underset{\sim}{g}"] \arrow[dr, "\dot{g}"'] & & oT^{*}TE \arrow[dl, "<, >"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

4.1.11. La seguente proposizione sarà importante perché permetterà di esprimere, in coordinate, la connessione affine Γ tramite la metrica. Inoltre, questa proposizione diventa, nel caso delle varietà differenziabili, la definizione di "connessione (riemanniana o) metrica".

PROPOSIZIONE

E'

1) $D\underline{g} = o$.

2) $\dot{g} \circ \urcorner = o$,

dove $\urcorner$ è l'applicazione

$$\urcorner : TTE \to oTTE$$

data da $$\urcorner : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{v},\bar{o}) \quad .$$

3) $\dot{g} \circ \Gamma = \dot{g}$,

dove Γ è la connessione affine

$$\Gamma : TTE \to \nu TTE$$

data da

$$\Gamma : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \quad .$$

D.

1) Ovvia, essendo $\underline{g}$ costante.

2) $(\dot{g} \circ \urcorner)(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \dot{g}(p,\bar{u};\bar{v},\bar{o}) = \bar{u} \cdot \bar{o} = o \quad , \forall(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE.$

3) $(\dot{g} \circ \Gamma)(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \dot{g}(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{w} = \dot{g}(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \quad , \quad \forall(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE$

4.1.12. Continuando il riassunto di alcune nozioni introdotte all'inizio, conformemente alle nuove notazioni, ricordiamo che indichiamo con

$$\underline{\eta} \in \Lambda^n \bar{E}^*$$

la FORMA VOLUME UNITARIA (se dim E = n) .

4.1.13. Diamo, allora, la seguente definizione .

DEFINIZIONE

Dicesi CAMPO TENSORIALE LIBERO DELLE FORME VOLUME UNITARIE l'applicazione costante (indicata ancora con lo stesso simbolo)

$$\underline{\eta} : E \to \Lambda^n \bar{E}^*$$

data da $\qquad \underline{\eta} : p \mapsto \underline{\eta} \qquad .$

Dicesi CAMPO TENSORIALE APPLICATO DELLE FORME VOLUME UNITARIE l'applicazione (indicata ancora con lo stesso simbolo)

$$\underline{\eta} : E \to \Lambda_n E$$

data da $\qquad \underline{\eta} : p \mapsto (p,\underline{\eta}) \qquad .$

4.1.14. Infine, indichiamo ancora con $*$ l'applicazione

$$* : \Lambda_p E \to \Lambda_{n-p} E$$

data da
$$* : (p,\underline{t}) \mapsto (p, i_{\bar{t}}\, \underline{\eta})$$

detta ISOMORFISMO DI HODGE. Tale isomorfismo gode della proprietà

$$** \equiv (-1)^{p(n-p)} \quad , \text{ con } \; p < n \; .$$

Inoltre, tale isomorfismo induce delle tecniche di calcolo, indispensabili per poter definire alcuni operatori differenziali (per esempio il "rotore", la "divergenza", ecc...) .

Ricordiamo anche la forma volume unitaria

$$\bar{\eta} \in \Lambda^n \bar{E}$$

mediante la quale si definiscono i relativi campi delle forme volume unitarie liberi ed applicati.

0 INTRODUZIONE

I "sistemi di coordinate" servono per interpretare uno spazio affine come uno spazio numerico: essi svolgono, in esso, il compito svolto dalle basi in uno spazio vettoriale.

Sia, dunque, E uno spazio affine di dimensione n. Un sistema di coordinate

$$x : E \to \mathbb{R}^n$$

su E è un "omeomorfismo", ossia un'applicazione biiettiva e continua, insieme all'inversa x^{-1}. Sostanzialmente, ad ogni punto di E, x fa corrispondere un'unica n-pla di numeri reali e viceversa. Il fatto che tale applicazione debba essere un omeomorfismo, serve a garantire che la traduzione in coordinate "rispetti" tutte le proprietà topologiche dello spazio (aperti, ecc...).

Su E è possibile definire, mediante x, le "funzioni coordinate"

$$x^1 : E \to \mathbb{R}, \ldots\ldots, \quad x^n : E \to \mathbb{R}$$

e le "curve coordinate"

$$x_1 : \mathbb{R} \times E \to E, \ \ldots\ldots, \ x_n : \mathbb{R} \times E \to E$$

in numero pari alla dimensione di E. Si osservi che, assegnare il sistema di coordinate x è equivalente ad assegnare la n-pla delle funzioni coordinate $(x^1,\ldots,x^n)$. In base a ciò si scrive anche

$$x \equiv (x^1,\ldots,x^n)$$

mettendo così in risalto l'equivalenza tra sistema di coordinate e fun zioni coordinate.

Inoltre, se x è differenziabile(e quindi anche le funzioni e le curve coordinate lo sono), allora esso induce, per ogni punto p dello spazio, una base

$$B \equiv \{ \delta x_1(p),\ldots,\delta x_n(p)\}$$

per i vettori di $\bar{E}$ e una base

$$B^* \equiv \{Dx^1(p),\ldots,Dx^n(p)\}$$

per i vettori di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

Allora, applicando le solite regole algebriche relative a tali basi, possiamo rivedere in termini matriciali, per comodità del lettore, tutte quelle nozioni che sinora sono state espresse con basi qualsiasi.

In particolare, possiamo dare la rappresentazione matriciale delle derivate rispetto alle basi B e B^*. Le matrici di rappresentazione dei tensori, così introdotte, acquistano talvolta un interessante significato legato al sistema di coordinate. Per esempio, le "derivate parziali" di una funzione risultano essere proprio gli elementi di matrice della sua derivata.

E' possibile estendere, in modo naturale, il sistema di coordinate $x \equiv (x^1, \ldots,x^n)$ allo spazio affine TE, stabilendo una biiezione tra esso e $\mathbb{R}^{2n}$. Riusciamo in questo scopo, considerando l'applicazione tangente di x. In tal modo, ad ogni elemento $(p,\bar{u})$ di TE, si fa corrispondere le n coordinate $x(p) \equiv (x^1(p),\ldots,x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ e le n componenti secondo la base B, indotta da x.

In modo naturale si estende x, anche, allo spazio affine T^*E, mediante l'applicazione cotangente di x.

Si osservi che su TE e T^*E vi sono anche sistemi di coordinate non provenienti da sistemi su E.

Dunque, possiamo esprimere in coordinate le equazioni differenziali del 1° ordine, essendo, queste, dei campi vettoriali su E.

Se x è differenziabile due volte, è interessante lo studio delle derivate degli elementi di B e B^*. Infatti, vedremo che tali derivate sono espresse mediante i "simboli di Christoffel " i quali risulteranno nulli se x è un sistema di coordinate cartesiano, in quanto tale sistema induce delle basi (costanti punto per punto).

I precedenti calcoli permetteranno di esprimere, mediante i sistemi di coordinate, tutte le nozioni date sinora in modo intrinseco.

Ora, se x è differenziabile due volte, è possibile estendere, in modo naturale, il sistema di coordinate x ai secondi spazi tangenti TTE e TT^*E, mediante le 2-applicazioni tangenti TTx e TT^*x, rispettivamente.

Ancora, in modo naturale, si estende x ai secondi spazi cotangenti T^*TE e T^*T^*E, mediante le 2-applicazioni cotangenti T^*Tx e T^*T^*x, rispettivamente.

Si osservi che anche sui secondi spazi tangenti e cotangenti di E vi sono sistemi di coordinate non provenienti da sistemi su E. Sono anche interessanti i sistemi di coordinate indotti da x, sugli spazi νTTE e σT^*TE.

Dunque, possiamo esprimere in coordinate le equazioni differenziali del 2° ordine, essendo, queste, dei campi vettoriali su TE.

Se E è uno spazio affine euclideo, allora possiamo applicare anche su $\underline{g}$ le solite regole algebriche con le basi B e B^*, indotte da x. Dunque, si possono vedere, in termini matriciali, tutte le nozioni del 4° capitolo, espresse mediante basi qualsiasi di $\bar{E}$ e $\bar{E}^*$.

Le matrici (g_{ij}) e (g^{hk}), che sono l'una inversa dell'altra, sono molto interessanti, in quanto servono per l'espressione e per il calcolo in coordinate dei campi $\underline{g}$ e $\bar{g}$, della funzione metrica g e della co-funzione metrica g^*, delle applicazioni $\underset{\sim}{g}$ e $\tilde{g}$, ecc.... .

Si osservi che la connessione affine Γ non dipende dalla metrica (è definita anche se E non è euclideo), ma solo dalla struttura affine, anche se la sua espressione in coordinate, può essere data in modo tale da far comparire le matrici (g_{ij}) e (g^{hk}). Ciò dipende dal fatto che i simboli di Christoffel possono essere anche espressi tramite la derivata delle componenti di un qualsiasi campo tensoriale costante del 2° ordine, simmetrico e non degenere.

1 SISTEMI DI COORDINATE SU UNO SPAZIO AFFINE

0 I "sistemi di coordinate" servono per interpretare uno spazio affine come uno spazio numerico. Essi svolgono, in esso, il ruolo svolto dalle basi in uno spazio vettoriale.

In generale, sono definiti su aperti dello spazio affine ed hanno come immagini aperti di uno spazio numerico. Però, per semplicità di notazioni, considereremo solo sistemi di coordinate definiti su tutto lo spazio e aventi come immagini lo spazio numerico. La facile estensione al caso più generale è lasciata al lettore.

Concludiamo il paragrafo con le importanti nozioni di funzioni e di curve coordinate su uno spazio affine.

Sia, dunque, E uno spazio affine di dimensione n.

5.1.1. DEFINIZIONE

Dicesi SISTEMA DI COORDINATE su E un omeomorfismo

$$x : E \to \mathbb{R}^n$$

ossia, un'applicazione biiettiva e continua, assieme all'inversa x^{-1}.

La biiettività garantisce la corrispondenza biunivoca tra punti e coordinate. Ossia, ad ogni punto p di E corrisponde un'unica n-pla $x(p)$ di numeri reali e viceversa.

Il fatto che tale applicazione debba essere un omeomorfismo, serve a garantire che la traduzione in coordinate "rispetti" tutte le proprietà topologiche dello spazio (aperti, ecc...).

Consideriamo, dunque, un sistema di coordinate $x : E \to \mathbb{R}^n$.

5.1.2. Diamo ora la nozione di "funzione coordinata" di x, semplicemente componendo x con una funzione coordinata naturale su $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE

Dicesi FUNZIONE COORDINATA I-MA di x l'applicazione

$$x^i \equiv \pi^i \circ x : E \to \mathbb{R}$$

data da

$$x^i : p \mapsto (\pi^i \circ x)(p)$$

(dove $\pi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è la i-ma funzione coordinata naturale (o i-ma proiezione) del prodotto $\mathbb{R}^n$) $\underline{.}$

Naturalmente, le funzioni coordinate di x sono n.

Se $p \in E$, gli n numeri $x^1(p),\dots,x^n(p)$ si dicono le "coordinate" di p.

Assegnare un sistema di coordinate è equivalente ad assegnare la n-pla delle funzioni coordinate. In base a ciò, si scrive anche

$$x \equiv (x^1,\dots,x^n)$$

mettendo, così, in risalto l'equivalenza tra sistema di coordinate e la n-pla delle funzioni coordinate. Dunque, il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{R} \\
E \arrow[r, "x"] \arrow[urr, "x^1"] \arrow[drr, "x^n"'] & \mathbb{R}^n \arrow[ur, "\pi^1"] \arrow[dr, "\pi^n"'] & \vdots \\
 & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Si osservi che le funzioni $x^1,\dots,x^n$ sono continue, perché sono continue l'applicazione x e le proiezioni $\pi^1,\dots,\pi^n$. Però la continuità di $x^1,\dots,x^n$ non garantisce la continuità di x.

5.1.3. Diamo ora la nozione di "curva coordinata" di E, semplicemente componendo x^{-1} con una curva coordinata naturale di $\mathbb{R}^n$. Tale nozione, in un certo senso, è "duale" alla precedente.

DEFINIZIONE Sia $p \in E$.

Dicesi CURVA COORDINATA J-MA, passante per p, di E l'applicazione

$$x_{jp} : \mathbb{R} \to E$$

data da
$$x_{jp} : \lambda \mapsto x^{-1}(x^1(p),\dots,x^j(p)+\lambda,\dots,x^n(p)) ,$$

ossia, data da

$$x_{jp} \equiv x^{-1} \circ c_{jp}$$

(dove $c_{jp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è la j-ma curva coordinata naturale di $\mathbb{R}^n$, passante per $x(p) = c_{jp}(o)$, data da

$$c_{jp}(\lambda) \equiv (x^1(p),\dots,x^j(p)+\lambda,\dots,x^n(p)) \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Il termine "passante per p" è giustificato dal fatto che per $\lambda = o$, è

$$x_{jp}(o) = x^{-1}(x^1(p),\dots,x^j(p),\dots,x^n(p)) = p \ .$$

Dunque, la j-ma curva coordinata passante per p assegna, ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il punto di E ottenuto bloccando tutte le coordinate, tranne la j-ma ed incrementando questa, di λ, a partire da $x^j(p)$.

Naturalmente, le curve coordinate, passanti per p, sono n.

Si noti che le curve $x_{1p},\dots,x_{np}$ sono continue, perché sono continue l'applicazione x^{-1} e le iniezioni $c_{1p},\dots,c_{np}$.

5.1.4. Se $c : \mathbb{R} \to E$ è una curva, si ponga

$$c^1 \equiv x^1 \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \dots, \qquad c^n \equiv x^n \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ .$$

Allora, la curva c è determinata dalle sue n "componenti" $c^1,\dots,c^n$.

Dunque, il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \arrow[r, "c"] \arrow[urr, "c^1"] \arrow[drr, "c^n"'] & E \arrow[ur, "x^1"] \arrow[dr, "x^n"'] & \vdots \\ & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

5.1.5. Se poi $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione, allora f è determinata dalla funzione

$$f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

essendo

$$f = (f \circ x^{-1}) \circ x .$$

Dunque, il seguente diagramma è commutativo .

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^n \arrow[dr, "f \circ x^{-1}"] & \\
E \arrow[ur, "x"] \arrow[rr, "f"] & & \mathbb{R} \\
 & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "x^{-1}"] \arrow[ur, "f \circ x^{-1}"'] &
\end{tikzcd} .$$

Abbiamo anche

$$f \circ c = (f \circ x^{-1}) \circ (x \circ c) = (f \circ x^{-1}) \circ (c^1,\dots,c^n) .$$

5.1.6. Possiamo dare una definizione più generale di curva coordinata.

DEFINIZIONE

Dicesi CURVA COORDINATA J-MA di E l'applicazione

$$x_j : \mathbb{R} \times E \to E$$

data da
$$x_j : (\lambda, p) \mapsto x_{jp}(\lambda) ,$$

ossia, data da

$$x_j \equiv x^{-1} \circ s_j \circ (id_{\mathbb{R}} \times x) : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \to E$$

(dove $s_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è l'applicazione data da

$$s_j(\lambda;\ \mu^1,\ldots,\mu^n) \equiv (\mu^1,\ldots,\mu^j+\lambda\ ,\ldots,\mu^n) \quad , \forall\ (\lambda;\mu^1,\ldots,\mu^n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \ \dot{-}$$

5.1.7. PROPOSIZIONE Sia $p \in E$.

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, è

$$(x^i \circ x_{jp})(\lambda) = x^i(p) + \lambda\delta^i_j \ .$$

D. Infatti, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, è

$$(x^i \circ x_{jp})(\lambda) = x^i(x^{-1}(x^1(p),\ldots,\ x^j(p) + \lambda,\ldots,x^n(p)\ ) =$$

$$= \pi^i(x(x^{-1}(x^1(p),\ldots,\ x^j(p) + \lambda,\ldots,x^n(p))\ )\ ) =$$

$$= x^i(p) + \lambda\delta^i_j \quad \dot{-}$$

5.1.8. DEFINIZIONE

Un sistema di coordinate $x : E \to \mathbb{R}^n$ si dice differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) se x e x^{-1} sono differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$) $\dot{-}$

5.1.9. Dunque, la seguente proposizione fa vedere che le funzioni e le curve coordinate di E sono differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$) .

PROPOSIZIONE Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) .

Allora le funzioni coordinate e le curve coordinate di E sono differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$) .

D. Infatti le funzioni coordinate o le curve coordinate sono ottenute componendo x o x^{-1} con applicazioni di classe $\mathcal{C}^\infty$. Allora il risultato segue dalla regola della catena $\underline{.}$

2 BASI INDOTTE DA UN SISTEMA DI COORDINATE

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n e sia $x \equiv (x^1,\ldots,x^n) : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E, differenziabile.

In questo paragrafo, facciamo vedere che, essendo x differenziabile (e quindi, per 5.1.7. lo sono anche le curve e le funzioni coordinate), esso induce, per ogni punto p di E, una base di $\bar{E}$ e una di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra. Più in generale, otteniamo una base per i campi di vettori e covettori su E.

Tali basi, generalmente, variano da punto a punto. Vedremo, nel capitolo successivo, che se x è un sistema di coordinate cartesiano, allora esse non dipendono dal punto di applicazione.

5.2.1. Le n funzioni coordinate

$$x^1 : E \to \mathbb{R}, \ldots, x^n : E \to \mathbb{R}$$

sono differenziabili. Dunque, possiamo considerare le loro derivate

$$Dx^1 : E \to \bar{E}^*, \ldots , Dx^n : E \to \bar{E}^*$$

e i loro differenziali

$$dx^1 : E \to T^*E , \ldots , dx^n : E \to T^*E$$

dati da $dx^1 : p \to (p,Dx^1(p)) , \ldots, dx^n: p \to (p,Dx^n(p))$.

Inoltre, le n curve coordinate

$$x_1 : \mathbb{R} \times E \to E \;, \; \ldots \;, \; x_n : \mathbb{R} \times E \to E$$

sono differenziabili. Possiamo, dunque, considerare le loro derivate

$$\delta x_1 : E \to \bar{E} \;, \; \ldots . \;, \; \delta x_n : E \to \bar{E}$$

date da $\quad \delta x_1 : p \to Dx_{1p}(o), \ldots, \delta x_n : p \to Dx_{np}(o)$

e i loro differenziali

$$\partial x_1 : E \to TE \;, \; \ldots \;, \; \partial x_n : E \to TE$$

dati da $\quad \partial x_1 : p \to (p, \delta x_1(p)), \ldots, \partial x_n : p \to (p, \delta x_n(p))$.

Abbiamo, così, n campi di vettori ed n campi di covettori liberi ed applicati su E.

5.2.2. Dimostriamo ora che, per ogni punto $p \in E$, gli n vettori $\delta x_1(p), \ldots, \delta x_n(p)$ e gli n covettori $Dx^1(p), \ldots, Dx^n(p)$ costituiscono, rispettivamente, una base di $\bar{E}$ e una di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

PROPOSIZIONE Sia $p \in E$.

Allora

$$B(p) \equiv \{\delta x_1(p), \ldots, \delta x_n(p)\} \quad e \quad B^*(p) \equiv \{Dx^1(p), \ldots, Dx^n(p)\}$$

sono basi di $\bar{E}$ e di $\bar{E}^*$, rispettivamente. Inoltre, l'una è la base duale dell'altra, ossia

$$\langle Dx^i(p) \;, \; \delta x_j(p) \rangle = \delta^i_j \qquad , \; \forall \; 1 \leq i,j \leq n \; .$$

D. Per la regola della catena, l'applicazione

$$x^i \circ x_{jp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

data da
$$x^i \circ x_{jp} : \lambda \to x^i(p) + \lambda\delta^i_j$$

è differenziabile ed è

$$< Dx^i(p) \ , \ \delta x_j(p) > \equiv < Dx^i(x_{jp}(o)) \ , \ Dx_{jp}(o) >= \delta^i_j \ .$$

Dimostriamo ora che gli n vettori $\delta x_1(p), \ldots, \delta x_n(p)$ di $\bar{E}$ e gli n covettori $Dx^1(p),\ldots,Dx^n(p)$ di $\bar{E}^*$ sono linearmente indipendenti.

Sia
$$\alpha^1(p)\ \delta x_1(p) + \ldots + \alpha^n(p)\delta x_n(p) = \bar{o} \qquad \text{con } \alpha^1(p),\ldots,\ \alpha^n(p) \in \mathbb{R} \ .$$

Allora, è

$$\alpha^i(p) =< Dx^i(p),\ \bar{o} > = o \qquad , \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n \ .$$

Sia
$$\beta_1(p)Dx^1(p) + \ldots + \beta_n(p)Dx^n(p) = \underline{o} \quad , \text{ con } \ \beta_1(p),\ldots,\ \beta_n(p) \in \mathbb{R}.$$

Allora è
$$\beta_j(p) =< \underline{o}\ ,\ \delta x_j(p) > = o \qquad , \qquad \forall\ 1 \leq j \leq n \ .$$

Dunque, $B(p)$ e $B^*(p)$ essendo costituiti da un numero di elementi indipendenti, pari alla dimensione di E, costituiscono una base di $\bar{E}$

e una base di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

Naturalmente, gli insiemi

$$B(p) \equiv \{\partial x_1(p),\ldots,\partial x_n(p)\} \quad e \quad B^*(p) \equiv \{ dx^1(p),\ldots, dx^n(p)\}$$

costituiscono una base per i vettori applicati di TE e una per i covettori applicati di T^*E, l'una duale dell'altra.

3 ESPRESSIONE IN COORDINATE DEI CAMPI TENSORIALI

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n e sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E, differenziabile.

Abbiamo visto che se x è differenziabile, esso induce, per ogni punto di E, una base per i vettori di $\bar{E}$ e una per i covettori di $\bar{E}^*$ l'una duale dell'altra.

Allora, è possibile esprimere, in coordinate, gli elementi di $\bar{E}$ e $\bar{E}^*$ mediante tali basi. In particolare, possiamo dare la rappresentazione matriciale delle derivate rispetto a queste basi. Le matrici di rappresentazione dei tensori, così introdotte, acquistano talvolta un interessante significato legato al sistema di coordinate. Per esempio, le "derivate parziali" di una funzione risultano essere proprio gli elementi di matrice della sua derivata.

Sia, dunque, $B(p) \equiv \{\delta x_1(p),\dots,\delta x_n(p)\}$ una base di $\bar{E}$ e $B^*(p) \equiv \{Dx^1(p),\dots,Dx^n(p)\}$ una base di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra. Indicheremo i campi liberi ed applicati con gli stessi simboli.

5.3.1. PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} : E \to \bar{E}$ un campo vettoriale libero su E e $\underline{X} : E \to \bar{E}^*$ un campo covettoriale libero su E.

Allora, per ogni $p \in E$, è

$$\bar{X}(p) = X^i(p)\,\delta x_i(p) \quad , \qquad \text{con } X^1(p),\dots,X^n(p) \in \mathbb{R},$$

$$\underline{X}(p) = X_i(p) Dx^i(p) \quad , \qquad \text{con } X_1(p),\dots,X_n(p) \in \mathbb{R},$$

dove

$$X^i(p) \equiv \langle Dx^i(p) \, , \, \bar{X}(p) \rangle$$

$$X_i(p) \equiv \langle \underline{X}(p), \, \delta x_i(p) \rangle \quad .$$

Scriviamo anche

$$\bar{X} = X^i \, \delta x_i \; ,$$

$$\underline{X} = X_i \, Dx^i \; .$$

Considerati i campi applicati $\bar{X} : E \to TE$ e $\underline{X} : E \to T^*E$ su E, abbiamo anche le seguenti espressioni

$$\bar{X} = X^i \partial x_i$$

$$\underline{X} = X_i dx^i \quad ,$$

dove

$$X^i \equiv \langle \, dx^i \, , \, \bar{X} \, \rangle \equiv \langle Dx^i \, , \, \bar{X} \, \rangle \, ,$$

$$X_i \equiv \langle \, \underline{X} \, , \, \partial x_i \, \rangle \equiv \langle \underline{X} \, , \, \delta x_i \, \rangle \quad \dot{-}$$

5.3.2. Dunque, l'espressione in coordinate di un'equazione differenziale del 1° ordine $\bar{X} : E \to TE$ su E, è

$$\bar{X} = X^i \partial x_i \quad .$$

Facciamo, ora, uno studio in coordinate delle applicazioni differenziabili più interessanti.

1) CASO $f : \mathbb{R} \to E$.

5.3.3. PROPOSIZIONE Sia f una curva differenziabile . Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) = p \in E$.

Allora, è

$$Df(\lambda) = Df^i(\lambda)\ \delta x_i(p)$$

ossia

$$Df = Df^i(\delta x_i \circ f)$$

D. Assegnare f equivale ad assegnare le n funzioni reali differenziabili (5.1.4.)

$$f^i \equiv x^i \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \ \forall\ 1 \leq i \leq n \ .$$

Allora, posto

$$Df(\lambda) = \alpha^i(\lambda)\delta x_i(p) \qquad , \qquad \text{con} \quad \alpha^1(\lambda), \ \ldots, \ \alpha^n(\lambda) \in \mathbb{R},$$

per la regola della catena, è

$$\alpha^i(\lambda) \equiv \langle Dx^i(p), Df(\lambda)\rangle = D(x^i \circ f)\ (\lambda) \equiv Df^i(\lambda) \ .$$

Abbiamo anche

$$df = Df^i(\partial x_i \circ f)$$

con

$$Df^i \equiv \langle dx^i, df \rangle \equiv \langle Dx^i, Df\rangle \quad .$$

5.3.4. Dunque, possiamo caratterizzare una curva integrale di una equazione differenziale del 1° ordine .

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} = X^i \partial x_i$ un'equazione differenziale del 1° ordine su E. Sia $c : \mathbb{R} \to E$ una curva differenziabile.

Allora c è una curva integrale di $\bar{X}$ se e solo se è

$$X^i \circ c = Dc^i \quad , \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n \quad \dot{-}$$

2) CASO $f : E \to \mathbb{R}$.

5.3.6. PROPOSIZIONE Sia f una funzione differenziabile.

Allora, per ogni $p \in E$, è

$$Df(p) = (\partial x_i .\ f)\ Dx^i(p) \quad ,$$

ossia

$$Df = (\partial x_i .\ f)\ Dx^i \ .$$

D. Infatti, posto

$$Df(p) = \beta_i(p) Dx^i(p) \quad , \text{ con } \beta_1(p), \ldots, \beta_n(p) \in \mathbb{R},$$

per la regola della catena, è

$$\beta_i(p) \equiv \langle Df(p), \delta x_i(p) \rangle = D(f \circ x_{ip})(o) \equiv (\partial x_i . f)(p) \quad \dot{-}$$

Abbiamo anche

$$df = (\partial x_i .\ f)\ dx^i$$

dove

$$(\partial x_i .\ f) \equiv \langle df, \partial x_i \rangle \equiv \langle Df, \delta x_i \rangle$$

5.3.5. Diamo, allora, la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Dicesi DERIVATA PARZIALE di f, rispetto alla i-ma curva coordinata di E, l'applicazione

$$(\partial x_i . f) : E \to \mathbb{R}$$

data da

$$(\partial x_i . f) : p \to D(f \circ x_{ip})(o) \qquad \doteq$$

Ossia, $(\partial x_i . f)$ è la derivata della funzione reale di una variabile reale ottenuta facendo variare in f solo la i-ma coordinata.

5.3.7. Possiamo ora caratterizzare un integrale primo di una equazione differenziale del 1° ordine.

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} = X^i \partial x_i$ un'equazione differenziale del 1° ordine su E. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) f è un integrale primo di $\bar{X}$.

b) E'

$$(\partial x_i . f)\, X^i = o \qquad , \forall\, 1 \leq i \leq n$$

D. a) $\Longleftrightarrow$ b).

E' $\langle df, \bar{X} \rangle = o$ $\quad f$ è un integrale 1° di $\bar{X}$;

inoltre:

$$\langle df, \bar{X} \rangle = \langle (\partial x_i . f) dx^i \quad , X^j \partial x_j \rangle = (\partial x_i . f)\, X^i \qquad .$$

5.3.8. Dalla regola della catena segue un interessante risultato.

PROPOSIZIONE Siano $c : \mathbb{R} \to E$ ed $f : E \to \mathbb{R}$ due applicazioni differenziabili.

Allora è

$$D(f \circ c) = (\partial x_i . f) \circ c Dc^i .$$

D. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $c(\lambda) \equiv p \in E$. E'

$$D(f \circ c)(\lambda) = Df(p) \circ Dc(\lambda) = (\partial x_i . f)(p) Dc^j(\lambda) \langle Dx^i(p) \quad , \quad \delta x_j(p) \rangle =$$

$$= (\partial x_i . f)(p) Dc^i(\lambda) \qquad \dot{-}$$

3) CASO $f : \mathbb{R} \times E \to E$.

5.3.9. PROPOSIZIONE Sia f un'applicazione differenziabile, tale che $f_o = id_E$.

Allora è

$$\delta f = (\delta f^i) \delta x_i ,$$

$$\bar{\partial} f = (\delta f^i) \partial x_i ,$$

dove

$$\delta f^i \equiv \langle Dx^i, \delta f\rangle = \langle dx^i, \partial f \rangle$$.

5.3.10. I casi precedenti rientrano come studio, più generale, di una applicazione differenziabile tra due spazi affini di dimensioni finite.

Siano dunque

- E, F due spazi affini di dimensioni n, m, rispettivamente;
- $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile;
- $y \equiv (y^1,\dots,y^m) : F \to \mathbb{R}^m$ un sistema di coordinate su F, differenziabile;
- $p \in E$, $f(p) = q \in F$;
- $B(q) \equiv \{\delta y_1(q),\dots,\delta y_m(q)\}$, $B^*(q) \equiv \{Dy^1(q),\dots,Dy^m(q)\}$ due basi, rispettivamente, di $\bar{F}$ e $\bar{F}^*$, l'una duale dell'altra.

Allora sussiste la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE

Gli insiemi

$$B^*(p) \otimes B(q) \equiv \{Dx^1(p) \otimes \delta y_1(q),\dots,Dx^j(p) \otimes \delta y_i(q),\dots,Dx^n(p) \otimes \delta y_m(q)\}$$

$$B(p) \otimes B^*(q) \equiv \{\delta x_1(p) \otimes Dy^1(q) ,\dots\dots\dots, \delta x_j(p) \otimes Dy^i(q),\dots,\delta x_n(p) \otimes Dy^m(q)\}$$

costituiscono una base di $\bar{E}^* \otimes \bar{F}$ e di $\bar{E} \otimes \bar{F}^*$, l'una duale dell'altra.

Allora è

$$Df(p) = (\partial x_j . \ f^i)(p)\ Dx^j(p) \otimes \delta y_i(q)$$

dove si è posto

- $f^i \equiv y^i \circ f : E \to R$,

- $(\partial x_j . \ f^i)(p) = < Dy^i(q) \ , \ Df(p)\ (\delta x_j(p))>$.

Sinteticamente, scriviamo anche

$$Df = (\partial x_j . \ f^i)\ Dx^j \otimes (\delta y_j \circ f) \qquad \dot{-}$$

4 SISTEMI DI COORDINATE INDOTTI SUGLI SPAZI TANGENTI E COTANGENTI

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n. Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E che, per semplicità, supporremo di classe $\mathscr{C}^\infty$.

E' possibile estendere, in modo naturale, tale sistema di coordinate allo spazio affine TE, stabilendo una biiezione tra esso e $\mathbb{R}^{2n}$. Riusciamo nel nostro scopo considerando l'applicazione tangente di x. In tal modo, ad ogni elemento $(p,\bar{u})$ di TE, si fa corrispondere le n coordinate $x(p) \equiv (x^1(p),\dots,x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ e le n componenti secondo la base $B(p) \equiv \{\delta x_1(p),\dots,\delta x_n(p)\}$ di $\bar{E}$, indotta da x.

Allo stesso modo, tramite l'applicazione cotangente di x, si dà su T^*E un sistema di coordinate indotto da x.

Si osservi che su TE e T^*E vi sono anche sistemi di coordinate non provenienti da sistemi su E.

5.4.1. PROPOSIZIONE

L'applicazione tangente di x

$$Tx : TE \to \mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

data da
$$Tx : (p,\bar{u}) \mapsto (x(p), \langle Dx(p),\bar{u}\rangle)$$

è un sistema di coordinate su TE di classe $\mathscr{C}^\infty$.

D. L'applicazione Tx è una biiezione, la cui inversa è $T(x^{-1})$. Inoltre, Tx e $T(x^{-1})$ sono di classe $\mathscr{C}^\infty$ $\underline{\cdot}$

Si noti che la prima n-pla caratterizza univocamente il punto $p \in E$ di applicazione, tramite x, mentre la seconda caratterizza univocamente il vettore $\bar{u} \in \bar{E}$.

Studiamo le funzioni coordinate di Tx.

5.4.2 . Ricordiamo che, dato il fibrato tangente $\tau E \equiv (TE, p_E, E)$ di E, il rilevamento ($\check{x} : TE \to \mathbb{R}^n$) di x secondo p_E è dato da

$$\check{x}(p,\bar{u}) \equiv x(p) \qquad , \text{ per ogni } (p,\bar{u}) \in TE.$$

Inoltre l'applicazione $\dot{x} : TE \to \mathbb{R}^n$ è data da

$$\dot{x}(p,\bar{u}) \equiv \langle Dx(p),\bar{u} \rangle \qquad , \text{ per ogni } (p,\bar{u}) \in TE .$$

5.4.3. Dunque, abbiamo la seguente proposizione .

PROPOSIZIONE

E'

$$Tx = (\check{x} , \dot{x}) .$$

Più precisamente è

$$Tx \equiv ((Tx)^1, \ldots,(Tx)^n; (Tx)^{\bar{1}},\ldots,(Tx)^{\bar{n}}) = (\check{x}^1,\ldots,\check{x}^n; \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) ,$$

mettendo così in risalto l'equivalenza tra il sistema di coordinate su TE e la 2n-pla $(\check{x}^1,\ldots,\check{x}^n; \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$.

Allora le funzioni coordinate su TE sono le 2n applicazioni differenziabili

$$(Tx)^i \equiv \pi^i \circ p^1 \circ Tx : TE \to \mathbb{R}$$

$$(Tx)^{\bar{i}} \equiv (Tx)^{n+i} \equiv \pi^i \circ p^2 \circ Tx : TE \to \mathbb{R} \quad ,$$

$\forall\ 1 \leq i \leq n$,

date da $\qquad (Tx)^i(p,\bar{u}) = x^i(p)$

$$(Tx)^{\bar{i}}(p,\bar{u}) = \langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle \quad ,$$

per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$

(dove $p^1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $p^2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono le proiezioni date da

$$p^1(\lambda\ ,\mu\ ) \equiv \lambda \quad , \quad p^2(\lambda,\mu) \equiv \mu \quad , \forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ ) .$$

D. Infatti, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$(Tx)^i(p,\bar{u}) \equiv (\pi^i \circ p^1 \circ Tx)(p,\bar{u}) = (\pi^i \circ x)(p) \equiv x^i(p)$$

$$(Tx)^{\bar{i}}(p,\bar{u}) \equiv (\pi^i \circ p^2 \circ Tx)(p,\bar{u}) = \pi^i(Dx(p)(\bar{u})) = D(\pi^i \circ x)(p)(\bar{u}) \equiv$$

$$\equiv \langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle \quad \underline{.}$$

5.4.4. Studiamo ora le curve coordinate di TE.

PROPOSIZIONE

Le curve coordinate su TE sono le 2n applicazioni differenziabili

$$(Tx)_i \simeq \check{x}_i : \mathbb{R} \times TE \to TE$$

$$(Tx)_{\bar{i}} \simeq \dot{x}_i \; : \mathbb{R} \times TE \to TE$$

date da

$$(Tx)_i(\lambda;p,\bar{u}) = (Tx)^{-1}(x^1(p),\ldots,x^i(p)+\lambda,\ldots,x^n(p);<Dx^1(p),\bar{u}>\ldots,<Dx^n(p),\bar{u}>)$$

$$(Tx)_{\bar{i}}(\lambda;p,\bar{u})=(Tx)^{-1}(x^1(p),\ldots,x^n(p);<Dx^1(p),\bar{u}>,\ldots,<Dx^i(p),\bar{u}>+\lambda,\ldots<Dx^n(p),\bar{u}>)$$

Si noti che il simbolo corretto è $(Tx)_i$ e $(Tx)_{n+i}$. La notazione $\check{x}_i$ e $\dot{x}_i$ è un abuso di linguaggio; però in seguito per semplicità di notazione, faremo uso solo dei simboli $\check{x}_i$ e $\dot{x}_i$.

Fissato $(p,\bar{u}) \in TE$, si hanno le $2n$ curve coordinate passanti per $(p,\bar{u})$

$$\check{x}_{i(p,\bar{u})} : \mathbb{R} \to TE$$

$$\dot{x}_{i(p,\bar{u})} : \mathbb{R} \to TE,$$

date da

$$\check{x}_{i(p,\bar{u})}(\lambda) \equiv x_i(\lambda;p,\bar{u}) \quad ,$$

$$\dot{x}_{i(p,\bar{u})}(\lambda) \equiv \dot{x}_i(\lambda;p,\bar{u}) \quad ,$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Sostanzialmente la i-ma curva coordinata $\check{x}_{i(p,\bar{u})}$, passante per $(p,\bar{u}) \in TE$, assegna, ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il punto $(q,\bar{u}) \in TE$ ottenuto bloccando tutte le coordinate, esclusa la i-ma ed incrementando questa di λ a partire da $\check{x}^i(p,\bar{u})$.

Invece la n+i-ma curva coordinata $\dot{x}_{i(p,\bar{u})}$, passante per $(p,\bar{u})$ assegna, ad ogni λ, il punto $(p,\bar{v}) \in TE$ ottenuto bloccando tutte le coordinate, esclusa la n+i-ma ed incrementando questa di λ a partire da $\dot{x}^i(p,\bar{u})$.

5.4.5. Poiché le 2n funzioni coordinate $\check{x}^1,\ldots,\check{x}^n; \dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n$ di Tx e le 2n curve coordinate $\check{x}_1,\ldots,\check{x}_n; \dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n$ su TE sono differenziabili, possiamo definire una base per i campi di covettori su TE e una base per i campi di vettori su TE, l'una duale dell'altra, indotte da Tx.

Dunque, per la regola della catena, le 2n funzioni coordinate di Tx

$$\check{x}^i : TE \to \mathbb{R} \qquad , \qquad \dot{x}^i : TE \to \mathbb{R}$$

date da

$$\check{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto x^i(p) \qquad , \qquad \dot{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto \langle Dx^i(p),\bar{u} \rangle$$

sono differenziabili. Possiamo, quindi, considerare i loro differenziali

$$d\check{x}^i : TE \to T^*TE \qquad , \qquad d\dot{x}^i : TE \to T^*TE$$

dati da

$$d\check{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};D\check{x}^i(p,\bar{u}) \quad , \quad d\dot{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};D\dot{x}^i(p,\bar{u})) \quad .$$

L'espressione esplicita di $D\check{x}^i(p,\bar{u})$ e di $D\dot{x}^i(p,\bar{u})$ verrà data in seguito (5.5.3.) , (5.5.4) .

Per la regola della catena, la 2n curve coordinate su TE

$$\check{x}_i : \mathbb{R} \times TE \to TE \qquad , \quad \dot{x}_i : \mathbb{R} \times TE \to TE$$

sono differenziabili. Dunque, possiamo considerare i loro differenziali

$$\partial\check{x}_i : TE \to TTE \qquad , \qquad \partial\dot{x}_i : TE \to TTE$$

dati da

$$\partial\check{x}_i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\delta\check{x}_i(p,\bar{u})) \quad , \quad \partial\dot{x}_i :(p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\delta\dot{x}_i(p,\bar{u})) \quad .$$

L'espressione esplicita di $\delta\check{x}_i(p,\bar{u})$ e di $\delta\dot{x}_i(p,\bar{u})$ verrà data in seguito (5.5.6.), (5.5.7.) .

Dunque, abbiamo 2n campi di covettori su TE

$$\{d\check{x}^1,\ldots,d\check{x}^n;\ d\dot{x}^1,\ldots,d\dot{x}^n\}$$

e due campi di vettori su TE

$$\{\partial\check{x}_1,\ldots,\partial\check{x}_n;\ \partial\dot{x}_1,\ldots,\partial\dot{x}_n\} \quad .$$

Essi costituiscono (5.2.2.) una base per i campi di covettori e di vettori su TE , l'una duale dell'altra.

5.4.6. PROPOSIZIONE Sia $f : \mathbb{R} \to E$ una curva differenziabile.

Allora è

$$\dot{x}^i \circ df = \langle dx^i, df \rangle \equiv Df^i \quad .$$

D. Infatti, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, è

$$(\dot{x}^i \circ df)(\lambda) = \dot{x}^i(f(\lambda), Df(\lambda)) \equiv \langle Dx^i(f(\lambda)), Df(\lambda) \rangle = \langle Dx^i, Df \rangle (\lambda) =$$
$$= \langle dx^i, df \rangle (\lambda) \quad \dot{-}$$

5.4.7. PROPOSIZIONE Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Allora è

$$\dot{f} = (\partial \check{x}_i . f)\dot{x}^i \quad .$$

D. Infatti, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$f(p,\bar{u}) \equiv \langle Df(p), \bar{u} \rangle = (\partial x_i . f)(p) \langle Dx^i(p), \bar{u} \rangle = [\, (\partial \check{x}_i . f)\dot{x}^i]\ (p,\bar{u}) \quad \dot{-}$$

5.4.8. PROPOSIZIONE Sia $f : \mathbb{R} \times E \to E$ un'applicazione differenziabi_ le tale che $f_o = id_E$.

Allora è

$$\dot{x}^i \circ \partial f = \langle dx^i , \partial f \rangle \equiv D_1(x^i \circ f)_o \quad .$$

D. Infatti, per ogni $p \in E$, è

$$(\dot{x}^i \circ \partial f)(p) = \dot{x}^i(p, \delta f(p) \equiv \langle Dx^i(p), \delta f(p)\rangle = \langle Dx^i, \delta f\rangle(p) =$$

$$= \langle dx^i, \partial f\rangle\,(p) \qquad \dot{-}$$

5.4.9. PROPOSIZIONE Sia F uno spazio affine di dimensione m. Sia $y \equiv (y^1,\ldots,y^m) : F \to \mathbb{R}^m$ un sistema di coordinate su F di classe C^∞. Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile.

Allora è

$$\check{y}^i \circ Tf = \check{f}^i$$

$$\dot{y}^i \circ Tf = (\partial x_j.f^i)\,\dot{x}^j\ .$$

D. Infatti, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$(\check{y}^i \circ Tf)(p,\bar{u}) = \check{y}^i(f(p),Df(p)(\bar{u})) \equiv y^i(f(p)) = f^i(p) = \check{f}^i(p,\bar{u})\ .$$

$$(\dot{y}^i \circ Tf)(p,\bar{u}) = \dot{y}^i(f(p),Df(p)(\bar{u})) \equiv \dot{y}^i(q,Df(p)(\bar{u})) = \langle Dy^i(q), Df(p)(\bar{u})\rangle =$$

$$= (\partial x_j.f^i)(p)\langle Dy^i(q),(Dx^j(p) \otimes \delta y_i(q))(\bar{u})\rangle =$$

$$= (\partial x_j.f^i)(p)\ \langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle = [(\partial \check{x}_j.f^i)\dot{x}^j](p,\bar{u}) \qquad \dot{-}$$

5.4.10. Estendiamo, in modo naturale, il sistema di coordinate x allo spazio T^*E, stabilendo così una biiezione tra esso e $\mathbb{R}^{2n}$.

PROPOSIZIONE

L'applicazione cotangente di x

$$T^*x : T^*E \to \mathbb{R}^{2n}$$

data da

$$T^*x : (p,\underline{u}) \mapsto (x(p), \underline{u} \circ Dx^{-1}(x(p)))$$

è un sistema di coordinate su T^*E di classe $\mathscr{C}^\infty$.

D. L'applicazione T^*x è una biiezione, la cui inversa è $T^*(x^{-1})$. Inoltre, T^*x e $T^*(x^{-1})$ sono di classe $\mathscr{C}^\infty$.

Si noti che la prima n-pla caratterizza univocamente il punto $p \in E$ di applicazione, tramite x, mentre la seconda caratterizza univocamente il covettore $\underline{u} \in \bar{E}^*$.

Studiamo le funzioni coordinate di T^*x .

5.4.11. Ricordiamo che, dato il fibrato cotangente $\tau^*E \equiv (T^*E, q_E, \bar{E})$ di E, il rilevamento $(\hat{x} : T^*E \to \mathbb{R}^n)$ di x secondo q_E è dato da

$$\hat{x}(p,\underline{u}) \equiv x(p) \qquad , \text{ per ogni } (p,\underline{u}) \in T^*E .$$

Inoltre, abbiamo le n applicazioni $\dot{x}_i : T^*E \to \mathbb{R}$ date da

$$\dot{x}_i(p,\underline{u}) \equiv \langle \underline{u} \ , \ \delta x_i(p) \rangle , \text{ per ogni } (p,\underline{u}) \in T^*E .$$

5.4.12. PROPOSIZIONE

Le funzioni coordinate su T^*E sono le 2n applicazioni differenziabili

$$(T^*x)^i \equiv \pi^i \circ p^1 \circ T^*x : T^*E \to \mathbb{R} \quad ,$$

$$(T^*x)_{\bar{i}} \equiv (T^*x)_{n+i} \overset{1)}{\equiv} \langle \bar{e}_i, p^2 \circ T^*x \rangle : T^*E \to \mathbb{R} ,$$

$\forall\ 1 \leq i \leq n$,

date da

$$(T^*x)^i(p,\underline{u}) = x^i(p) \qquad ,$$

$$(T^*x)_{\bar{i}}(p,\underline{u}) = \langle \underline{u}, \delta x_i(p) \rangle$$

per ogni $(p,\underline{u}) \in T^*E$.

Dunque, è

$$T^*x \equiv ((T^*x)^1,\ldots,(T^*x)^n;(T^*x)_{\bar{1}},\ldots,(T^*x)_{\bar{n}}) = (\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^n;\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)$$

mettendo così in risalto l'equivalenza tra il sistema di coordinate su T^*E e la 2n-pla $(\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^n; \dot{x}_1,\ldots\dot{x}_n)$ di coordinate.

D. Infatti, per ogni $(p,\underline{u}) \in T^*E$, è

$$(T^*x)^i(p,\underline{u}) \equiv (\pi^i \circ p^1 \circ T^*x)(p,\underline{u}) = (\pi^i \circ x)(p) \equiv x^i(p) ,$$

$$(T^*x)_{\bar{i}}(p,\underline{u}) \equiv \langle \bar{e}_i , p^2 \circ T^*x\rangle (p,\underline{u}) = \langle \bar{e}_i, \underline{u} \circ Dx^{-1}(x(p)) \rangle \equiv$$

---

1) Considerata la i-ma curva coordinata naturale di $\mathbb{R}^n$, passante per $x(p) \equiv c_{ip}(o)$

$$c_{ip} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

data da $\qquad c_{ip}: \lambda \mapsto (x^1(p),\ldots,x^i(p)+\lambda,\ldots,x^n(p))$,

abbiamo $Dc_{ip}(o) = \bar{e}_i$, dove $\bar{e}_i$ è lo i-mo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

$$\equiv \underline{u} \circ Dx^{-1}(x(p))(\bar{e}_i) = \underline{u} \circ D(x^{-1} \circ c_{ip})(o) = \underline{u} \circ \delta x_i(p)) \equiv$$

$$\equiv < \underline{u} \, , \, \delta x_i(p) > \quad \underline{.}$$

5.4.13. Diamo ora le 2n curve coordinate su T^*E .

PROPOSIZIONE

Le curve coordinate su T^*E sono le 2n applicazioni differenziabili

$$(T^*x)_i \simeq \hat{x}_i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E$$
$$(T^*x)^{\bar{i}} \simeq \dot{x}_i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E$$

date da

$$(T^*x)_i(\lambda;\, p,\underline{u}) = (T^*x)^{-1}(x^1(p),..,x^i(p)+\lambda,..,x^n(p);<\underline{u},\delta x_1(p)>,..,<\underline{u},\delta x_n(p)$$

$$(T^*x)^{\bar{i}}\,(\lambda;p,\underline{u})=(T^*x)^{-1}(x^1(p),..,x^n(p);<\underline{u},\delta x_1(p)>,..,<\underline{u},\delta x_i(p)>+\lambda,..,<\underline{u},\delta x_n(p)$$

Si noti che il simbolo corretto è $(T^*x)_i$ e $(T^*x)^{n+i}$. La notazione $\hat{x}_i$ e $\dot{x}^i$ è un abuso di linguaggio; però,in seguito, per semplicità di notazione, faremo uso solo dei seimboli $\hat{x}_i$, $\dot{x}^i$.

Fissato $(p,u) \in T^*E$, si hanno le 2n curve coordinate passanti per (p,u)

$$\hat{x}_{i(p,\underline{u})} : \mathbb{R} \to T^*E$$

$$x_{i(p,\underline{u})} : \mathbb{R} \to T^*E$$

date da

$$\hat{x}_{i(p,\underline{u})}(\lambda) \equiv \hat{x}_i(\lambda;p,\underline{u}) \quad ,$$

$$\dot{x}_{i(p,\underline{u})}(\lambda) \equiv \dot{x}_i(\lambda;p,\underline{u}) \quad ,$$

$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Sostanzialmente la i-ma curva coordinata $\hat{x}_{i(p,\underline{u})}$, passante per $(p,\underline{u}) \in T^*E$, assegna, ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il punto $(q,\underline{u}) \in T^*E$ ottenuto bloccando tutte le coordinate, esclusa la i-ma ed incrementando questa di λ a partire da $\hat{x}^i(p,\underline{u})$.

Invece, la n+i-ma curva coordinata $\dot{x}_{i(p,\underline{u})}$, passante per $(p,\underline{u}) \in T^*E$, assegna ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il punto $(p,\underline{v}) \in T^*E$ ottenuto bloccando tutte le coordinate, esclusa la n+i-ma ed incrementando questa di λ a partire da $\dot{x}_i(p,\underline{u})$.

5.4.14. Poiché le 2n funzioni coordinate $\hat{x}^1,\ldots \hat{x}^n;\ \dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n$ di T^*x e le 2n curve coordinate $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n;\dot{x}_1,\ldots\dot{x}_n$ su T^*E sono differenziabili, possiamo definire una base per i campi di covettori su T^*E e una per i campi di vettori su T^*E, l'una duale dell'altra.

Dunque, per la regola della catena, le 2n funzioni coordinate di T^*x

$$\hat{x}^i : T^*E \to \mathbb{R} \qquad , \qquad \dot{x}_i : T^*E \to \mathbb{R}$$

date da $\quad \hat{x}^i :(p,\underline{u}) \mapsto x^i(p) \qquad , \qquad \dot{x}_i =(p,\underline{u}) \mapsto \langle\ \underline{u},\ \delta x_i(p)\ \rangle$

sono differenziabili. Possiamo, quindi, considerare i loro differenziali

$$d\hat{x}^i : T^*E \to T^*T^*E \qquad , \qquad d\dot{x}_i : T^*E \to T^*T^*E$$

dati da

$$d\hat{x}^i : (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};D\hat{x}^i(p,\underline{u})) \quad , \quad d\dot{x}_i : (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\ D\dot{x}_i(p,\underline{u})) .$$

L'espressione esplicita di $D\hat{x}^i(p,\underline{u})$ e $D\dot{x}_i(p,\underline{u})$ verrà data in seguito (5.5.9), (5.5.10.).

Per la regola della catena, le 2n curve coordinate su T^*E

$$\hat{x}_i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E \quad , \quad \dot{x}_i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E$$

sono differenziabili. Dunque, possiamo considerare i loro differenziali

$$\partial\hat{x}_i : T^*E \to TT^*E \qquad , \quad \partial\dot{x}_i : T^*E \to TT^*E$$

dati da $\quad \partial\hat{x}_i : (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\delta\hat{x}_i(p,\underline{u})), \quad \partial\dot{x}_i : (p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};\delta\dot{x}_i(p,\underline{u})) \quad .$

L'espressione esplicita di $\delta\hat{x}_i(p,\underline{u})$ e $\delta\dot{x}_i(p,\underline{u})$ verrà data in seguito (5.5.12) , (5.5.13).

Dunque, abbiamo 2n campi di covettori su T^*E

$$\{d\hat{x}^1,\dots,d\hat{x}^n;\ d\dot{x}_1,\dots d\dot{x}_n\}$$

e 2n campi di vettori su T^*E

$$\{\partial\hat{x}_1,\dots,\partial\hat{x}_n\ ;\ \partial\dot{x}_1,\dots,\ \partial\dot{x}_n\} \quad .$$

Essi costituiscono (5.2.2.) una base per i campi di covettori e vettoti su T^*E, l'una duale dell'altra.

5.4.15. PROPOSIZIONE Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Allora è

$$\dot{x}_i \circ df = \langle df, \partial x_i \rangle \equiv D_1(f \circ x_i)_0 \equiv \partial x_i . f \quad .$$

D. Infatti, per ogni $p \in E$, è

$$(\dot{x}_i \circ df)(p) = \dot{x}_i(p, Df(p)) \equiv \langle Df(p), \delta x_i(p) \rangle = \langle df, \partial x_i \rangle (p) \quad \dot{-}$$

5.4.16. PROPOSIZIONE Sia $f : \mathbb{R} \times E \to E$ un'applicazione differenziabile.

Allora è

$$\dot{f} = (\delta \hat{f}^i) \dot{x}_i$$

D. Infatti, per ogni $(p,\underline{u}) \in T^*E$, è

$$\dot{f}(p,\underline{u}) \equiv \langle \underline{u}, \delta f(p) \rangle = \delta f^i(p) \langle \underline{u}, \delta x_i(p) \rangle = [(\delta \hat{f}^i) \dot{x}_i] (p,\underline{u}) \quad \dot{-}$$

5 DERIVATE DELLE BASI

0 Sia E uno spazio di dimensione n. Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E, di classe $\mathcal{C}^\infty$. Siano $B(p) \equiv \{\delta x_1(p), \dots, \delta x_n(p)\}$ e $B^*(p) \equiv \{Dx^1(p), \dots, Dx^n(p)\}$ le basi di $\bar{E}$ e $\bar{E}^*$, indotte da x.

Abbiamo visto (1.5.3.) che $B^*(p) \otimes B(p)$ e $B(p) \otimes B^*(p)$ sono le basi di $\bar{E}^* \otimes \bar{E}$ e $\bar{E} \otimes \bar{E}^*$, indotte da $B(p)$, l'una duale dell'altra e che $B^*(p) \otimes B^*(p)$ e $B(p) \otimes B(p)$ sono le basi di $\bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$ e $\bar{E} \otimes \bar{E}$ indotte da $B(p)$ l'una duale dell'altra.

Dunque, possiamo esprimere ogni tensore misto di tipo $(1,1)$ e ogni tensore covariante del 2° ordine secondo tali basi.

In particolare, essendo x di classe $\mathcal{C}^\infty$, possiamo esprimere i tensori

$$D\delta x_1(p), \dots, D\delta x_n(p) \in \bar{E}^* \otimes \bar{E}$$

e i tensori

$$DDx^1(p) \equiv D^2x^1(p), \dots, DDx^n(p) \equiv D^2x^n(p) \in \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*.$$

5.5.1. PROPOSIZIONE

Per ogni $1 \leq i \leq n$, è

$$D\delta x_i(p) = \Gamma^k_{ij}(p)\, Dx^j(p) \otimes \delta x_k(p) \, ,$$

per ogni $1 \leq k \leq n$, è

$$D^2x^k(p) = -\Gamma^k_{ij}(p)\, Dx^i(p) \otimes Dx^j(p) \, ,$$

dove gli n^3 numeri

$$\Gamma^k_{ij}(p) \equiv \langle D\delta x_i(p), (\delta x_j(p), Dx^k(p))\rangle = -\langle D^2x^k(p), (\delta x_i(p), \delta x_j(p))\rangle \equiv -c^k_{ij}(p$$

si dicono SIMBOLI DI CHRISTOFFEL .

Dunque, è

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \quad .$$

D. Dimostriamo la relazione tra i coefficienti c^k_{ij} e i simboli di Christoffel Γ^k_{ij} .

E'

$$\langle Dx^i(p), \delta x_j(p)\rangle = \delta^i_j$$

Allora, per la regola di Leibnitz, è

$$0 = D\delta^i_j = D\langle Dx^i(p), \delta x_j(p)\rangle \overset{1)}{=} \langle D^2x^i(p), \delta x_j(p)\rangle + \langle Dx^i(p), D\delta x_j(p) =$$

$$= \langle c^i_{hk}(p)\, Dx^h(p) \otimes Dx^k(p)\ , \delta x_j(p)\rangle + \langle Dx^i(p), \Gamma^r_{jh}(p)\, Dx^h(p) \otimes \delta x_r(p) =$$

$$= [c^i_{hk}(p)\langle Dx^k(p), \delta x_j(p)\rangle + \Gamma^r_{jh}(p)\langle Dx^i(p), \delta x_r(p)\rangle] Dx^h(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^i_{hj}(p) + \Gamma^i_{jh}(p) \overset{2)}{=} c^i_{jh}(p) + \Gamma^i_{jh}(p) \Rightarrow \Gamma^i_{jh}(p) = -c^i_{jh}(p) \quad \dot{-}$$

---

1) $E \xrightarrow{(Dx^i, \delta x_j)} \bar{E}^* \otimes \bar{E} \xrightarrow{\langle ; \rangle} \mathbb{R}$

$\quad p \mapsto (Dx^i(p)\ , \delta x_j(p)) \mapsto \langle Dx^i(p), \delta x_j(p)\rangle.$

2) L'uguaglianza è lecita in quanto $D^2x^i(p)$ è simmetrica.

In un sistema di coordinate cartesiano, i simboli di Christoffel sono nulli.

Ciò è dovuto al fatto che le basi indotte da tale sistema sono costanti punto per punto.

5.5.2. Ricordiamo che i differenziali delle funzioni coordinate $\check{x}^i$, $\dot{x}^i$ di Tx sono i $2n$ campi di covettori su TE

$$d\check{x}^i : TE \to T^*TE \qquad d\dot{x}^i : TE \to T^*TE$$

dati da $$d\check{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};D\check{x}^i(p,\bar{u})), \quad d\dot{x}^i : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};D\dot{x}^i(p,\bar{u})) .$$

Esplicitiamo, allora, le derivate $D\check{x}^i(p,\bar{u})$ e $D\dot{x}^i(p,\bar{u})$.

5.5.3. PROPOSIZIONE Sia $\check{x}^i : TE \to \mathbb{R}$ la i-ma funzione coordinata di Tx data da $\check{x}^i(p,\bar{u}) \equiv x^i(p)$, $\forall\ (p,\bar{u}) \in TE$.

Allora, è

$$\langle D\check{x}^i(p,\bar{u}) \ , \ (\bar{v},\bar{w})\rangle = \langle Dx^i(p),\bar{v}\rangle \ , \ \forall\ (\bar{v},\bar{w}) \in \bar{E}\times\bar{E} .$$

D. Per comodità , rifacciamo la dimostrazione già data in 3.1.8. .

E'

$$\begin{aligned}\langle D\check{x}^i(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})\rangle &= \langle D_1\check{x}^i(p,\bar{u}),\bar{v}\rangle + \langle D_2\check{x}^i(p,\bar{u}),\bar{w}\rangle = \\ &= \langle D(x^i \circ p_E \circ j_{\bar{u}})(p),\bar{v}\rangle + \langle D(x^i \circ p_E \circ j_p)(\bar{u}),\bar{w}\rangle = \\ &= \langle Dx^i(p),\bar{v}\rangle + \langle \underline{o},\bar{w}\rangle = \langle Dx^i(p),\bar{v}\rangle \ \underline{.}\end{aligned}$$

5.5.4. PROPOSIZIONE Sia $\dot{x}^i : TE \to \mathbb{R}$ la n+i-ma funzione coordinata di Tx data da

$\dot{x}^i(p,\bar{u}) \equiv \langle Dx^i(p),\bar{u} \rangle \quad , \quad \forall\ (p,\bar{u}) \in TE$.

Allora è

$$\langle D\dot{x}^i(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w}) \rangle = - \Gamma^i_{jk}(p)\langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle\langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle+\langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle \quad ,$$

$\forall(\bar{v},\bar{w}) \in \bar{E} \times \bar{E}$.

D. Per comodità rifacciamo la dimostrazione già data in 3.1.8..E'

$$\langle D\dot{x}^i(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})\rangle = \langle D_1\dot{x}^i(p,\bar{u}) \ , \ \bar{v}\rangle + \langle D_2\dot{x}^i(p,\bar{u}) \ , \ \bar{w}\rangle =$$

$$=\langle D\dot{x}^i_{\bar{u}}(p),\bar{v}\rangle + \langle D\dot{x}^i_p(\bar{u}),\bar{w}\rangle \overset{1)}{=} \langle D^2x^i(p)(\bar{v}),\bar{u}\rangle + \langle Dx^i(p),\bar{w} \rangle =$$

$$= -\Gamma^i_{jk}(p) \ \langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle \ \langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle + \langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle \quad \dot{-}$$

5.5.5. Ricordiamo che i differenziali delle curve coordinate $\check{x}_i$, $\dot{x}_i$ su TE sono i 2n campi di vettori su TE

$$\partial\check{x}_i : TE \to TTE \qquad\qquad ,\partial\dot{x}_i : TE \to TTE$$

1a) $E \overset{Dx^i}{\to} \bar{E}^* \overset{\langle\,,\bar{z}\rangle}{\to} \mathbb{R}$

$q \mapsto Dx^i(q) \mapsto \langle Dx^i(q),\bar{z}\rangle$.

Dunque, è
$$\langle\,,\bar{z} \rangle \circ Dx^i \equiv \dot{x}^i_{\bar{z}} \Rightarrow \langle D^2x^i(q),\bar{z}\rangle = D\dot{x}^i_{\bar{z}}(q)$$

1b) $\bar{E} \overset{\langle Dx^i(q),\rangle}{\to} \mathbb{R}$

$\bar{z} \mapsto \langle Dx^i(q),\bar{z}\rangle$.

Dunque, è $\quad \langle Dx^i(q),\rangle \equiv \dot{x}^i_q \Rightarrow \langle Dx^i(q),\bar{z}\rangle = D\dot{x}^i_q(\bar{z})$.

dati da $\partial\check{x}_i:(p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\delta\check{x}_i(p,\bar{u}))$, $\partial\dot{x}_i:(p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\delta\dot{x}_i(p,\bar{u}))$.

Esplicitiamo, allora, le derivate $\delta\check{x}_i(p,\bar{u})$ e $\delta\dot{x}_i(p,\bar{u})$.

5.5.6. PROPOSIZIONE Sia $\check{x}_i : \mathbb{R} \times TE \to TE$ la i-ma curva coordinata su TE.

Allora è

$$<(\underline{\nu}, \underline{\omega}), \delta\check{x}_i(p,\bar{u})> = \Gamma^h_{ik}(p) <Dx^k(p),\bar{u}><\underline{\omega},\delta x_h(p)> + <\underline{\nu}, \delta x_i(p)>,$$

$\forall\ (\underline{\nu}, \underline{\omega}) \in \bar{E}^* \times \bar{E}^*$.

D. E'

$$\dot{x}_i(\lambda;p,\bar{u})=(Tx)^{-1}(x^1(p),..,x^i(p)+\lambda,..,x^n(p);<Dx^1(p),\bar{u}>, \ldots,<Dx^n(p),\bar{u}>) =$$

$$=(Tx)^{-1}(x^1(p),..,x^i(p)+\lambda,..,x^n(p);<Dx^1(x_i(\lambda,p)),\bar{v}>,..<Dx^n(x_i(\lambda,p)),\bar{v}>).$$

Dunque, determiniamo quel vettore $\bar{v}$, nel punto trasformato $x_i(\lambda,p)$, avente le stesse componenti di $\bar{u}$, nel punto p.

Per ogni $1\leq j\leq n$, è

$$<Dx^j(x_i(\lambda,p)),\bar{v}> \overset{1)}{=} <Dx^j(p),\bar{v}>+<D^2x^j(p)(\delta x_i(p))\lambda , \bar{v}> + \bar{o}(o,\lambda) =$$

---

1) Sia $f : \mathbb{R} \to \bar{E}^*$ un'applicazione differenziabile. Allora, è

$$f(o+\lambda) = f(o) + Df(o)\lambda + \bar{o}(o,\lambda) .$$

Nel nostro caso si è posto $f \equiv Dx^j$.

$$= \langle Dx^j(p),\bar{v}\rangle - \lambda\Gamma^j_{ik}(p)\ \langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle + \bar{o}(o,\lambda)\ .$$

Dunque è

$$\bar{v} = \bar{u} + \lambda\Gamma^h_{ik}(p)\ \langle Dx^k(p),\bar{u}\rangle\ \delta x_h(p) + \bar{o}'(o,\lambda)\ .$$

Allora è

$$\check{x}_i(\lambda;p,\bar{u}) = (x_i(\lambda,p),\bar{u} + \lambda\Gamma^h_{ik}(p)\ \langle Dx^k(p),\ \bar{u}\rangle\ \delta x_h(p) + \bar{o}'(o,\lambda\ )\ )\quad ,$$

e quindi

$$\delta\check{x}_i(p,\bar{u}) \equiv D_1\check{x}_i(o;p,\bar{u}) \overset{2)}{=} (\delta x_i(p),\ \Gamma^h_{ik}(p)\langle Dx^k(p),\bar{u}\rangle\ \delta x_h(p))\quad ,$$

da cui l'asserto $\_$.

5.5.7. PROPOSIZIONE Sia $\dot{x}_i : \mathbb{R} \times TE \to TE$ la n+i-ma funzione coordinata su TE.

Allora è

$$\langle (\ \underline{\nu}\ ,\ \underline{\omega}),\ \delta\dot{x}_i(p,\bar{u})\rangle = \langle\ \underline{\omega},\ \delta x_i(p)\rangle\quad ,\quad \forall(\ \underline{\nu},\underline{\omega}) \in \bar{E}^* x \bar{E}^*$$

D. E'

$$\dot{x}_i(\lambda;p,\bar{u}) = (Tx)^{-1}(x^1(p),..,x^n(p);\langle Dx^1(p),\bar{u}\rangle,..,\langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle + \lambda,..,\langle Dx^n(p),\bar{u}\rangle\ ) =$$

---

2) Calcolando la derivata, si vede che l'infinitesimo $\bar{o}'(o,\lambda)$ tende a zero più velocemente di λ.

$$= (Tx)^{-1}(x^1(p),\ldots,x^n(p);<Dx^1(p),\bar{u}+\lambda\delta x_i(p)>,\ldots,<Dx^i(p),\bar{u}+\lambda\delta x_i(p)>,\ldots,$$
$$\ldots,<Dx^n(p),\bar{u}+\lambda\delta x_i(p)>) =$$

$$= (p,\ \bar{u} + \lambda\delta x_i(p)) \ .$$

e quindi

$$\delta\dot{x}_i(p,\bar{u}) \equiv D_1\ \dot{x}_i(o;p,\bar{u}) = (\bar{o}\ ,\ \delta x_i(p)\ ) \ .$$

Dunque, è

$$<(\underline{\nu},\underline{\omega}),\delta\dot{x}_i(p,\bar{u})> = <\ \underline{\nu},\bar{o}> + <\ \underline{\omega},\delta x_i(p)> \ = <\ \underline{\omega}\ ,\ \delta x_i(p)> \quad \underline{\cdot}$$

5.5.8. Ricordiamo che i differenziali delle funzioni coordinate $\hat{x}^i,\dot{x}_i$ di T^*x sono i 2n campi di covettori su T^*E

$$d\hat{x}^i : T^*E \to T^*T^*E \qquad , \quad d\dot{x}_i : T^*E \to T^*T^*E$$

dati da

$$d\hat{x}^i :(p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};D\hat{x}^i(p,\underline{u}))\ , \quad d\dot{x}_i:(p,\underline{u}) \mapsto (p,\underline{u};D\dot{x}_i(p,\underline{u}))$$

Esplicitiamo allora le derivate $D\hat{x}^i(p,\underline{u})$ e $D\dot{x}_i(p,\underline{u}\ )$.

5.5.9. PROPOSIZIONE Sia $\hat{x}^i : T^*E \to \mathbb{R}$ la i-ma curva coordinata di T^*x data da $\hat{x}^i(p,\underline{u}) = x^i(p)$, $\forall\ (p,\underline{u}) \in T^*E$.

Allora è

$$<D\hat{x}^i(p,\underline{u})\ ,\ (\bar{v},\underline{\omega})> = <Dx^i(p),\bar{v}> \quad , \forall(\bar{v}\ ,\ \underline{\omega}\ ) \in \bar{E} \times \bar{E}^* \ .$$

D. Per comodità, rifacciamo la dimostrazione già data in 3.1.8.. E'

$$< D\hat{x}^i(p,\underline{u}),(\bar{v},\underline{\omega}) > = <D_1\hat{x}^i(p,\underline{u}),\bar{v}> + <D_2\hat{x}^i(p,\underline{u}) \;,\; \underline{\omega} > =$$

$$= <D(x^i \circ q_E \circ j_{\underline{u}})(p),\bar{v}> + <D(x^i \circ q_E \circ j_p)(\underline{u}),\underline{\omega}> =$$

$$= <Dx^i(p),\bar{v}> + <\bar{o},\underline{\omega}> = <Dx^i(p),\bar{v}> \;\underline{.}$$

5.5.10. PROPOSIZIONE Sia $\dot{x}_i : T^*E \to \mathbb{R}$ la n+i-ma funzione coordinata di T^*x .

Allora è

$$<D\dot{x}_i(p,\underline{u}),(\bar{v},\underline{\omega})> = \Gamma^k_{ij}(p)<Dx^j(p),\bar{v}>< \underline{u},\delta x_k(p)> + < \underline{\omega} \;,\delta x_i(p)> \;,$$

$\forall\ (\bar{v},\underline{\omega}) \in \bar{E} \times \bar{E}^*$.

D. Per comodità, rifacciamo la dimostrazione già data in 3.1.8..E'

$$<D\dot{x}_i(p,\underline{u}),(\bar{v},\underline{\omega})> = <D\dot{x}_{i\underline{u}}(p),\bar{v}> + <D\dot{x}_{ip}(\underline{u}),\underline{\omega} > \overset{1)}{=}$$

1a) $E \xrightarrow{\delta x_i} \bar{E} \xrightarrow{<\underline{\nu},>} \mathbb{R}$

$q \mapsto \delta x_i(q) \mapsto <\underline{\nu},\delta x_i(q)>$.

Dunque, è

$$\dot{x}_{i\underline{\nu}} = <\underline{\nu},>\circ\ \delta x_i \Rightarrow D\dot{x}_{i\underline{\nu}}(q) = < \underline{\nu},D\delta x_i(q) > .$$

1b) $\bar{E}^* \xrightarrow{<,\delta x_i(q)>} \mathbb{R}$

$\underline{\nu} \mapsto <\underline{\nu} \;,\delta x_i(q)>$.

Dunque, è

$$\dot{x}_{iq} = <,\delta x_i(q)> \Rightarrow D\dot{x}_{iq}(\underline{\nu}) = < \underline{\nu},\delta x_i(q)> \quad .$$

$$= \langle D\delta x_i(p), (\underline{u}, \bar{v}) \rangle + \langle \underline{\omega}, \delta x_i(p) \rangle \quad \dot{-}$$

5.5.11. Ricordiamo che i differenziali delle curve coordinate su T^*E sono 2n campi di vettori su T^*E

$$\partial \hat{x}_i : T^*E \to TT^*E \qquad , \qquad \partial \dot{x}_i : T^*E \to TT^*E$$

dati da $\quad \partial \hat{x}_i : (p, \underline{u}) \mapsto (p, \underline{u}; \delta \hat{x}_i(p, \underline{u}))$, $\quad \partial \dot{x}_i : (p, \underline{u}) \mapsto (p, \underline{u})\ \delta \dot{x}_i(p, \underline{u}))$.

Esplicitiamo allora le derivate $\delta \hat{x}_i(p, \underline{u})$ e $\delta \dot{x}_i(p, \underline{u})$.

5.5.12. PROPOSIZIONE Sia $x_i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E$ la i-ma curva coordinata su T^*E .

Allora è

$$\langle (\underline{\nu}, \bar{w}), \delta \hat{x}_i(p, \underline{u}) \rangle = -\Gamma^{\ k}_{ih}(p) \langle \underline{u}, \delta x_k(p) \rangle \langle Dx^h(p), \bar{w} \rangle + \langle \underline{\nu}, \delta x_i(p) \rangle \quad ,$$

$\forall (\underline{\nu}, \bar{w}) \in \bar{E}^* \times \bar{E}$.

D. E'

$$\dot{x}_i(\lambda; p, \underline{u}) = (T^*x)^{-1}(x^1(p), \ldots, x^i(p)+\lambda, \ldots, x^n(p); \langle \underline{u}, \delta x_1(p) \rangle, \ldots, \langle \underline{u}, \delta x_n(p) \rangle\ ) =$$

$$= (T^*x)^{-1}(x^1(p), \ldots, x^i(p)+\lambda, \ldots, x^n(p); \langle \underline{\omega}, \delta x_1(x_i(\lambda, p)) \rangle, \ldots \langle \underline{\omega}, \delta x_n(x_i(\lambda, p))$$

Dunque, determiniamo quel covettore $\underline{\omega}$, nel punto trasformato $x_i(\lambda, p)$, avente le stesse componenti di $\underline{u}$, nel punto p.

Per ogni $1 \leq j \leq n$, è

$$< \underline{\omega},\delta x_j(x_i(\lambda,p))> = < \underline{\omega},\delta x_j(p)> + < \underline{\omega}, D\delta x_j(p)(\delta x_i(p)(\delta x_i(p))\lambda> + \bar{o}(o,\lambda) =$$

$$= < \underline{\omega},\delta x_j(p)> + \lambda\Gamma^k_{ji}(p) < \underline{\omega},\delta x_k(p)> + \bar{o}(o,\lambda) \ .$$

Dunque è

$$\underline{\omega} = \underline{u} - \lambda\Gamma^{\ k}_{hi}(p) < \underline{u} \ ,\delta x_k(p)> Dx^h(p) + \bar{o}'(o,\lambda) \ .$$

Allora è

$$\grave{x}_i(\lambda;p,\underline{u}) = (x_i(\lambda,p) \ , \ \underline{u} - \lambda\Gamma^k_{ih}(p) < \underline{u} \ ,\delta x_k(p)> Dx^h(p) + \bar{o}'(o,\lambda) \ ) \ ,$$

e quindi

$$\delta\hat{x}_i(p,\underline{u}) \equiv D_1\hat{x}_i(o;p,\underline{u}) \overset{1)}{=} (\delta x_i(p) \quad , -\Gamma^k_{ih}(p) < \underline{u},\delta x_k(p)> Dx^h(p) \ ),$$

da cui l'asserto $\dot{-}$

5.5.13. PROPOSIZIONE Sia $\dot{x}^i : \mathbb{R} \times T^*E \to T^*E$ la n+i-ma curva coordinata su T^*E

Allora è

$$<(\underline{\nu},\bar{w}) \ ,\delta\dot{x}^i(p,\underline{u})> = < Dx^i(p),\bar{w}> \ , \qquad \forall \ (\underline{\nu},\bar{w}) \in \bar{E}^* x\bar{E}$$

D. E'

$$\dot{x}^i(\lambda;p,\underline{u}) = (T^*x)^{-1}(x^1(p),..,x^n(p); < \underline{u},\delta x_1(p)>,..,< \underline{u},\delta x_i(p)> + \lambda,..,< \underline{u},\delta x_n(p) \quad) =$$

$$= (T^*x)^{-1}(x^1(p),..,x^n(p); < \underline{u} + \lambda Dx^i(p),\delta x_1(p)>,..,< u + \lambda Dx^i(p),\delta x_i(p) \ ,...,$$

---

1)Calcolando la derivata, si vede che l'infinitesimo $\bar{o}'(o,\lambda)$tende a zero più velocemente di λ.

$\ldots, < \underline{u} + \lambda D x^{i}(p), \delta x_{n}(p)>)$

$$= (p, u + \lambda D x^{i}(p)),$$

e quindi

$$\delta \dot{x}_{i}(p,\underline{u}) \equiv D_{1}\dot{x}_{i}(o;p,\underline{u}) = (\bar{o}, Dx^{i}(p)) \quad .$$

Dunque, è

$$<(\underline{v},\bar{w}),\delta \dot{x}_{i}(p,\underline{u})> =< \underline{v},\bar{o} >+ <Dx^{i}(p),\bar{w}> = <Dx^{i}(p),\bar{w} > \quad \underline{\cdot}$$

Tali risultati serviranno per esplicitare le funzioni coordiante sui secondi spazi tangenti e cotangenti di E, indotte da x .

6 CALCOLO DELLE DERIVATE SECONDE

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n. Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E, di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Facciamo uno studio delle derivate seconde di alcune applicazioni differenziabili che, per semplicità, supporremo di classe $\mathcal{C}^\infty$ (è sufficiente che siano differenziabili due volte).

Nel caso di una funzione si ritrova il classico teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione.

Si noti, come talvolta si possa ottenere un interessante significato legato al sistema di coordinate.

In questo paragrafo, ci interessiamo anche al calcolo delle derivate dei campi differenziabili di vettori e covettori e, più in generale, di un campo tensoriale r volte controvariante ed s volte covariante.

Siano, dunque, $B \equiv \{\delta x_1, \dots, \delta x_n\}$ e $B^* \equiv \{Dx^1, \dots, Dx^n\}$ le basi, indotte da x, per i campi di vettori e di covettori su E, rispettivamente, l'una duale dell'altra.

Calcoliamo le derivate seconde di alcune applicazioni $\mathcal{C}^\infty$.

1) CASO $f : \mathbb{R} \to E$.

5.6.1. PROPOSIZIONE Sia f una curva $\mathcal{C}^\infty$. Consideriamo la derivata $Df : \mathbb{R} \to \bar{E}$, ossia l'applicazione $\mathcal{C}^\infty$ data da

$$Df = Df^i(\delta x_i \circ f)$$

con $f^i \equiv x^i \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Allora è

a) $$D^2 f = [\, D^2 f^i + (\Gamma^i_{jk} \circ f) Df^j Df^k \,](\delta x_i \circ f) \quad .$$

b) $$d^2 f = Df^i(\partial \check{x}_i \circ df) + D^2 f^i(\partial \dot{x}_i \circ df) \quad .$$

c) $$\Gamma \circ d^2 f = [\, D^2 f^i + (\Gamma^i_{jk} \circ f) Df^j Df^k \,]\, (\partial \dot{x}_i \circ df) \quad .$$

D. a). Infatti, per le regole di Leibnitz e della catena, è

$$D^2 f \equiv D(Df) = D^2 f^i(\delta x_i \circ f) + Df^i(D\delta x_i \circ f)(Df) =$$

$$= D^2 f^i(\delta x_i \circ f) + Df^i[\, \Gamma^j_{ik}\, Dx^k \otimes \delta x_j) \circ f \,](Df) =$$

$$= D^2 f^i(\delta x_i \circ f) + (\Gamma^j_{ik} \circ f) Df^i Df^k(\delta x_j \circ f) =$$

$$= [\, D^2 f^i + (\Gamma^i_{jk} \circ f)\, Df^j Df^k \,](\delta x_i \circ f) \quad .$$

b). Posto $df \equiv g$, $(\check{x}^i, \dot{x}^j) \equiv y^{(ij)}$, allora il risultato segue dalla nota relazione

$$dg = Dg^i(\partial y_i \circ g)$$

con $g^i \equiv y^i \circ g$.

c) E'

$$(\Gamma \circ d^2 f) = (f, Df) \; ; \; \bar{o}, \; D^2 f$$

$$= [\dot{x}^i \circ (f, Df; \bar{o}, D^2 f)](\partial \check{x}_i \circ df) + [\ddot{x}^i \circ (f, Df; \bar{o}, D^2 f)](\partial \dot{x}_i \circ df)$$

$$= [\ddot{x}^i \circ (f, Df\, ; \, \bar{o}, D^2 f)](\partial \dot{x}_i \circ df) =$$

$$= \langle D\check{x}^i \circ f, D^2 f \rangle (\partial \dot{x}_i \circ df) = [D^2 f^i + (\Gamma^i_{jk} \circ f) Df^j Df^k] (\partial \dot{x}_i \circ df) .$$

$$= \{[\ D^2f^i + (\Gamma^i_{jk}\circ f)Df^jDf^k\ ](\partial\dot{x}_i\circ df)\} \qquad \dot{-}$$

La relazione c) si può ottenere, più semplicemente, tenendo presente l'isomorfismo canonico

$$\nu T_{(p,\bar{u})}\, TE \approx T_pE \quad .$$

Infatti, tale isomorfismo si traduce, in un sistema di coordinate, nel fatto che le componenti, secondo la base $\{\partial\dot{x}_1(p,\bar{u}),\dots,\partial\dot{x}_n(p,\bar{u})\}$ di $\nu\, T_{(p,\bar{u})}TE$, di $(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w})$ sono le componenti di $(p,\bar{w})$, secondo la base $\{\partial x_1(p),\dots,\partial x_n(p)\}$ di T_pE.

Il termine $\Gamma\circ d^2f$ gioca un ruolo importante, nella Meccanica Analitica.

2) CASO $f : E \to \mathbb{R}$.

5.6.2. PROPOSIZIONE Sia f una funzione differenziabile almeno due volte. Sia $Df : E \to \bar{E}^*$ l'applicazione differenziabile data da

$$Df = (\partial x_i.f)Dx^i$$

con $\partial x_i.f \equiv D(f\ o\ x_i)_o : E \to \mathbb{R}$.

Allora è

$$D^2f = [\ (\partial x_i.\ \partial x_j.f) - \Gamma^k_{ij}(\partial x_k.f)]\ Dx^i \otimes Dx^j \quad .$$

D. Posto $\partial x_i.f \equiv \alpha_i$, allora per la regola di Leibnitz, è

$$D^2 f \equiv D(Df) = D(\alpha_i Dx^i) = D\alpha_i \otimes Dx^i + \alpha_i D^2 x^i =$$

$$=(\partial x_j.\alpha_i)Dx^j \otimes Dx^i - \alpha_i \Gamma^i_{hk}\, Dx^h \otimes Dx^k =$$

$$=(\partial x_j.\partial x_i.f)Dx^j \otimes Dx^i - \Gamma^k_{ij}(\partial x_k.f)Dx^i \otimes Dx^j =$$

$$=[(\partial x_i.\partial x_j.f) - \Gamma^k_{ij}(\partial x_k.f)]Dx^i \otimes Dx^j \qquad \dot{-}$$

L'ultima relazione è dovuta alla simmetria della forma bilineare $D^2 f$, permettendo così lo scambio degli indici i e j. Dunque, è

$$(\partial x_i.\partial x_j.f) = (\partial x_j.\partial x_i.f) \qquad ,$$

che esprime appunto il noto teorema di Schwarz dell'Analisi Classica.

5.6.3. Calcoliamo ora la derivata di un campo di vettori su E, differenziabile.

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} : E \to \bar{E}$ un campo vettoriale differenziabile dato da

$$\bar{X} = X^i\, \delta x_i \;.$$

Allora è

$$D\bar{X} = [(\partial x_j.X^i) + \Gamma^i_{jk} X^k]\, Dx^j \otimes \delta x_i \;.$$

D. Per la regola di Leibnitz, è

$$D\bar{X} = D(X^i \delta x_i) = DX^i \otimes \delta x_i + X^i\, D\delta x_i =$$

$$= (\partial x_j.X^i)Dx^j \otimes \delta x_i + \Gamma^k_{ij}\, X^i Dx^j \otimes \delta x_k =$$

$$=[(\partial x_j . X^i) + \Gamma^i_{kj} X^k] \, Dx^j \otimes \delta x_i \qquad \dot{-}$$

5.6.4. Calcoliamo ora la derivata di un campo di covettori su E, differenziabile.

PROPOSIZIONE Sia $\underline{X} : E \to \bar{E}^*$ un campo di covettori differenziabile dato da

$$\underline{X} = X_i Dx^i \; .$$

Allora è

$$D\underline{X} = [\,(\partial x_j . X_i) - \Gamma^k_{ij} X_k] \, Dx^j \otimes Dx^i \; .$$

D. Per la regola di Leibnitz, è

$$D\underline{X} = D(X_i Dx^i) = DX_i \otimes Dx^i + X_i D^2 x^i =$$

$$= (\partial x_j . X_i) Dx^j \otimes Dx^i - \Gamma^i_{jk} X_i Dx^j \otimes Dx^k =$$

$$= [\,(\partial x_j . X_i) - \Gamma^k_{ji} X_k] \, Dx^j \otimes Dx^i \qquad \dot{-}$$

5.6.5. Più in generale, diamo la derivata di un campo tensoriale differenziabile.

PROPOSIZIONE Sia $t : E \to \otimes^r_s \bar{E}$ un campo tensoriale r volte controvariante ed s volte covariante, differenziabile dato da

$$t = t^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \, \delta x_{i_1} \otimes \ldots \otimes \delta x_{i_r} \otimes Dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes Dx^{j_s}$$

Allora le componenti di $Dt : E \to \bigotimes^{r}_{s+1}\bar{E}$ sono del tipo

$$Dt^{i_1 \dots i_r}_{kj_1 \dots j_s} = \partial x_k . t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \Gamma^{i_1}_{hk}\, t^{hi_2 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \dots +$$

$$+\Gamma^{i_r}_{hk}\, t^{i_1 \dots i_{r-1} h}_{j_1 \dots j_s} - \Gamma^{h}_{j_1 k}\, t^{i_1 \dots i_r}_{hj_2 \dots j_s} \dots -$$

$$-\Gamma^{h}_{j_s k}\, t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{s-1} h} \quad \dot{-}$$

7 SISTEMI DI COORDINATE SUI SECONDI SPAZI TANGENTI E COTANGENTI

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n. Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E di classe $\mathcal{C}^\infty$.

E' possibile estendere, in modo naturale, tale sistema di coordinate ai secondi spazi tangenti TTE e TT^*E, stabilendo così una biiezione tra essi e $\mathbb{R}^{4n}$.

Riusciamo nel nostro scopo, considerando le 2-applicazioni tangenti TTx e TT^*x, rispettivamente.

Ancora, in modo naturale, si estende x ai secondi spazi cotangenti T^*TE e T^*T^*E mediante le 2-applicazioni cotangenti T^*Tx e T^*T^*x, rispettivamente.

Sono anche interessanti i sistemi di coordinate, indotti da x, sugli spazi νTTE e σT^*TE.

Si osservi che anche sui secondi spazi tangenti e cotangenti di E vi sono sistemi di coordinate non provenienti da sistemi su E.

5.7.1. PROPOSIZIONE

La 2-applicazione tangente di x

$$TTx : TTE \to \mathbb{R}^{4n}$$

data da $TTx:(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (Tx(p,\bar{u}) \; , D(Tx)(p,\bar{u})(\bar{v},\bar{w}))$

è un sistema di coordinate su TTE di classe $\mathcal{C}^\infty$.

$\forall(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE$ $\underline{\cdot}$

5.7.3. Abbiamo visto (5.4.3.) che assegnare il sistema di coordinate Tx su TE è equivalente ad assegnare la 2n-pla $(\check{x}^1,\ldots,\check{x}^n;\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)$.

Abbiamo, dunque, la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE. E'

$$TTx = ((Tx)^{\vee}\,,\,(Tx)^{\bullet}\,) = (\check{x}\,,\,\dot{\check{x}};\,\check{\dot{x}},\,\ddot{x})\,.$$

Più precisamente, è

$$((Tx)^{\vee 1},\ldots,(Tx)^{\vee n},(Tx)^{\vee n+1},\ldots,(Tx)^{\vee 2n};(Tx)^{\bullet 1},\ldots,(Tx)^{\bullet n},(Tx)^{\bullet n+1},\ldots,(Tx)^{\bullet 2n}\,) =$$

$$= (\check{x}^1,\ldots\check{x}^n,\dot{\check{x}}^1,\ldots,\dot{\check{x}}^n;\,\check{\dot{x}}^1,\ldots,\check{\dot{x}}^n,\,\ddot{x}^1,\,\ldots,\ddot{x}^n)\quad.$$

D. Per ogni $1 \leq i \leq n$, $(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE$, è

$$\check{x}^i(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv (x^i \circ p_E \circ p_{TE})(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = x^i(p)$$

$$\dot{x}^i(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv (\dot{x}^i \circ p_{TE})(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle$$

$$\dot{\check{x}}^i(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv \langle D\check{x}^i(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})\rangle \overset{1)}{=} \langle Dx^i(p),\bar{v}\rangle$$

$$\ddot{x}^i(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv \langle D\dot{x}^i(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})\rangle \overset{2)}{=}$$

$$= -\Gamma^i_{jk}(p)\langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle\langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle + \langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle\,.$$

Si ritrovano così le relazioni (*) $\underline{\cdot}$

1) (5.5.3.).
2) (5.5.4.).

5.7.4. Dunque, possiamo esprimere ogni elemento $(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in T_{(p,\bar{u})}TE$ tramite la base

$$\{\partial\check{x}_1,(p,\bar{u}),\ldots,\partial\check{x}_n(p,\bar{u});\ \partial\dot{x}_1(p,\bar{u}),\ldots,\partial\dot{x}_n(p,\bar{u})\}$$

di $T_{(p,\bar{u})}TE$.

PROPOSIZIONE

E'

$$(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w})=\langle Dx^i(p),\bar{v}\rangle\partial\check{x}_i(p,\bar{u}) -\Gamma^i_{jk}(p)\langle Dx^j(p)\bar{u}\rangle\langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle\partial x_i(p,\bar{u})+\langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle\partial x_i(p,\bar{u}$$

D. Posto $TE \equiv F$, $(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv (q,\bar{z}) \in T_qF$, $(\check{x}^i,\dot{x}^i) \equiv y^i$, allora il risultato segue dalla nota relazione

$$(q,\bar{z}) \equiv \langle Dy^i(q),\bar{z}\rangle\partial y_i(q) \quad \underline{\cdot}$$

5.7.5. Dunque, possiamo dare l'espressione in coordinate di $\Gamma : TTE \to \nu TTE$.

PROPOSIZIONE

E'

$$\check{\check{x}}^i \circ \Gamma = \check{\check{x}}^i$$

$$\check{\dot{x}}^i \circ \Gamma = \check{\dot{x}}^i$$

$$\dot{\check{x}}^i \circ \Gamma = 0$$

$$\ddot{x}^i \circ \Gamma = \ddot{x}^i + \check{\check{\Gamma}}^i_{jk}\, \dot{x}^j\, \dot{\check{x}}^k \quad .$$

D. Le prime tre relazioni sono ovvie. Inoltre, è

$$(\ddot{x}^i \circ \Gamma)(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) = \langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle = -\Gamma^i_{jk}(p)\langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle\langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle+\langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle +$$

$$+ \Gamma^i_{jk}(p)\langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle\langle Dx^k(p),\bar{v}\rangle =$$

$$=(\ddot{x}^i + \check{\Gamma}^i_{jk}\check{\dot{x}}^j\,\dot{\check{x}}^k)(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \qquad \forall(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE \;.$$

5.7.6. PROPOSIZIONE Sia F uno spazio affine di dimensione m.

Sia $y \equiv (y^1,..,y^m) : F \to R^m$ un sistema di coordinate su F, di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile almeno due volte.

Allora è

- $\check{\check{y}}^i \circ TTf = \check{\check{f}}^i$

- $\check{\dot{y}}^i \circ TTf = \check{(\partial x_j . f^i)}\,\check{\dot{x}}^j$

- $\dot{\check{y}}^i \circ TTf = \check{(\partial x_j . f^i)}\,\dot{\check{x}}^j$

- $\ddot{y}^i \circ TTf = \check{(\partial x_k . \partial x_j . f^i)}\,\dot{\check{x}}^k\check{\dot{x}}^j + \check{(\partial x_j . f^i)}\,\ddot{x}^j$.

D. Segue immediatamente dalla proposizione 5.4.9. $\dot{-}$

Facciamo ora uno studio in coordinate delle e.d.s.o.

5.7.7. Esprimiamo in coordinate la proposizione 3.3.2. che caratterizza le curve basiche.

PROPOSIZIONE Sia $I \subset R$. Sia $c : I \to TE$ una curva $\mathcal{C}^\infty$ e sia

$$\gamma \equiv p_E \circ c : I \to E.$$

Allora c è una curva basica se e solo se è

$$\dot{x}^i \circ c \equiv c^{\bar{i}} = Dc^i \equiv D(\check{x}^i \circ c) = D(x^i \circ \gamma) \qquad \underline{\cdot}$$

5.7.8. Esprimiamo in coordinate il teorema 3.3.4. che caratterizza una e.d.s.o. .

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ un campo vettoriale $\mathcal{C}^\infty$ dato da

$$\bar{X} = X^i \partial\check{x}_i + X^{\bar{i}} \partial\dot{x}_i \quad .$$

Sia, dunque

$$\check{\check{x}}^i \circ \bar{X} = \check{x}^i \qquad , \qquad \dot{\check{x}}^i \circ \bar{X} = \dot{x}^i \ .$$

Allora le tre condizioni seguenti sono equivalenti.

a) $\bar{X}$ è una e.d.s.o. .

b) E'
$$\bar{X} = \dot{x}^i \, \partial\check{x}_i + X^{\bar{i}} \, \partial\dot{x}_i \ .$$

c) E'
$$\dot{\check{x}}^i \circ \bar{X} = \dot{x}^i \quad ; \ \ddot{x}^i \circ \bar{X} = X^{\bar{i}} \qquad \underline{\cdot}$$

5.7.9. In particolare l'espressione della e.d.s.o. geodetica, è

$$\bar{X}_o = \dot{x}^i \partial\check{x}_i - \check{\Gamma}^i_{jk} \, \dot{x}^j \dot{x}^k \, \partial\dot{x}_i \quad .$$

5.7.10. Esprimiamo in coordinate il teorema 3.3.6. che caratterizza le soluzioni di una e.d.s.o. .

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} = X^i \partial \check{x}_i + X^{\bar{i}} \partial \dot{x}_i$ una e.d.s.o. e sia $\gamma : I \to E$ una curva $\mathcal{C}^\infty$.

Allora γ è una soluzione di $\bar{X}$ se e solo se è

$$D^2(x^i \circ \gamma) \equiv D^2\gamma^i \equiv X^{\bar{i}} \circ d\gamma \quad .$$

5.7.11. Esprimiamo in coordinate la proposizione 3.3.10. che caratterizza un integrale primo di $\bar{X}$, mediante $\bar{X}$.

PROPOSIZIONE. Sia $\bar{X} = X^i \partial \check{x}_i + X^{\bar{i}} \partial \dot{x}_i$ una e.d.s.o. . Sia $f : TE \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$.

Allora f è un integrale primo di $\bar{X}$ se e solo se è

$$\dot{x}^i \partial \check{x}_i . f + X^{\bar{i}} \partial \dot{x}_i . f = 0 \quad .$$

D. Segue da 3.3.2. e 3.3.10. .

5.7.12. Diamo ora il sistema di coordinate su $TT^{*}E$, indotto da x.

PROPOSIZIONE

La 2-applicazione tangente di x

$$TT^{*}x : TT^{*}E \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$$

data da $$TT^{*}x : (p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \mapsto (T^{*}(x), D(T^{*}x)(p,\underline{u})(\bar{v},\underline{\omega}))$$

è un sistema di coordinate su $TT^{*}E$ di classe $\mathscr{C}^{\infty}$ $\underline{\cdot}$

Per ottenere l'espressione esplicita di $TT^{*}x$, in termini di funzioni coordinate, procediamo nel modo seguente.

5.7.13. PROPOSIZIONE Sia $T^{*}x = ((T^{*}x)^{1},\ldots,(T^{*}x)^{n};(T^{*}x)_{n+1},\ldots,(T^{*}x)_{2n})$ il sistema di coordinate su $T^{*}E$, indotto da x.

Allora è

$$TT^{*}x = ((\check{T^{*}x}), (\dot{T^{*}x})) =$$

$$= (\check{\hat{x}}^{1},\ldots,\check{\hat{x}}^{n},\check{\dot{x}}_{1},\ldots,\check{\dot{x}}_{n};\dot{\hat{x}}^{1},\ldots,\dot{\hat{x}}^{n},\ddot{x}_{1},\ldots,\ddot{x}_{n}) .$$

Dunque, le funzioni coordinate di $TT^{*}x$ sono le $4n$ applicazioni differenziabili

$$(TT^{*}x)^{i} = (\check{T^{*}x})^{i} = \check{\hat{x}}^{i} \quad : TT^{*}E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(TT^{*}x)_{n+i} = (\check{T^{*}x})_{n+i} = \check{\dot{x}}_{i} : TT^{*}E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(TT^{*}x)^{2n+i} = (\dot{T^{*}x})^{i} = \dot{\hat{x}}^{i} : TT^{*}E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(TT^*x)_{3n+i} = \dot{(T^*x)}_{n+i} = \ddot{x}_i : TT^*E \to \mathbb{R}$$

$\forall\ 1 \leq i \leq n$,

date da

$$\check{\hat{x}}^i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = x^i(p)$$

$$\check{\dot{x}}_i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = <\underline{u},\delta x_i(p)>$$

$$\dot{\hat{x}}^i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = <Dx^i(p),\bar{v}>$$

$$\ddot{x}_i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = \Gamma^k_{ij}(p) <Dx^j(p),\bar{v}><\underline{u},\delta x_k(p)> + < \underline{\omega} ,\delta x_i(p)> ,$$

$\forall\ (p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \in TT^*E$.

D. E'

$$\check{\hat{x}}^i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \equiv (x^i \circ q_E \circ p_{T^*E})(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = x^i(p) \quad .$$

$$\check{\dot{x}}_i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \equiv (\dot{x}_i \circ p_{T^*E})(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) = <\underline{u},\ \delta x_i(p)> .$$

$$\dot{\hat{x}}^i(p,u;\bar{v},\underline{\omega}) \equiv <D\hat{x}^i(p,\underline{u}) ,\ (\bar{v},\underline{\omega})> \overset{1)}{=} <Dx^i(p),\bar{v}> \quad .$$

$$\ddot{x}_i(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \equiv <D\dot{x}_i(p,\underline{u}),(\bar{v},\underline{\omega})> \overset{2)}{=} \Gamma^k_{ij}(p)<Dx^j(p),\bar{v}><\underline{u},\delta x_k(p)>+<\underline{\omega},\delta x_i(p)> .$$

5.7.14. Dunque, possiamo esprimere ogni elemento $(p,\underline{u},\bar{v},\underline{\omega}) \in T_{(p,\underline{u})}T^*E$

nella base

$$\{\partial\hat{x}_1(p,\underline{u}),..,\partial\hat{x}_n(p,\underline{u});\partial\dot{x}_1(p,\underline{u}),..,\partial\dot{x}_n(p,\underline{u})\}$$

di $T_{(p,\underline{u})}T^*E$.

1)(5.5.3.)
2)(5.5.10.)

PROPOSIZIONE

E'

$$(p,\underline{u};\ \bar{v},\underline{\omega}) = \langle Dx^i(p,\bar{v}\rangle\ \partial\hat{x}_i(p,\underline{u}) + \Gamma^k_{ij}(p)\langle Dx^j(p),\bar{v}\rangle\langle\underline{u},\delta x_k(p)\rangle\partial\dot{x}_i(p,\underline{u}) +$$

$$+ \langle\ \underline{\omega}\ ,\delta x_i(p)\rangle\partial\dot{x}_i(p,\underline{u}) \quad .$$

D. Posto $T^*E \equiv F$, $(p,\underline{u};\bar{v},\underline{\omega}) \equiv (q,\bar{z}) \in T_qF$, $(\hat{x}^i,\dot{x}_i) \equiv y^i$, allora

il risultato segue dalla nota relazione

$$(q,\bar{z}) = \langle Dy^i(q),\ \bar{z}\rangle\ \partial y_i(q) \quad \underline{\cdot}$$

5.7.15. Diamo ora il sistema di coordinate su T^*TE, indotto da x.

PROPOSIZIONE

La 2-applicazione cotangente di x

$$T^*Tx : T^*TE \to \mathbb{R}^{4n}$$

data da $\qquad T^*Tx:(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \mapsto (Tx(p,\bar{u}),(\underline{\nu},\underline{\omega}) \circ D(Tx)^{-1}(Tx(p,\bar{u})))$

è un sistema di coordinate su T^*TE di classe $\mathscr{C}^\infty$ $\underline{\cdot}$

Per ottenere l'espressione esplicita di T^*Tx, in termini di funzioni coordinate, procediamo nel modo seguente.

5.7.16. PROPOSIZIONE Sia $Tx = ((Tx)^1,..,(Tx)^n;(Tx)^{n+1},..,(Tx)^{2n})$

il sistema di coordinate su TE, indotto da x.

Allora è

$$T^*Tx = ((\hat{Tx})^1,\ldots,(\hat{Tx})^{2n};(\dot{Tx})_1,\ldots,(\dot{Tx})_{2n}) \simeq$$

$$= (\hat{\check{x}}^1,\ldots,\hat{\check{x}}^n,\hat{\dot{x}}^1,\ldots,\hat{\dot{x}}^n;\ \dot{\check{x}}_1,\ldots\dot{\check{x}}_n,\ddot{x}_1,\ldots,\ddot{x}_n)\ .$$

Dunque, le funzioni coordinate di T^*Tx sono le 4n applicazioni differenziabili

$$(T^*Tx)^i = (\hat{Tx})^i = \hat{\check{x}}^i \qquad : T^*TE \to \mathbb{R}$$

$$(T^*Tx)^{n+i} = (\hat{Tx})^{n+i} = \hat{\dot{x}}^i \qquad : T^*TE \to \mathbb{R}$$

$$(T^*Tx)_{2n+i} \overset{1)}{=} (\dot{Tx})_i \overset{2)}{\simeq} \dot{\check{x}}_i \quad : T^*TE \to \mathbb{R}$$

$$(T^*Tx)_{3n+i} \overset{1)}{=} (\dot{Tx})_{n+i} \overset{2)}{\simeq} \ddot{x}_i \quad : T^*TE \to \mathbb{R} \quad ,$$

$\forall\ 1 \leq i \leq n$,

date da

$$\hat{\check{x}}^i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) = x^i(p)$$

$$\hat{\dot{x}}^i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) = \langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle$$

---

1) Si osservi che $(\dot{Tx})_i$ $(\forall\ 1 \leq i \leq 2n)$ è ottenuto eseguendo l'operazione "·" su $(Tx)_i$ e non la proiezione i-ma su $(\dot{Tx})$, perché $(\dot{Tx})$ non ha significato.

2) La notazione corretta è $(\dot{Tx})_i$ e $(\dot{Tx})_{n+i}$, invece il simbolo $\dot{\check{x}}_i$ e $\ddot{x}_i$ è un abuso di linguaggio, in quanto $\check{x}_i$ non dipende solo da "$\vee$" e $\dot{x}^i$ non dipende solo da " · " .

$$\check{\dot{x}}_i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) = \Gamma^k_{ij}(p)<Dx^j(p),\bar{u}> <\underline{\omega},\delta x_k(p)> +< \underline{\nu},\delta x_i(p) >$$

$$\ddot{x}_i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) =< \underline{\omega} ,\delta x_i(p)> \quad ,$$

$\forall\ (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \in T^*TE$.

D. E'

$$\hat{\check{x}}^i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \equiv (x^i \circ p_E \circ q_{TE})(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) = x^i(p) \ .$$

$$\hat{\dot{x}}^i(p,\bar{u} ;\underline{\nu},\underline{\omega}) \equiv(\dot{x}^i \circ q_{TE})(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega})=< Dx^i(p),\bar{u} >$$

$$\check{\dot{x}}_i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \equiv <(\underline{\nu},\underline{\omega}),\delta\check{x}_i(p,\bar{u})>= $$
$$=\Gamma^k_{ij}(p)<Dx^j(p),\bar{u}><\underline{\omega},\delta x_k(p)> + < \underline{\nu},\delta x_i(p)>$$

$$\ddot{x}_i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \equiv <(\underline{\nu},\underline{\omega}),\delta\dot{x}_i(p,\bar{u})> = <\underline{\omega}, \delta x_i(p)> \quad \dot{-}$$

5.7.17. Dunque, possiamo esprimere ogni elemento $(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega})\in T^*_{(p,\bar{u})}TE$ nella base

$$\{d\check{x}^1(p,\bar{u}),\dots,d\check{x}^n(p,\bar{u});d\dot{x}^1(p,\bar{u}),\dots,d\dot{x}^n(p,\bar{u})\}$$

di $T^*_{(p,\bar{u})}TE$.

PROPOSIZIONE

E'

$$(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) =\Gamma^k_{ij}(p) <Dx^j(p),\bar{u}><\underline{\omega},\delta x_k(p)>d\check{x}^i(p,\bar{u})+< \underline{\nu},\delta x_i(p)> d\check{x}^i(p,\bar{u}) +$$

$+<\underline{\omega},\ \delta x_i(p)>d\dot{x}^i(p,\bar{u})$.

D. Posto $TE \equiv F$, $(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \equiv (q,\underline{z}) \in T^*_q F$,$(\check{x}^i,\dot{x}^i) \equiv y^i$, allora il risultato segue dalla nota relazione

$$(q,\underline{z}) \equiv <\underline{z},\delta y_i(q)> dy^i(q) \quad \underline{\cdot}$$

5.7.18. Diamo ora il sistema di coordinate su T^*T^*E, indotto da x.

PROPOSIZIONE

La 2-applicazione cotangente di x

$$T^*T^*x : T^*T^*E \to \mathbb{R}^{4n}$$

data da

$$T^*T^*x :(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \mapsto (T^*x(p,\underline{u}),(\underline{\nu},\bar{w})\circ D(T^*x)^{-1}(T^*x(p,\underline{u})))$$

è un sistema di coordinate su T^*T^*E di classe $\mathscr{C}^\infty$ $\underline{\cdot}$

Per ottenere l'espressione esplicita di T^*T^*x, in termini di funzioni coordinate, procediamo nel modo seguente.

5.7.10. PROPOSIZIONE. E'

$$T^*T^*x =((\widehat{T^*x})^1,\dots,(\widehat{T^*x})^n,(\widehat{T^*x})_{n+1};(\widehat{T^*x})_{2n};(\dot{T^*x})_1,\dots,(\dot{T^*x})_n,(\dot{T^*x})^{n+1},\dots,(\dot{T^*x})^{2n})$$

$$\simeq(\hat{x}^1,\dots,\hat{x}^n\ ,\ \hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n;\ \dot{\hat{x}}_1,\dots,\dot{\hat{x}}_n,\ddot{x}^1,\dots,\ddot{x}^n\ ) .$$

Dunque, le funzioni coordinate di T^*T^*x sono le $4n$ applicazioni differenziabili

$$(T^*T^*x)^i = (T^{\hat{*}}x)^i = \hat{x}^i \qquad : T^*T^*E \to \mathbb{R}$$

$$(T^*T^*x)_{n+i} = (T^{\hat{*}}x)_{n+i} = \hat{\dot{x}}_i \qquad : T^*T^*E \to \mathbb{R}$$

$$(T^*T^*x)_{2n+i} \overset{1)}{=} (T^{\dot{*}}x)_i \overset{2)}{\cong} \dot{\hat{x}}_i \qquad : T^*T^*E \to \mathbb{R}$$

$$(T^*T^*x)^{2n+i} \overset{1)}{=} (T^{\dot{*}}x)^{n+i} \overset{2)}{\cong} \ddot{x}^i \quad : T^*T^*E \to \mathbb{R} \quad ,$$

$\forall\ 1 \leq i \leq n$,

$$\hat{x}^i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = x^i(p)$$

$$\hat{\dot{x}}_i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = \langle\ \underline{u},\delta x_i(p)\rangle$$

$$\dot{\hat{x}}_i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = -\Gamma_{ij}^{k}(p)\langle Dx^j(p),\bar{w}\rangle\langle\underline{u},\delta x_k(p)\rangle + \langle\ \underline{\nu},\delta x_i(p)\ \rangle$$

$$\ddot{x}^i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = \langle\ Dx^i(p),\bar{w}\ \rangle\ ,$$

$\forall (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \in T^*T^*E$.

---

1) si osservi che $(T^{\dot{*}}x)_i$ ($\forall\ 1 \leq i \leq 2n$) è ottenuto eseguendo l'operazione "$\cdot$" su $(T^*x)_i$ e non la proiezione i-ma su $(T^{\dot{*}}x)$, poiché $(T^{\dot{*}}x)$ non ha significato.

2) La notazione corretta è $(T^{\dot{*}}x)_i$ e $(T^{\dot{*}}x)_{n+i}$, invece il simbolo $\dot{\hat{x}}_i$ e $\ddot{x}^i$ è un abuso di linguaggio, poiché $\hat{x}^i$ non dipende solo da "$\wedge$" e $\dot{x}_i$ non dipende solo da "$\cdot$" .

D. E'

$$\hat{x}^i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \equiv (x^i \circ q_E \circ q_{T^*E})(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = x^i(p)$$

$$\dot{\hat{x}}^i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \equiv (x_i \circ q_{T^*E})(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = <\underline{u},\delta x_i(p)>$$

$$\dot{\hat{x}}_i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \equiv <(\underline{\nu},\bar{w}),\delta\hat{x}_i(p,\underline{u})> \overset{1)}{=}$$

$$= -\Gamma_{ij}^{k}(p)<Dx^j(p),\bar{w}><\underline{u},\delta x_k(p)> + <\underline{\nu},\delta x_i(p)>$$

$$\ddot{x}^i(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \equiv <(\underline{\nu},\bar{w}),\ \delta\dot{x}_i(p,\underline{u})> \overset{2)}{=} <Dx^i(p),\bar{w}> \quad .$$

5.7.20. Dunque, possiamo esprimere ogni elemento $(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \in T^*_{(p,\underline{u})}T^*E$ nella base

$$\{d\hat{x}^1(p,\underline{u}),\ldots,d\hat{x}^n(p,\underline{u});\ d\dot{x}_1(p,\underline{u}),\ldots,\ d\dot{x}_n(p,\underline{u})\}$$

di $T^*_{(p,\underline{u})}T^*E$.

PROPOSIZIONE

E'

$$(p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) = -\Gamma_{ij}^{k}(p)<Dx^j(p),\bar{w}> <\underline{u},\delta x_k(p)>d\hat{x}^i(p,\underline{u}) + <\underline{\nu},\delta x_i(p)>d\hat{x}^i(p,\underline{u}) +$$

$$+ <Dx^i(p),\bar{w}>\ d\dot{x}_i(p,\underline{u}) \quad .$$

D. Posto $T^*E \equiv F, (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \equiv (q,\underline{z}) \in T^*_qF$, $(\hat{x}^i,\dot{x}_i) \equiv y^i$,

---

1) (5.5.12.) .

2) (5.5.13.) .

allora il risultato segue dalla nota relazione

$$(q,\underline{z}) \equiv \langle \underline{z}, \delta y_i(q) \rangle \, dy^i(q) \qquad \underline{.}$$

5.7.21. E' interessante lo studio del sistema di coordinate su νTTE, indotto da x.

PROPOSIZIONE

L'applicazione

$$\nu TTx \equiv \hat{p^3} \circ TTx \circ j \quad : \nu TTE \to TTE \to \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{3n}$$

è un sistema di coordinate sullo spazio verticale νTTE di classe $\mathcal{C}^\infty$ (dove $\hat{p^3} : \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{3n}$ è l'applicazione data da

$$\hat{p^3}(\lambda,\mu;\xi,\eta) \equiv (\lambda,\mu,\eta), \qquad \forall (\lambda,\mu;\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{4n} ,$$

e dove $j : \nu TTE \to TTE$ è l'inclusione naturale) .

D. L'applicazione νTTx così definita è una biiezione, la cui inversa è $(\nu TTx)^{-1} = j^{-1} \circ (TTx)^{-1} \circ (\hat{p^3})^{-1} : \mathbb{R}^{3n} \to \nu TTE$.

Inoltre, νTTx e $(\nu TTx)^{-1}$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$, essendo le relative composizioni costituite da applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$ $\underline{.}$

Dunque, le funzioni coordinate di νTTx sono le 3n applicazioni differenziabili

$$(\check{x}^1,..,\check{x}^n \; , \; \dot{\check{x}}^1,..,\dot{\check{x}}^n \; , \; \ddot{x}^1,..,\ddot{x}^n)$$

date da

$$\check{x}^i(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = x^i(p)$$

$$\dot{\check{x}}^i(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = < Dx^i(p),\bar{u} >$$

$$\ddot{x}^i(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = < Dx^i(p),\bar{w} > \quad ,$$

$\forall\ (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \in \nu TTE$.

5.7.22. Possiamo, quindi, esprimere ogni elemento $(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \in \nu T_{(p,\bar{u})}TE$ nella base

$$\{\partial\dot{x}_1(p,\bar{u}),\ldots,\partial\dot{x}_n(p,\bar{u})\}$$

di $\nu T_{(p,\bar{u})}TE$.

Dunque, da 5.7.4. segue che

$$(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = <Dx^i(p),\bar{w}>\partial\dot{x}_i(p,\bar{u}) \ .$$

5.7.23. E' interessante anche lo studio del sistema di coordinate su oT^*TE, indotto da x.

PROPOSIZIONE

L'applicazione

$$oT^*Tx \equiv \hat{p}^4 \circ T^*Tx \circ j^* : oT^*TE \to \mathbb{R}^{3n}$$

è un sistema di coordinate sullo spazio orizzontale oT^*TE, di classe $\mathcal{C}^\infty$ (dove $\hat{p}^4 : \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{3n}$ è l'applicazione data da

$$\hat{p}^4(\lambda,\mu\,;\xi,\eta) \equiv (\lambda,\mu,\xi) \ , \ \forall(\lambda,\mu;\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{4n} \ ,$$

e dove $j^*: oT^*TE \to T^*TE$ è l'applicazione naturale) .

D. L'applicazione oT^*Tx così definita è una biiezione, la cui inversa è $(oT^*Tx)^{-1} = (j^*)^{-1} \circ (T^*Tx)^{-1} \circ (\hat{p}^4)^{-1} : \mathbb{R}^{3n} \to o\,T^*TE$.

Inoltre oT^*Tx e $(oT^*Tx)^{-1}$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$, essendo le relative composizioni costituite da applicazioni di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Dunque, le funzioni coordinate di oT^*Tx sono le 3n applicazioni differenziabili

$$(\hat{\check{x}}^1,..,\hat{\check{x}}^n \ , \ \hat{\dot{x}}^1,..,\hat{\dot{x}}^n, \ \check{x}_1,..,\check{x}_n \ )$$

date da

$$\hat{\check{x}}^i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) = x^i(p)$$

$$\hat{\dot{x}}^i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) = \langle Dx^i(p),\bar{u} \rangle$$

$$\check{x}_i(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) = \langle \underline{\nu},\delta x_i(p)\rangle \ ,$$

$\forall(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) \in o\,T^*TE$.

5.7.24. Possiamo, quindi, esprimere ogni elemento $(p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{o}) \in oT^*_{(p,\bar{u})}TE$ nella base

$$\{d\check{x}^1(p,\bar{u}),..,d\check{x}^n(p,\bar{u})\}$$

di $oT^*_{(p,\bar{u})}TE$.

Dunque, da 5.7.10 segue che

$$(p,\bar{u};\nu,o) = \underline{\nu},\delta x_i(p) > d\check{x}^i(p,\bar{u})$$

8 CALCOLO DELLA METRICA

0 Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione n. Sia $x : E \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su E, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e siano $B \equiv \{\delta x_1,..,\delta x_n\}$ e $B^* \equiv \{Dx^1,..,Dx^n\}$ le basi, indotte da x, per i campi di vettori e di covettori su E, l'una duale dell'altra.

Possiamo applicare anche su $\underline{g}$ le solite regole algebriche con le basi B e B^*. Dunque si possono rivedere, in termini matriciali, tutte le nozioni del 4° capitolo, espresse mediante basi qualsiasi.

Le matrici (g_{ij}) e (g^{hk}) date, quindi, da

$$g_{ij} \equiv \delta x_i \cdot \delta x_j \qquad , \; g^{hk} \equiv Dx^h \cdot Dx^k \quad ,$$

che sono l'una inversa dell'altra, sono molto interessanti poiché sono utilizzate per l'espressione e per il calcolo in coordinate dei campi $\underline{g}$ e $\bar{g}$, della funzione metrica g e della co-funzione metrica g^*, delle applicazioni $\underset{\sim}{g}$ e $\tilde{g}$, ecc... .

Si noti che la connessione affine Γ non dipende dalla metrica (è definita anche se E non è euclideo), ma solo dalla struttura affine, anche se la sua espressione in coordinate, può essere data in modo tale da far comparire le matrici (g_{ij}) e (g^{hk}). Ciò dipende dal fatto che i simboli di Christoffel possono essere espressi anche tramite la derivata delle componenti di un qualsiasi campo tensoriale costante del 2° ordine, simmetrico e non degenere. La simmetria permette lo scambio degli indici delle matrici (g_{ij}) e (g^{hk}), la proprietà "non degenere" permette il passaggio dalla matrice (g_{ij}) alla sua inversa.

5.8.1. PROPOSIZIONE Sia $\underline{g} : E \to \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$ e $\bar{g} : E \to \bar{E} \otimes \bar{E}$ il campo tensoriale metrico covariante e controvariante, rispettivamente.

Allora è

$$\underline{g} = g_{ij} Dx^i \otimes Dx^j$$

$$\bar{g} = g^{hk} \, \delta x_h \otimes \delta x_k$$

dove

$$g_{ij} \equiv \underline{g}(\delta x_i, \delta x_j) \equiv \delta x_i \cdot \delta x_j : E \to \mathbb{R}$$

$$g^{hk} \equiv \bar{g}(Dx^h, Dx^k) \equiv Dx^h \cdot Dx^k : E \to \mathbb{R} .$$

In termini di campi tensoriali applicati, abbiamo anche

$$\underline{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

$$\bar{g} = g^{hk} \, \partial x_h \otimes \partial x_k$$

dove

$$g_{ij} \equiv \underline{g}(\partial x_i, \partial x_j) \equiv \partial x_i \cdot \partial x_j = \delta x_i \cdot \delta x_j : E \to \mathbb{R}$$

$$g^{hk} = \bar{g}(dx^h, dx^k) \equiv dx^h \cdot dx^k = Dx^h \cdot Dx^k : E \to \mathbb{R} .$$

Dunque, è anche

$$\hat{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad , \quad \hat{g}^{-1} = g^{hk} \partial x_h \otimes \partial x_k \; \dot{-}$$

5.8.2. Allora, poiché $\underline{g}$ e $\bar{g}$ sono simmetrici ricordiamo i seguenti risultati.

COROLLARIO

E'

$$g_{ij} = g_{ji} \quad , \; g^{hk} = g^{kh} \; .$$

Inoltre è

$$(g^{hk}) = (g_{hk})^{-1}$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} \qquad \dot{-}$$

5.8.3. Scriviamo ora le relazioni che permettono di esprimere ogni campo vettoriale in forma controvariante o in forma covariante. Scriviamo, inoltre, il prodotto scalare di due campi di vettori e di covettori.

PROPOSIZIONE Si considerino i campi $\bar{X},\bar{Y} \in \mathcal{X}E$, $\underline{X},\underline{Y} \in {}^{*}E$

dati da

$$\bar{X} = X^i \partial x_i \qquad , \; \underline{X} = X_j dx^j$$

$$\bar{Y} = \underline{Y}^h \partial x_h \qquad , \quad \underline{Y} = Y_k dx^k \quad .$$

Allora è

$$X^i = g^{ij} X_j$$

$$X_j = g_{ji} X^i \qquad .$$

Inoltre è

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = g_{ih} X^i Y^h$$

$$\underline{X} \cdot \underline{Y} = g^{jk} X_j Y_k \qquad \dot{-}$$

5.8.4. Ricordiamo che è

$$\underline{\eta} = \sqrt{\det(g_{ij})}\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

dove il numero reale non nullo $\sqrt{\det(g_{ij})}$ è la misura orientata del poliedro costituito dai vettori, nell'ordine, $\partial x_1, \ldots, \partial x_n$.

Ossia è

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \underline{\eta}(\partial x_1, \ldots, \partial x_n) \quad .$$

5.8.5. Esprimiamo ora in coordinate le applicazioni $\underset{\sim}{g}$ e $\tilde{g}$.

PROPOSIZIONE Si considerino le applicazioni

$$\underset{\sim}{g} : \nu TTE \to oT^*TE \qquad , \quad \tilde{g} : oT^*TE \to \nu TTE$$

date da $\underset{\sim}{g} : (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\underline{w},\underline{o})$, $\tilde{g} : (p,\bar{u};\underline{v},\underline{o}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{v})$.

Allora è

$$\underset{\sim}{g} = \check{g}_{ij} d\dot{x}^i \otimes d\check{x}^j$$

$$\tilde{g} = \check{g}^{ji}\ \partial\check{x}_j \otimes \partial\dot{x}_i \quad .$$

D. Il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\nu T_{(p,\bar{u})}TE \arrow[r] \arrow[d, "\underset{\sim}{g}"'] & T_pE \arrow[d, "\underline{g}"] \\
o T^*_{(p,\bar{u})}TE \arrow[r] & T^*_pE
\end{tikzcd}$$

dato da

$$\begin{tikzcd}
(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\underset{\sim}{g}"'] & (p,\bar{w}) \arrow[d, "\underline{g}"] \\
(p,\bar{u};\underline{w},\underline{o}) \arrow[r, mapsto] & (p,\underline{w})
\end{tikzcd}$$

è commutativo. Inoltre, poiché è

$$< dx^i , \partial x_j > \; = \; \delta^i_j \quad ,$$

allora, per gli isomorfismi canonici

$$\nu T_{(p,\bar{u})}TE \;\approx\; T_pE \quad , \quad o T^*_{(p,\bar{u})}TE \;\approx\; T^*_pE$$

è anche

$$<d\dot{x}^i , \partial\check{x}_j> \; = o \qquad , \qquad <d\dot{x}^i , \partial\dot{x}_j> \; = \delta^i_j$$

$$<d\check{x}^i , \partial\check{x}_j> \; = \delta^i_j \qquad , \qquad <d\check{x}^i , \partial\dot{x}_j> \; = o \qquad .$$

Ora, essendo

$$(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = < Dx^i(p),\bar{w}> \partial\dot{x}_i(p,\bar{u}) \qquad ,$$

$$(p,\bar{u};\underline{w},\underline{o}) = \langle \underline{w}, \delta x_j(p)\rangle \, d\check{x}^j(p,\bar{u}) \ ,$$

proviamo l'asserto. E'

$$\underset{\sim}{g}(p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) = \check{g}_{ij}(p,\bar{u})d\dot{x}^i(p,\bar{u}) \otimes d\check{x}^j(p,\bar{u})(\langle Dx^i(p),\bar{w}\rangle \partial\dot{x}_i(p,\bar{u})) =$$

$$= g_{ij}(p) \ \langle Dx^i(p),\bar{w} \rangle d\check{x}^j(p,\bar{u}) = \langle \underline{w},\delta x_j(p)\rangle \ d\check{x}^j(p,\bar{u}) \ .$$

E'

$$\tilde{g}(p,\bar{u};\underline{w},\underline{o}) = \check{g}^{ji}(p,\bar{u})\partial\check{x}_j(p,\bar{u}) \otimes \partial\dot{x}_i(p,\bar{u})(\langle \underline{w},\delta x_j(p)\rangle d\check{x}^j(p,\bar{u}) \ ) =$$

$$= g^{ji}(p)\langle \ \underline{w},\delta x_j(p)\rangle \ \partial\dot{x}_i(p,\bar{u}) = \langle \ Dx^i(p),\bar{w}\rangle\partial\dot{x}_i(p,\bar{u}) \quad \underline{.}$$

5.8.6. Diamo ora l'espressione in coordinate della funzione metrica g e della co-funzione metrica g^* .

PROPOSIZIONE Si consideri la funzione metrica

$$g : TE \to \mathbb{R}$$

data da $\qquad g:(p,\bar{u}) \mapsto \frac{1}{2} \ \underline{g}(p)(\bar{u},\bar{u}) \equiv \frac{1}{2} \ \bar{u} \cdot \bar{u} \quad .$

Allora è

$$g = \frac{1}{2} \ \check{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \quad .$$

Si consideri la co-funzione metrica

$$g^* : T^*E \to \mathbb{R}$$

data da $\qquad g^*:(p,\underline{u}) \mapsto \frac{1}{2}\,\bar{g}(p)(\underline{u},\underline{u}) \equiv \frac{1}{2}\ \underline{u}\cdot\underline{u}$.

Allora è

$$g^* = \frac{1}{2}\,\hat{g}^{hk}\,\dot{x}_h\,\dot{x}_k$$

D. Per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$g(p,\bar{u}) = \left(\frac{1}{2}\,g_{ij}(p)Dx^i(p) \otimes Dx^j(p)\right)(\bar{u},\bar{u}) = \frac{1}{2}\,g_{ij}(p)\langle Dx^i(p),\bar{u}\rangle\langle Dx^j(p),\bar{u}\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,\check{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\right)(p,\bar{u}) \qquad .$$

Per ogni $(p,\underline{u}) \in T^*E$, è

$$g^*(p,\underline{u}) = \left(\frac{1}{2}\,g^{hk}(p)\delta x_h(p) \otimes \delta x_k(p)\right)(\underline{u},\underline{u}) = \frac{1}{2}\,g^{hk}(p)\langle\underline{u},\delta x_h(p)\rangle\langle\underline{u},\delta x_k(p)\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,\hat{g}^{hk}\,\dot{x}_h\,\dot{x}_k\right)(p,\underline{u}) \qquad \dot{-}$$

5.8.7. COROLLARIO

E'

$$\dot{g} = \frac{1}{2}\,(\partial x_h . \check{\check{g}}_{ij})\dot{\check{x}}^h\dot{\check{x}}^i\dot{\check{x}}^j + \check{\check{g}}_{ij}\dot{\check{x}}^i\,\ddot{x}^j \qquad .$$

D. E'

$$\dot{g} \equiv Dg = \frac{1}{2}(\partial x_h . \check{\check{g}}_{ij})\,\dot{\check{x}}^h\dot{\check{x}}^i\dot{\check{x}}^j + \frac{1}{2}\,\check{\check{g}}_{ij}\ddot{x}^i\dot{\check{x}}^j + \frac{1}{2}\,\check{\check{g}}_{ij}\dot{\check{x}}^i\ddot{x}^j =$$

$$= \frac{1}{2}(\partial x_h . \check{\check{g}}_{ij})\dot{\check{x}}^h\dot{\check{x}}^i\dot{x}^j + \check{\check{g}}_{ij}\dot{x}^j\ddot{x}^j \qquad \dot{-}$$

5.8.8. La seguente proposizione è importante perché fornisce le relazioni tra le funzioni coordinate di Tx e le funzioni coordinate di T^*x.

PROPOSIZIONE

$\forall\ 1 \leq i \leq n$, è

$$\text{(a)}\ \begin{cases} \hat{x}^i \circ \hat{g} = \check{x}^i \\ \dot{x}_i \circ \hat{g} = \check{g}_{ij}\dot{x}^j = \partial\dot{x}_i . g \end{cases} \qquad \text{(b)}\ \begin{cases} \check{x}^i \circ \hat{g}^{-1} = \hat{x}^i \\ \dot{x}^i \circ \hat{g}^{-1} = \hat{g}^{ij}\dot{x}_j = \partial\dot{x}^i . g^* \end{cases} .$$

D. Dimostriamo le relazioni (a). Per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$(\hat{x}^i \circ \hat{g})(p,\bar{u}) = x^i(p) = \check{x}^i(p,\bar{u}) ,$$

$$(\dot{x}_i \circ \hat{g})(p,\bar{u}) = <\underline{u},\delta x_i(p)> = g_{ij}(p)<Dx^j(p),\bar{u}> = (\check{g}_{ij}\dot{x}^j)(p,\bar{u}) ,$$

inoltre, derivando l'espressione di g, è

$$\partial\dot{x}_i . g = \frac{1}{2}\check{g}_{ij}\dot{x}^j + \frac{1}{2}\check{g}_{ij}\dot{x}^i = \check{g}_{ij}\dot{x}^j .$$

Dimostriamo le relazioni (b). Per ogni $(p,\underline{u}) \in T^*E$, è

$$(\check{x}^i \circ \hat{g}^{-1})(p,\underline{u}) = x^i(p) = \hat{x}^i(p,\underline{u}) ,$$

$$(\dot{x}^i \circ \hat{g}^{-1})(p,\underline{u}) = <Dx^i(p),\bar{u}> = g^{ij} <\underline{u},\delta x_j(p)> = (\hat{g}^{ij}\dot{x}_j)(p,\underline{u}) ,$$

inoltre, derivando l'espressione di g^*, è

$$\partial\dot{x}^i . g^* = \frac{1}{2}\hat{g}^{ij}\dot{x}_j + \frac{1}{2}\hat{g}^{ij}\dot{x}_i = \hat{g}^{ij}\dot{x}_j \qquad \dot{-}$$

5.8.9. La seguente proposizione è importante perché fornisce le relazioni tra le funzioni coordinate di TTx e le funzioni coordinate di TT^*x.

PROPOSIZIONE

$\forall\ 1 \leq i \leq n$, è

$$
(a)\quad
\begin{cases}
\check{\hat{x}}^i \circ T\hat{g} = \check{\check{x}}^i \\
\check{\dot{x}}_i \circ T\hat{g} = \check{g}_{ij}\dot{\check{x}}^j = (\partial \check{\dot{x}}_i . g) \\
\dot{\hat{x}}^i \circ T\hat{g} = \dot{\check{x}}^i \\
\ddot{x}_i \circ T\hat{g} = (\partial x_k . \check{g}_{ij})\dot{\check{x}}^k \dot{\check{x}}^j + \check{g}_{ij}\ddot{x}^j
\end{cases}
$$

$$
(b)\quad
\begin{cases}
\check{x}^i \circ T\hat{g}^{-1} = \check{\hat{x}}^i \\
\dot{\check{x}}^i \circ T\hat{g}^{-1} = \hat{g}^{ij}\dot{x}_j = (\partial \check{\dot{x}}^i . g^*) \\
\dot{\check{x}}^i \circ T\hat{g}^{-1} = \dot{\hat{x}}^i \\
\ddot{x}^i \circ T\hat{g}^{-1} = (\partial x_k . \hat{g}^{ij})\dot{\hat{x}}^k \check{\dot{x}}_j + \check{\hat{g}}^{ij}\ddot{x}_j
\end{cases}
\quad .
$$

D. Sia $f : E \to F$ un'applicazione $\mathcal{C}^\infty$. Sia $y^i : F \to \mathbb{R}^m$ un sistema di coordinate su F, di classe $\mathcal{C}^\infty$. Ricordiamo le relazioni

$$
(c)\quad
\begin{cases}
\check{y}^i \circ Tf = \check{f}^i \\
\dot{y}^i \circ Tf = (\partial x_j . \check{f}^i)\dot{x}^j
\end{cases}
$$

dove $f^i \equiv y^i \circ f$.

Allora le relazioni (a) si ottengono da (c) ponendo

$f \equiv \hat{g}$ e $y^i \equiv (\hat{x}^i, \dot{x}_i)$; invece le relazioni (b) sono ottenute ponendo

$f \equiv \hat{g}^{-1}$ e $y^i \equiv (\check{x}^i, \dot{x}^i)$ $\underline{\cdot}$

5.8.10. Concludiamo questo interessante paragrafo con l'espressione in coordinate dei simboli di Christoffel .

PROPOSIZIONE Si consideri il generico simbolo di Christoffel

$$\Gamma^k_{ij} \equiv D\delta x_i(Dx^k, \delta x_j) = - D^2 x^k(\delta x_i, \delta x_j) \quad .$$

Allora è

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kh}(\partial x_i . g_{hj} + \partial x_j . g_{ih} - \partial x_h . g_{ij}) \quad .$$

Tale relazione è detta UGUAGLIANZA DI CHRISTOFFEL .

D. Sia $\underline{g} = g_{ij} Dx^i \otimes Dx^j$ il campo tensoriale metrico costante del 2° ordine, simmetrico e non degenere. Allora, è

$$o = D\underline{g} = (\partial x_h . g_{ij}) Dx^h \otimes Dx^i \otimes Dx^j - g_{ij}\, \Gamma^i_{hk} Dx^h \otimes Dx^k \otimes Dx^j - g_{ij} \Gamma^j_{hk} Dx^i \otimes Dx^h \otimes Dx^k =$$

$$= (\partial x_h . g_{ij} - g_{kj}\Gamma^k_{hi} - g_{hk}\, \Gamma^k_{ij})\, Dx^h \otimes Dx^i \otimes Dx^j \; .$$

Dunque è

$$\text{(a)} \qquad \partial x_h . g_{ij} - g_{kj}\Gamma^k_{hi} - g_{hk}\Gamma^k_{ij} = o \qquad .$$

Posto

$$\Gamma_{h,ij} \equiv g_{hk}\, \Gamma^k_{ij} \qquad , \quad \text{(forma covariante)}$$

poiché $\underline{g}$ è non degenere, è anche

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kh}\, \Gamma_{h,ij} \qquad \text{(forma controvariante)} \ .$$

Dalla relazione (a) segue

$$\text{(b)} \qquad \Gamma_{j,hi} + \Gamma_{h,ij} = \partial x_h . g_{ij}$$

e permutando gli indici è anche

$$\text{(c)} \qquad \Gamma_{i,jh} + \Gamma_{j,hi} = \partial x_j . g_{hi}$$

$$\text{(d)} \qquad \Gamma_{h,ij} + \Gamma_{i,jh} = \partial x_i . g_{hj} \ .$$

Queste tre relazioni esprimono la condizione affinché risulti $D\underline{g} = o$.

Dunque, sommando algebricamente le relazioni b),c),d) e ricordando che $\underline{g}$ è simmetrico, è

$$\Gamma_{h,ij} = \frac{1}{2}\,(\partial x_i . g_{hj} + \partial x_j . g_{ih} - \partial x_h . g_{ij})$$

ovvero

$$\Gamma^{k}_{ij} = \frac{1}{2} g^{kh}(\partial x_{i}.g_{hj} + \partial x_{j}.g_{ih} - \partial x_{h}.g_{ij}) \quad \dot{-}$$

Si noti che la connessione affine Γ non dipende dalla metrica (è definita anche se E non è euclideo), ma solo dalla struttura affine, anche se la sua espressione in coordinate è stata data in modo da far comparire le matrici (g_{ij}) e (g^{hk}). Ciò dipende dal fatto che i simboli di Christoffel possono essere espressi anche tramite la derivata delle componenti di un qualsiasi campo tensoriale costante del 2° ordine, simmetrico e non degenere.

9 CAMBIAMENTO DI COORDINATE

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n. Siano $x \equiv (x^1,..,x^n) : E \to \mathbb{R}^n$ e $y \equiv (y^1,...,y^n) : E \to \mathbb{R}^n$ due sistemi di coordinate su E, di classe $\mathcal{C}^\infty$. Siano, inoltre, $B \equiv \{\delta x_1,...,\delta x_n\}$, $B' \equiv \{\delta y_1,...,\delta y_n\}$ e $B^* \equiv \{Dx^1,...,Dx^n\}$, $B'^* \equiv \{Dy^1,...,Dy^n\}$ basi, rispettivamente, per i campi di vettori e di covettori su E, indotte da x e y, le une duali delle altre.

Parte di questo paragrafo è stato svolto, più in generale, precedentemente (5.3.). In tal caso daremo, semplicemente, i risultati.

Sono molto interessanti le "matrici jacobiane"$(\partial x_j . y^i)$, $(\partial y_i . x^j)$ l'una inversa dell'altra, che permettono il passaggio da un sistema di coordinate all'altro. Più precisamente, la matrice $(\partial x_j . y^i)$ lega gli elementi delle basi B^* e B'^*, mentre $(\partial y_i . x^j)$ lega gli elementi delle basi B e B'.

Dunque, possiamo dare le relazioni tra le funzioni coordinate di Tx e Ty, di T^*x e T^*y ecc... .

Molto interessante è la relazione che lega i simboli di Christoffel dati nei due sistemi di coordinate x e y.

Si noti un meccanismo pratico mnemonico.

5.9.1. PROPOSIZIONE

E'

$$Dy^i = (\partial x_j . y^i) Dx^j$$

$$\delta y_i = (\partial y_i . x^j) \delta x_j \quad .$$

Dunque, è anche

$$dy^i = (\partial x_j . y^i) dx^j$$

$$\partial y_i = (\partial y_i . x^j) \partial x_j \quad ,$$

dove

$$\partial x_j . y^i = <Dy^i, \delta x_j> = <dy^i, \partial x_j> = \dot{y}^i \circ \partial x_j = \dot{x}_j \circ dy^i \equiv D_1 (y^i \circ x_j)_0$$

$$\partial y_i . x^j = <Dx^j \; \delta y_i> = < dx^j, \partial y_i > = \dot{x}^j \circ \partial y_i = \dot{y}_i \circ dx^j \equiv D_1 (x^j \circ y_i)_0 \quad \dot{-}$$

Le matrici

$$(\partial x_j . y^i) \quad , \quad (\partial y_i . x^j)$$

sono dette MATRICI JACOBIANE dei cambiamenti di coordinate relativamente alle basi indotte da tali coordinate.

Si noti che tali matrici sono l'una inversa dell'altra perché i due cambiamenti di coordinate sono l'uno inverso dell'altro.

Nel capitolo successivo daremo le loro espressioni esplicite nei vari sistemi di coordinate cartesiano,sferico, cilindrico.

5.9.2. Dunque possiamo dare le relazioni tra le n funzioni coordinate $\dot{x}^1,..,\dot{x}^n$ di T x e le n funzioni coordinate $\dot{y}^1,..\dot{y}^n$ di T y.

PROPOSIZIONE

E' $\quad \dot{x}^j = (\partial y_i \,\check{.}\, x^j)\dot{y}^i \quad , \quad \dot{y}^i = (\partial x_j \,\check{.}\, y^i)\dot{x}^j \quad \dot{=}$

5.9.3. Dunque possiamo dare le relazioni tra le n funzioni coordinate $\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n$ di T^*x e le n funzioni coordinate $\dot{y}_1,\dots,\dot{y}_n$ di T^*y .

PROPOSIZIONE

E'

$$\dot{x}_j = (\partial x_j \,\hat{.}\, y^i)\dot{y}_i \quad , \quad \dot{y}_i = (\partial y_i \,\hat{.}\, x^j)\dot{x}_j \quad \dot{=}$$

5.9.4. Dunque possiamo dare le relazioni tra le $3n$ funzioni coordinate $\check{\dot{x}}^1,\dots\check{\dot{x}}^n$, $\dot{\breve{x}}^1,\dots\dot{\breve{x}}^n$, $\ddot{x}^1,\dots\ddot{x}^n$ di TTx e le $3n$ funzioni coordinate $\check{\dot{y}}^1,\dots,\check{\dot{y}}^n$, $\dot{\breve{y}}^1,\dots,\dot{\breve{y}}^n$, $\ddot{y}^1\dots,\ddot{y}^n$ di TTy .

PROPOSIZIONE

E'
$$\begin{cases} \check{\dot{y}}^i = (\partial x_j \,\check{\breve{.}}\, y^i)\ \check{\dot{x}}^j \\ \dot{\breve{y}}^i = (\partial x_j \,.\, y^i)\dot{\breve{x}}^j \\ \ddot{y}^i = (\partial x_k . \check{\breve{\partial}} x_j . y^i)\dot{\breve{x}}^k \check{\dot{x}}^j + (\partial x_j \,\check{\breve{.}}\, y^i)\ddot{x}^j \end{cases} .$$

D. Infatti, per ogni $(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \in TTE$, è

$$\breve{\dot{y}}^i(p,\bar u;\bar v,\bar w) = \langle Dy^i(p),\bar u\rangle = (\partial x_j . y^i)(p)\ \langle Dx^j(p),\bar u\rangle =$$

$$= [\ (\partial x_j . y^i)\breve{\dot{x}}^j\ ](p,\bar u;\bar v,\bar w)\ ;$$

$$\dot{\breve{y}}^i(p,\bar u;\bar v,\bar w) = \langle Dy^i(p),\bar v\rangle = (\partial x_j . y^i)(p)\ \langle Dx^j(p),\ \bar v\rangle =$$
$$= [\ (\partial x_j . y^i)\dot{\breve{x}}^j\ ](p,\bar u;\bar v,\bar w)\ ;$$

$$\ddot{y}^i(p,\bar u;\bar v,\bar w) = D^2y^i(p)(\bar u,\bar v) + Dy^i(p)(\bar w) = [\ D((\partial x_j . y^i)\,Dx^j)(p)](\bar u,\bar v) +$$

$$+ Dy^i(p)(\bar w) =$$

$$=((\partial x_k . \partial x_j . y^i)(p)Dx^k(p) \otimes Dx^j(p))(\bar u,\bar v)+(\partial x_j . y^i)(p)D^2x^j(p)(\bar u,\bar v)+$$

$$+ (\partial x_j . y^i)(p)Dx^j(p)(\bar w) =$$

$$=((\partial x_k . \partial x_j . y^i)\breve{\dot{x}}^k\dot{\breve{x}}^j + (\partial x_j . y^i)\ddot{x}^j)\ (p,\bar u;\bar v,\bar w) \qquad \dot{-}$$

Studiamo ora alcuni casi di applicazioni differenziabili .

1) CASO $f : \mathbb{R} \to E$.

5.9.5. PROPOSIZIONE Sia f una curva differenziabile.

Allora è

$$D(y^i \circ f) = (\partial x_j . y^i) \circ f\ D(x^j \circ f)$$

D. E' un caso particolare di 5.3.8. $\dot{-}$

2) CASO $f : E \to \mathbb{R}$.

5.9.6. PROPOSIZIONE Sia f una funzione differenziabile .

Allora è

$$\partial x_j.f = (\partial x_j.y^i)(\partial y_i.f) \quad .$$

D. Infatti è

$$\partial x_j.f = (\partial x_j.f)(\partial y_i.y^i) = (\partial x_j.y^i)(\partial y_i.f) \quad \dot{-}$$

5.9.7. Troviamo ora la relazione che lega i simboli di Christoffel nei due sistemi di coordinate .

PROPOSIZIONE Si considerino i generici simboli di Christoffell

$$'\Gamma^j_{hk} \equiv D\delta y_h(Dy^j, \delta y_k) \quad , \quad \Gamma^i_{\ell m} \equiv D\delta x_\ell(Dx^i, \delta x_m) \ .$$

Allora è

$$'\Gamma^j_{hk} = \Gamma^i_{\ell m}(\partial x_i.y^j)(\partial y_h.x^\ell)(\partial y_k.x^m)+(\partial x_i.y^j)(\partial y_h\partial y_k.x^i) \quad .$$

D. E'

$$'\Gamma^j_{hk} \equiv D((\partial y_h.x^\ell)\delta x_\ell)((\partial x_i.y^j)Dx^i, (\partial y_k.x^m)\delta x_m) =$$

$$=[(\partial y_k.\partial y_h.x^\ell)Dy^k \times \delta x_\ell+(\partial y_h.x^\ell)D\delta x_\ell]((\partial x_i.y^j)Dx^i,(\partial y_k.x^m) \delta x_m) =$$

$$=[(\partial y_k.\partial y_h.x^i)Dy^k \otimes \delta x_i+(\partial y_h.x^\ell)D\delta x_\ell] (\partial x_i.y^j)Dx^i,(\partial y_k.x^m)\delta x_m) =$$

$$= (\partial x_i.y^j)(\partial y_h.\partial y_k. x^i)(\partial x_m.y^k)(\partial y_k.x^m) +$$

$$+ (\partial x_i . y^j)(\partial y_h . x^\ell)(\partial y_k . x^m) D\delta x_\ell (Dx^i, \delta x_m) =$$

$$= \Gamma^{\;i}_{\ell m} (\partial x_i . y^j)(\partial y_h . x^\ell)(\partial y_k . x^m) + (\partial x_i . y^j)(\partial y_h . \partial y_k . x^i) \qquad \dot{-}$$

Si noti che la trasformazione dei simboli di Christoffel (che sono le componenti di Γ) non è lineare, in quanto Γ non è un tensore su E ma su TE.

5.9.8. Concludiamo il paragrafo con la relazione tra le matrici della metrica nei due sistemi di coordinate.

PROPOSIZIONE Si considerino

$$g'_{ij} \equiv \underline{g}(\delta y_i, \delta y_j) \equiv \delta y_i \cdot \delta y_j \quad , \; g_{hk} \equiv \underline{g}(\delta x_h, \delta x_k) \equiv \delta x_h \cdot \delta x_k \; .$$

Allora è

$$g'_{ij} = (\partial y_i . x^h)(\partial y_j . x^k) g_{hk} \qquad .$$

D. Infatti è

$$g'_{ij} \equiv \delta y_i \cdot \delta y_j = [\, (\partial y_i . x^h) \delta x_h] \cdot [(\partial y_j . x^k) \delta x_k \,] \quad =$$

$$= (\partial y_i . x^h)(\partial y_j . x^k) g_{hk} \qquad \dot{-}$$

0 INTRODUZIONE

In questo capitolo facciamo uno studio dei più importanti sistemi di coordinate, applicati frequentemente in vari campi della Matematica e della Fisica.

Possiamo, quindi, rivedere tutte quelle nozioni del capitolo precedente espresse in un qualsiasi sistema di coordinate.

Il primo sistema, che andiamo ad introdurre, è un sistema di coordinate "cartesiano ortonormale" definito su uno spazio affine euclideo E di dimensione 3.

La facile estensione ad uno spazio di n dimensioni è lasciata al lettore.

Tale sistema rispetta la struttura affine ed è senza dubbio il più semplice, perciò è molto usato per studiare problemi che presentano o meno, simmetrie particolari.

Si vede inoltre che le basi indotte da questo sistema sono costanti.

Dunque, i simboli di Christoffel sono tutti nulli.

Introduciamo poi un sistema di coordinate "sferico" su E il quale, a differenza di quello cartesiano, non è definito in tutto lo spazio: in caso contrario una delle sue funzioni coordinate non sarebbe continua.

Tale sistema rispetta la simmetria sferica, pertanto viene privilegiato per lo studio di problemi a simmetria sferica; anche se esso è meno semplice di quello cartesiano.

Un altro sistema di coordinate interessante è quello "cilindrico", il quale non è definito in tutto lo spazio E: in caso contrario una delle sue fun zioni coordinate non sarebbe continua.

Inoltre, tale sistema rispetta la simmetria cilindrica, pertanto viene privilegiato per lo studio di problemi a simmetria cilindrica.

A differenza di quello cartesiano, quest'ultimi due sistemi di coordinate inducono delle basi non costanti.

Dunque i simboli di Christoffel (relativi ai sistemi cilindrico-sferico) non sono tutti nulli.

Un sistema di coordinate sferico o cilindrico, ristretti al piano equatoriale, danno luogo ad un unico sistema di coordinate detto "polare".

Diamo, infine, una rappresentazione grafica dei tre sistemi di coordinate (dim E = 3), individuati da un punto e da una base ortonormale assegnati, precisando così le relative funzioni e curve coordinate.

Si tenga presente che esistono infiniti altri sistemi di coordinate.

1 SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANO ORTONORMALE

0 Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3.

La facile estensione dei seguenti risultati ad uno spazio di n dimensioni è lasciata al lettore.

Cominciamo questo paragrafo definendo su E un sistema di coordinate cartesiano ortonormale che, senza dubbio, è quello più frequentemente applicato nell'analisi classica. Tale sistema, che è anche il più semplice, rispetta la struttura affine.

Si osservi che su E è possibile definire infiniti altri sistemi di coordinate (cartesiani e non cartesiani).

Definito un sistema di coordinate cartesiano ortonormale $E \to \mathbb{R}^3$, possiamo precisare le basi, l'una duale dell'altra, per i campi di vettori e di covettori su E, osservando che esse sono costanti. Pertanto possiamo rivedere tutte quelle nozioni del precedente capitolo, espresse in un qualsiasi sistema di coordinate. Conseguentemente, si vede che le matrici della metrica danno luogo ad un'unica matrice che è quella unità (δ^i_j).

Inoltre si vede che i simboli di Christoffel sono tutti nulli, poiché le basi, indotte dal sistema cartesiano, sono costanti.

6.1.1. DEFINIZIONE Sia $o \in E$ un punto di E e sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base ortonormale di $\bar{E}$.

Dicesi SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANO ORTONORMALE individuato da (o,B), il sistema di coordinate

$$(x,y,z) : E \to \mathbb{R}^3$$

dato da

$$\begin{cases} x(p) \equiv (p-o) \cdot \bar{e}_1 \\ y(p) \equiv (p-o) \cdot \bar{e}_2 \\ z(p) \equiv (p-o) \cdot \bar{e}_3 \end{cases} \qquad \forall\, p \in E \quad .$$

Tale applicazione è biiettiva, poiché ogni vettore $(p-o)$ ha un'unica decomposizione secondo la base B.

In base ai teoremi di esistenza delle basi ortonormali in uno spazio vettoriale euclideo, si osserva che esistono infiniti sistemi di coordinate cartesiani ortonormali in uno spazio affine euclideo.

In seguito, per semplicità, indicheremo con (x,y,z) un sistema di coordinate cartesiano.

6.1.2. PROPOSIZIONE

Le tre funzioni coordinate $E \to \mathbb{R}$ del sistema cartesiano sono date da

$$\begin{cases} x(p) = \langle \underline{\varepsilon}^1 , (p-o)\rangle = \bar{e}_1 \cdot (p-o) \\ y(p) = \langle \underline{\varepsilon}^2 , (p-o)\rangle = \bar{e}_2 \cdot (p-o) \\ z(p) = \langle \underline{\varepsilon}^3 , (p-o)\rangle = \bar{e}_3 \cdot (p-o) \end{cases} \quad , \quad \forall\, p \in E \ ,$$

avendo posto

$$\underline{\varepsilon}^i \equiv {}'\underline{g}(\bar{e}_i) \qquad , \ \forall\ 1 \le i \le 3 \ .$$

Le tre curve coordinate $\mathbb{R} \times E \to E$ su E sono date da

$$x(\lambda,p) = p + \lambda \bar{e}_1$$

$$y(\lambda,p) = p + \lambda \bar{e}_2$$

$$z(\lambda,p) = p + \lambda\bar{e}_3 \qquad , \forall(\lambda,p) \in \mathbb{R} \times E \quad \dot{-}$$

Si osservi che, con abuso di linguaggio, si è indicato con la stessa notazione le funzioni coordinate e le curve coordinate.

6.1.3. Dunque, possiamo determinare i tre campi di covettori e i tre campi di vettori su E, indotti da (x,y,z).

PROPOSIZIONE

E'

$$Dx = \underline{\epsilon}^1 \quad , \quad Dy = \underline{\epsilon}^2 \quad , \quad Dz = \underline{\epsilon}^3$$

$$\delta x = \bar{e}_1 \quad , \quad \delta y = \bar{e}_2 \quad , \quad \delta z = \bar{e}_3 \quad .$$

D. Infatti, poiché (x,y,z) è differenziabile, è

$$x(p+\bar{h}) = \langle \underline{\epsilon}^1, p-o \rangle + \langle \underline{\epsilon}^1, \bar{h} \rangle = x(p) + \langle \underline{\epsilon}^1, \bar{h} \rangle \Rightarrow Dx = \underline{\epsilon}^1$$

$$y(p+\bar{h}) = \langle \underline{\epsilon}^2, p-o \rangle + \langle \underline{\epsilon}^2, \bar{h} \rangle = y(p) + \langle \underline{\epsilon}^2, \bar{h} \rangle \Rightarrow Dy = \underline{\epsilon}^2$$

$$z(p+\bar{h}) = \langle \underline{\epsilon}^3, p-o \rangle + \langle \underline{\epsilon}^3, \bar{h} \rangle = z(p) + \langle \underline{\epsilon}^3, \bar{h} \rangle \Rightarrow Dz = \underline{\epsilon}^3 \quad .$$

Inoltre, è

$$\delta x(p) = D_1 x(o,p) = \bar{e}_1$$

$$\delta y(p) = D_1 y(o,p) = \bar{e}_2$$

$$\delta z(p) = D_1 z(o,p) = \bar{e}_3 \quad \dot{-}$$

Dunque, il sistema di coordinate cartesiano (x,y,z) induce la base costante $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ per i vettori di $\bar{E}$ e la base costante $\{ \underline{e}^1,\underline{e}^2,\underline{e}^3 \}$ per i covettori di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

6.1.3. COROLLARIO

E'

$$\Gamma_{ij}^{k} = o \qquad , \forall\ 1 \leq i,j,k \leq 3.$$

E'

$$g^{ij}=g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ o & \text{se } i \neq j \end{cases} \qquad , \qquad \forall\ 1\leq i,j\leq 3.$$

D. I simboli di Christoffel sono nulli perché è

$$D\delta x = D\delta y = D\delta z = o$$

$\underline{\cdot}$

2 SISTEMA DI COORDINATE SFERICO

0 Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3.

Diamo in questo paragrafo un altro sistema di coordinate, più indicato a trattare problemi a simmetria sferica anche se meno semplice di quello cartesiano. Tale sistema, detto sferico, non è definito in tutto lo spazio, purché, in caso contrario una sua funzione coordinata (φ) non sarebbe continua.

Osserviamo, poi, che le basi indotte dalle relative funzioni e curve coordinate di E sono solo ortogonali e, inoltre, variano punto per punto, sicché occorre specificare, di volta in volta, il punto di applicazione.

Dunque, possiamo calcolare le matrici jacobiane dei cambiamenti di coordinate, relativamente ad un sistema di coordinate cartesiano e sferico.

Concludiamo, calcolando i simboli di Christoffel, i quali non sono tutti nulli poiché le basi, indotte da tale sistema, non sono costanti.

6.2.1. DEFINIZIONE Sia $o \in E$ un punto di E. Sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base ortonormale ordinata di $\bar{E}$. Sia $S \subset E$ il semipiano

$$S \equiv \{p \in E \; / \; (p-o)\cdot\bar{e}_2 = o \; , (p-o)\cdot\bar{e}_1 \geq o\} \; .$$

Dicesi SISTEMA DI COORDINATE SFERICO individuato da (o,B) l'applicazione

$$(r,\theta,\varphi) : E - S \to (o,\infty) \times (o,\pi) \times (o,2\pi) \subset \mathbb{R}^3$$

dato da

$$r(p) \equiv ||p-o||$$

$$\theta(p) \equiv \arccos[\,(p-o)\cdot\bar{e}_3/||p-o||\,]$$

$$\varphi(p) \equiv \begin{cases} \arccos[\,(p-o)\cdot\bar{e}_1/||p-o||\,] \\ \arccos[\,(p-o)\cdot\bar{e}_2/||p-o||\,] \end{cases} \quad ,\forall\ p \in E - S \ .$$

6.2.2. Dare l'espressione esplicita delle curve coordinate in questo sistema è alquanto difficoltoso. Al riguardo il lettore può leggere 6.5.2. .

6.2.3. Diamo ora, le relazioni che legano le funzioni coordinate dei sistemi cartesiano-sferico.

PROPOSIZIONE

E'

$$\begin{cases} x = r\ \mathrm{sen}\theta\cos\varphi \\ y = r\ \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ \varphi = \begin{cases} \mathrm{arcsen}(y/\sqrt{x^2+y^2}\,) & \text{se} \quad x \geq o \\ \mathrm{arcsen}(-y/\sqrt{x^2+y^2}\,) & \text{se} \quad x \leq o \end{cases} \end{cases} \ .$$

6.2.4. Utilizzando le precedenti relazioni, esplicitiamo ora le matrici jacobiane dei cambiamenti di coordinate relativamente alle basi indotte da tali coordinate. Si fa osservare che, con abuso di linguaggio, si è indicato le funzioni coordinate e le curve coordinate con la stessa notazione.

Dunque, è

$$(J_{12}) \overset{1)}{\equiv} \begin{pmatrix} \partial r.x & \partial\theta.x & \partial\varphi.x \\ \partial r.y & \partial\theta.y & \partial\varphi.y \\ \partial r.z & \partial\theta.z & \partial\varphi.z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J_{21}) \overset{1)}{\equiv} \begin{pmatrix} \partial x.r & \partial y.r & \partial z.r \\ \partial x.\theta & \partial y.\theta & \partial z.\theta \\ \partial x.\varphi & \partial y.\varphi & \partial z.\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi/r & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi/r & -\operatorname{sen}\theta/r \\ -\operatorname{sen}\varphi/r\operatorname{sen}\theta & \cos\varphi/r\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Conseguentemente, osservato che è $(J_{21}) = (J_{12})^{-1}$, abbiamo

$$\det(J_{12}) = r^2 \operatorname{sen}\theta \quad ,$$

$$\det(J_{21}) = 1/r^2 \operatorname{sen}\theta \ .$$

6.2.5. Siano $\{\delta r, \delta\theta, \delta\varphi\}$ e $\{Dr, D\theta, D\varphi\}$ le basi, indotte da (r,θ,φ) di $\bar{E}$ e $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

Possiamo riscrivere le relazioni, date in 5.9.1., nei sistemi di coordinate cartesiano-sferico.

Allora, è

$$\delta r = (\partial r.x)\bar{e}_1 + (\partial r.y)\bar{e}_2 + (\partial r.z)\bar{e}_3 = \operatorname{sen}\theta(\cos\varphi\bar{e}_1 + \operatorname{sen}\varphi\bar{e}_2) + \cos\theta\bar{e}_3$$

$$\delta\theta = (\partial\theta.x)\bar{e}_1 + (\partial\theta.y)\bar{e}_2 + (\partial\theta.z)\bar{e}_3 = r[\cos\theta(\cos\varphi\bar{e}_1 + \operatorname{sen}\varphi\bar{e}_2) - \operatorname{sen}\theta\ \bar{e}_3]$$

$$\delta\varphi = (\partial\varphi.x)\bar{e}_1 + (\partial\varphi.y)\bar{e}_2 + (\partial\varphi.z)\bar{e}_3 = r\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\varphi\bar{e}_1 + \cos\varphi\bar{e}_2)$$

---

1) L'indice 1 di J_{12} è riferito al sistema di coordinate cartesiano; invece l'indice 2 è riferito al sistema di coordinate sferico.

$$\begin{cases} Dr = (\partial x.r)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.r)\underline{\epsilon}^2 + (\partial z.r)\underline{\epsilon}^3 = \text{sen}\theta(\cos\varphi\underline{\epsilon}^1 + \text{sen}\varphi\underline{\epsilon}^2)+\cos\theta\underline{\epsilon}^3 \\ D\theta = (\partial x.\theta)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.\theta)\underline{\epsilon}^2 + (\partial z.\theta)\underline{\epsilon}^3 = 1/r[\ \cos\theta(\cos\varphi\ \underline{\epsilon}^1+\text{sen}\varphi\ \underline{\epsilon}^2)-\text{sen}\theta\ \underline{\epsilon}^3\ ] \\ D\varphi = (\partial x.\varphi)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.\varphi)\underline{\epsilon}^2 + (\partial z.\varphi)\underline{\epsilon}^3 = (\text{sen}\varphi\underline{\epsilon}^1+\cos\varphi\ \underline{\epsilon}^2)/r\ \text{sen}\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_1=\delta x=(\partial x.r)\delta r+(\partial x.\theta)\delta\theta+(\partial x.\varphi)\delta\varphi =\cos\varphi(\text{sen}\theta\ \delta r+\cos\theta/r\ \delta\theta)-\text{sen}\varphi/r\ \text{sen}\theta\ \delta\varphi \\ \bar{e}_2= \delta y=(\partial y.r)\delta r+(\partial y.\theta)\delta\theta+(\partial y.\varphi)\delta\varphi=\text{sen}\varphi(\text{sen}\theta\delta r+\cos\theta/r\ \delta\theta)+\cos\varphi/r\text{sen}\theta\ \delta\varphi \\ \bar{e}_3= \delta z=(\partial z.r)\delta r+(\partial z.\theta)\delta\theta+(\partial z.\varphi)\delta\varphi= \cos\theta\ \delta r - \text{sen}\theta/r\ \delta\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\epsilon}^1 = Dx=(\partial r.x)Dr+(\partial\theta.x)D\theta+(\partial\varphi.x)D\varphi= \cos\varphi(\text{sen}\theta\ Dr+r\ \cos\theta\ D\theta)-r\ \text{sen}\theta\ \text{sen}\varphi D\varphi \\ \underline{\epsilon}^2 = Dy=(\partial r.y)Dr+(\partial\theta.y)D\theta+(\partial\varphi.y)D\varphi = \text{sen}\varphi(\text{sen}\theta\ Dr+r\ \cos\theta D\theta)+ r\ \text{sen}\theta\ \cos\varphi D\varphi \\ \underline{\epsilon}^3 = Dz=(\partial r.z)Dr+(\partial\theta.z)D\theta + (\partial\varphi.z)D\varphi = \cos\theta\ Dr - r\ \text{sen}\theta\ D\theta. \end{cases}$$

6.2.6. Dunque, è

- $||\delta r|| \equiv (\delta r\cdot \delta r)^{\frac{1}{2}} = 1$
- $||\delta\theta|| \equiv (\delta\theta\cdot \delta\theta)^{\frac{1}{2}} = r$
- $||\delta\varphi|| \equiv (\delta\varphi \cdot\delta\varphi)^{\frac{1}{2}} = r\ \text{sen}\theta$

con la relazione d'ortogonalità della base $(\delta r,\delta\theta, \delta\varphi)$

$$\delta r \cdot \delta\theta = \delta r \cdot \delta\varphi= \delta\theta \cdot \delta\varphi= 0$$

In termini matriciali, è

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & o & o \\ o & r^2 & o \\ o & o & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & o & o \\ o & 1/r^2 & o \\ o & o & 1/r^2 sen^2\theta \end{pmatrix}$$

Facciamo, allora, le seguenti osservazioni.

a) E'

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} \quad .$$

b) E'

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = r^2 sen\theta,$$

$$\sqrt{\det(g^{ij})} = 1/\sqrt{\det(g_{ij})} = 1/r^2 sen\theta \quad .$$

6.2.7. Tenendo presente l'uguaglianza di Christoffel

$$\Gamma^i_{hk} = \frac{1}{2} g^{ij}(\partial y_h \cdot g_{jk} + \partial y_k \cdot g_{jh} - \partial y_j \cdot g_{hk})$$

diamo, dei 36, i 9 simboli di Christoffel non nulli. Il lettore farà un utile esercizio verificandone i risultati.

$$\Gamma^1_{22} = - r \quad , \Gamma^1_{33} = r \,\mathrm{sen}^2\theta \quad , \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/r \quad ,$$

$$\Gamma^2_{33} = - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, 2\theta \quad , \quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = 1/r \quad , \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cos\theta/\mathrm{sen}\theta \;.$$

Dunque, poiché $\Gamma_{j,hk} \equiv g_{ji}\Gamma^i_{hk}$, è anche

$$\Gamma_{1,22} = -r \quad , \quad \Gamma_{1,33} = r\,\mathrm{sen}^2\theta \quad , \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = r$$

$$\Gamma_{2,33} = - \frac{r^2}{2}\,\mathrm{sen}\, 2\theta \quad , \quad \Gamma_{3,13} = \Gamma_{3,31} = r\,\mathrm{sen}^2\theta \quad , \quad \Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32} = \frac{r^2}{2}\,\mathrm{sen} 2\theta \,.$$

3. SISTEMA DI COORDINATE CILINDRICO

0 Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3.

Il sistema di coordinate che andiamo a definire, detto cilindrico, è un "misto" di quello cartesiano e sferico. Si fa uso di tale sistema per lo studio di problemi a simmetria cilindrica.

Il sistema di coordinate cilindrico, come quello sferico, non è definito in tutto lo spazio, altrimenti una sua funzione coordinata (φ) non sarebbe continua.

Si osservi poi che le basi, indotte da questo sistema, non sono costanti.

Dunque, possiamo determinare tutti i simboli di Christoffel non nulli.

Inoltre, precisate le matrici jacobiane dei cambiamenti di coordinate, relativamente ad un sistema di coordinate cartesiano e cilindrico, possiamo scrivere le relazioni che legano gli elementi delle basi, indotte da questi sistemi.

6.3.1. DEFINIZIONE Sia $o \in E$ un punto di E. Sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base ortonormale ordinata di $\bar{E}$. Sia $S \subset E$ il semipiano

$$S \equiv \{p \in E \ / \ (p-o)\cdot\bar{e}_2 = o \quad , (p-o)\cdot \bar{e}_1 \geq o\}.$$

Dicesi SISTEMA DI COORDINATE CILINDRICO individuato da (o,B), l'applicazione

$$(\rho,\varphi,z) : E - S \to (o,\infty)x(o,2\pi)x(-\infty,\infty)\subset R^3$$

data da

$$\rho(p) \equiv \sqrt{[(p-o)\cdot\bar{e}_1]^2 + [(p-o)\cdot\bar{e}_2]^2}$$

$$\varphi(p) \equiv \begin{cases} \arccos[(p-o)\cdot\bar{e}_1/||p-o||] \\ \arccos[(p-o)\cdot\bar{e}_2/||p-o||] \end{cases}$$

$$z(p) \equiv (p-o)\cdot\bar{e}_3 \qquad \dot{-}$$

6.3.2. Dare l'espressione esplicita delle curve coordinate in questo sistema è alquanto difficoltoso. Al riguardo il lettore può leggere 6.5.3. .

6.3.3. Diamo ora le relazioni che legano le funzioni coordinate dei sistemi cartesiano-cilindrico e cilindrico-sferico.

PROPOSIZIONE

E'

$$\begin{array}{ll} x = \rho\cos\theta & \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\theta & \varphi = \begin{cases} \mathrm{arcsen}(y/\sqrt{x^2+y^2}) & \text{se } x \geq o \\ \mathrm{arcsen}(-y/\sqrt{x^2+y^2}) & \text{se } x \leq o \end{cases} \\ z = z & z = z \end{array} \quad .$$

Inoltre, è

$$\rho = r\,\mathrm{sen}\theta\,,\ \varphi = \varphi\ ,\quad z = r\cos\theta \quad .$$

6.3.4. Utilizzando le prime due relazioni precedenti, otteniamo le matrici jacobiane dei cambiamenti di coordinate cilindriche-cartesiane relativamente alle basi indotte da tali coordinate. Si osservi che, con abuso di linguaggio, si è indicato le funzioni coordinate e le curve coordinate del sistema (ρ,φ,z) con la stessa notazione.

$$(J_{13}) \overset{1)}{\equiv} \begin{pmatrix} \partial\rho.x & \partial\varphi.x & \partial z.x \\ \partial\rho.y & \partial\varphi.y & \partial z.y \\ \partial\rho.z & \partial\varphi.z & \partial z.z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(J_{31}) \overset{1)}{\equiv} \begin{pmatrix} \partial x.\rho & \partial y.\rho & \partial z.\rho \\ \partial x.\varphi & \partial y.\varphi & \partial z.\varphi \\ \partial x.z & \partial y.z & \partial z.z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi/\rho & \cos\varphi/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conseguentemente, osservato che è $(J_{31}) = (J_{13})^{-1}$, abbiamo

$$\det(J_{13}) = \rho \ ,$$

$$\det(J_{31}) = 1/\rho .$$

6.3.5. Siano $\{\delta\rho, \delta\varphi, \delta z\}$ e $\{D\rho, D\varphi, Dz\}$ le basi, indotte da (ρ,φ,z) di $\bar{E}$ e $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

Possiamo riscrivere le relazioni, date in 5.9.1. , nei sistemi di coordinate cartesiano-cilindrico.

Allora, è

1) L'indice 1 di J_{12} è riferito sempre al sistema di coordinate cartesiano; invece, l'indice 3 è riferito al sistema di coordinate cilindrico.

$$\begin{cases} \delta\rho=(\partial\rho.x)\bar{e}_1 +(\partial\rho.y)\bar{e}_2+(\partial\rho.z)\bar{e}_3 = \cos\varphi\bar{e}_1 + \operatorname{sen}\varphi\, \bar{e}_2 \\ \delta\varphi=(\partial\varphi.x)\bar{e}_1+(\partial\varphi.y)\bar{e}_2 + (\partial\varphi.z)\bar{e}_3 =\rho(-\operatorname{sen}\varphi\bar{e}_1 + \cos\varphi\bar{e}_2) \\ \delta z=(\partial z.x)\bar{e}_1 + (\partial z.y)\bar{e}_2 + (\partial z.z)\bar{e}_3 = \bar{e}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D\rho=(\partial x.\rho)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.\rho)\underline{\epsilon}^2 + (\partial z.\rho)\underline{\epsilon}^3 = \cos\varphi\underline{\epsilon}^1 + \operatorname{sen}\varphi\underline{\epsilon}^2 \\ D\varphi=(\partial x.\varphi)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.\varphi)\underline{\epsilon}^2 +(\partial z.\varphi)\underline{\epsilon}^3+ \cos\varphi\,\epsilon^2) \\ Dz=(\partial x.z)\underline{\epsilon}^1 +(\partial y.z)\underline{\epsilon}^2 + (\partial z.z)\underline{\epsilon}^3 = \underline{\epsilon}^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_1=\delta x=(\partial x.\rho)\delta\rho+(\partial x.\varphi)\delta\varphi+(\partial x.z)\delta z = \cos\varphi\delta\rho- \operatorname{sen}\varphi/\rho\ \delta\varphi \\ \bar{e}_2=\delta y=(\partial y.\rho)\delta\rho+ (\partial y.\varphi)\delta\varphi +(\partial y.z)\delta z= \operatorname{sen}\varphi\delta\rho+ \cos\varphi/\rho\ \delta\varphi \\ \bar{e}_3=\delta z=(\partial z.\rho)\delta\rho+(\partial z.\varphi)\delta\varphi +(\partial z.z)\delta z = \delta z = \bar{e}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\epsilon}^1=Dx=(\partial\rho.x)D\rho +(\partial\varphi.x)D\varphi +(\partial z.x)Dz = \cos\varphi\, D\rho -\rho\operatorname{sen}\varphi D\varphi \\ \underline{\epsilon}^2=Dy=(\partial\rho.y)D\rho+(\partial\varphi.y)D\varphi+(\partial z.y)Dz = \operatorname{sen}\varphi\, D\rho + \rho\cos\varphi\, D\varphi \\ \underline{\epsilon}^3=Dz=(\partial\rho.z)D\rho+(\partial\varphi.z)D\varphi+(\partial z.z)Dz = Dz = \underline{\epsilon}^3 \end{cases} .$$

6.3.6. Dunque, è

- $||\delta\rho|| = (\delta\rho \cdot \delta\rho)^{\frac{1}{2}} = 1$
- $||\delta\varphi|| = (\delta\varphi \cdot \delta\varphi)^{\frac{1}{2}} = \rho$
- $||\delta z|| = (\delta z \cdot \delta z)^{\frac{1}{2}} = 1$

con la relazione d'ortogonalità della base $(\delta\rho,\ \delta\varphi, \delta z)$

$$\delta\rho \cdot \delta\varphi = \delta\rho \cdot \delta z = \delta\varphi \cdot \delta z = 0$$

In termini matriciali, è

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Facciamo, allora, le seguenti osservazioni.

- E'

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} .$$

- E'

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \rho ,$$

$$\sqrt{\det(g^{ij})} = 1 / \sqrt{\det(g_{ij})} = 1/\rho .$$

6.3.7. Nel sistema di coordinate cilindrico, i simboli di Christoffel non nulli sono 3. Più precisamente, è

$$\Gamma^1_{22} = -\rho \quad , \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/\rho .$$

Dunque, anche

$$\Gamma_{1,22} = -\rho \quad , \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = \rho .$$

4 SISTEMA DI COORDINATE POLARE (dim E = 2)

0 Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 2.

I sistemi di coordinate sferico o cilindrico, ristretti al piano equatoriale, danno luogo ad un unico sistema di coordinate, detto polare.

6.4.1. DEFINIZIONE Sia $o \in E$ un punto di E. Sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ una base ortonormale ordinata di $\bar{E}$. Sia $s \subset E$ la semiretta

$$s \equiv \{p \in E \,/\, (p-o)\cdot \bar{e}_2 = o \quad , (p-o)\cdot \bar{e}_1 \geq o\} \quad .$$

Dicesi SISTEMA DI COORDINATE POLARE individuato da (o,B), l'applicazione

$$(\rho, \varphi): E - s \to (o,\infty) \times (o,2\pi) \subset \mathbb{R}^2$$

data da

$$r(p) \equiv \rho(p) \equiv \sqrt{[(p-o)\cdot\bar{e}_1]^2 + [(p-o)\cdot\bar{e}_2]^2}$$

$$\varphi(p) \equiv \begin{array}{l} \arccos\,[(p-o)\cdot\bar{e}_1 / \|p-o\|\,] \\ \text{arsen}\,[(p-o)\cdot\bar{e}_2 \,\|p-o\|\,] \end{array} \qquad \dot{-}$$

6.4.2. Dunque, è

$$\begin{array}{ll} x = \rho\cos\varphi & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = \rho\,\text{sen}\,\varphi & \arccos\,(x \,/\, \sqrt{x^2 + y^2}\,) \\ & \varphi = \text{arcsen}(y \,/\, \sqrt{x^2 + y^2}\,) \end{array} \quad .$$

6.4.3. Allora, le matrici jacobiane dei cambiamenti di coordinate cartesiane-polari, relativamente alle basi indotte da tali coordinate, sono

$$(J_{12}) \equiv \begin{pmatrix} \partial\rho . x & \partial\varphi . x \\ \partial\rho . y & \partial\varphi . y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\rho \,\mathrm{sen} \\ \mathrm{sen} & \rho\cos \end{pmatrix}$$

$$(J_{21}) \equiv \begin{pmatrix} \partial x . \rho & \partial y . \rho \\ \partial x . \varphi & \partial y . \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & \mathrm{sen} \\ -\mathrm{sen}/\rho & \cos/\rho \end{pmatrix} .$$

Conseguentemente, osservato che è $(J_{21}) = (J_{12})^{-1}$, è

$$\det(J_{12}) = \rho$$

$$\det(J_{21}) = 1/\rho$$

6.4.4. Siano $\{\delta\rho, \delta\varphi\}$ e $\{D\rho, D\varphi\}$ le basi, indotte da (ρ, φ), di $\bar{E}$ e di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

Allora, le relazioni 6.2.5. e 6.3.5. si riducono alle seguenti [1].

$$\delta\rho = (\partial\rho . x)\bar{e}_1 + (\partial\rho . y)\bar{e}_2 = \cos\varphi\, \bar{e}_1 + \mathrm{sen}\varphi\, \bar{e}_2$$

$$\delta\varphi = (\partial\varphi . x)\bar{e}_1 + (\partial\varphi . y)\bar{e}_2 = \rho\,(-\mathrm{sen}\varphi\, \bar{e}_1 + \cos\varphi\, \bar{e}_2)$$

$$D\rho = (\partial x . \rho)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y . \rho)\underline{\epsilon}^2 = \cos\varphi\, \underline{\epsilon}^1 + \mathrm{sen}\varphi\, \underline{\epsilon}^2$$

$$D\varphi = (\partial x . \varphi)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y . \varphi)\underline{\epsilon}^2 = 1/\rho\,(-\mathrm{sen}\varphi\, \underline{\epsilon}^1 + \cos\varphi\, \underline{\epsilon}^2)$$

---

1) Si osservi che, con abuso di linguaggio, si è indicato le funzioni coordinate e le curve coordinate su E con la stessa notazione.

$$\bar{e}_1 = \delta x = (\partial x.\rho)\delta\rho + (\partial x.\varphi)\delta\varphi = \cos\varphi\,\delta\rho - \operatorname{sen}\varphi/\rho\ \delta\varphi$$

$$\bar{e}_2 = \delta y = (\partial y.\rho)\delta\rho + (\partial y.\varphi)\delta\varphi = \operatorname{sen}\varphi\,\delta\rho + \cos\varphi/\rho\ \delta\varphi \quad .$$

6.4.5. Dunque, ricordiamo che è

- $||\delta\rho|| \equiv (\delta\rho \cdot \delta\rho)^{\frac{1}{2}} = 1$

- $||\delta\varphi|| \equiv (\delta\varphi \cdot \delta\varphi)^{\frac{1}{2}} = \rho$

con la relazione d'ortogonalità della base $(\delta\rho,\ \delta\varphi)$

$$\delta\rho \cdot \delta\varphi = 0 \quad .$$

In termini matriciali, è

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix} \quad .$$

Dunque, è

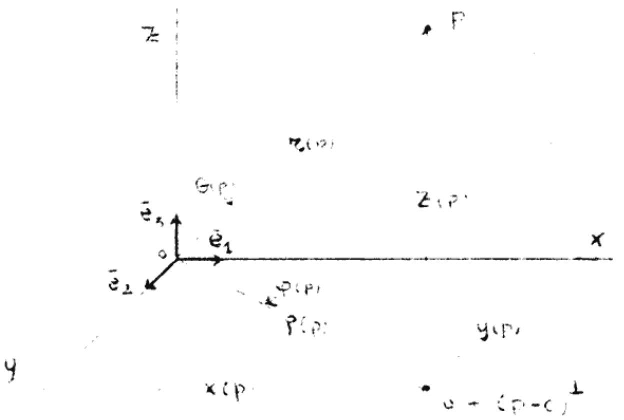
- $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$,

- $\sqrt{\det(g_{ij})} = \rho$, $\sqrt{\det(g^{ij})} = 1/\rho$.

6.4.6. Concludiamo questo paragrafo ricordando che i simboli di Christoffel sono quelli dati in 6.3.7.dove, appunto, manca la terza coordinata.

5 RAPPRESENTAZIONE DEI SISTEMI DI COORDINATE (dim E = 3)

0 Diamo ora una rappresentazione grafica dei tre sistemi di coordinate, individuati da (o,B), specificando così le relative funzioni e curve coordinate. Concludiamo indicando le basi per i vettori di $\bar{E}$,indotti da tali sistemi.



- Le funzioni coordinate x,y,z assumono valori costanti su dei piani.
- La funzione r assume valori costanti su delle sfere, θ su dei coni e φ su dei semipiani.
- La funzione ρ assume valori costanti sulle superfici laterali dei cilindri.

Intersecando queste"superfici" otteniamo i "sostegni" delle curve coordinate.

6.5.1. Sistema di coordinate cartesiano

- La curva coordinata c_{ip} ($\forall 1 \leq i \leq 3$) ha per sostegno la retta parallela ad $\bar{e}_1$ e passante per p.

6.5.2. Sistema di coordinate sferico

- C_{1p} ha per sostegno la semiretta uscente da o e passante per p;

- C_2p ha per sostegno la semicirconferenza di raggio $r(p)$, centro o e passante per p,

- C_3p ha per sostegno la circonferenza (escluso un punto) di raggio $\rho(p)$, ortogonale ad $\bar{e}_3$ e passante per p.

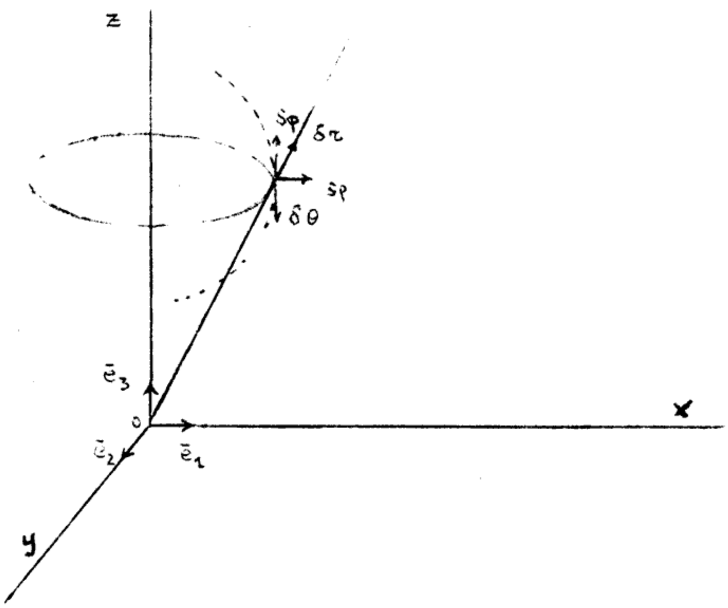
6.5.3. Sistema di coordinate cilindrico.

- c_1p ha per sostegno la semiretta ortogonale ad $\bar{e}_3$, uscente da un punto della retta $(o,\bar{e}_3)$ e passante per p;

- c_2p ha per sostegno la circonferenza (escluso un punto) di raggio $\rho(p)$, ortogonale ad $\bar{e}_3$ e passante per p;

- c_3p ha per sostegno la retta parallela ad $\bar{e}_3$ e passante per p.

6.5.4. Diamo, infine, una rappresentazione grafica per le basi $\{\delta r,\delta\theta,\delta\varphi\}$ e $\{\delta\rho,\delta\varphi,\delta z\}$, indotte rispettivamente da (r,θ,φ) e (ρ,φ,z).



B I B L I O G R A F I A

[1] R. ABRAHAM — Foundations of Mechanics - W.A. Benjamin (New York,1967).

[2] H. CARTAN — Calcul différentiel - Hermann (Paris,1967).

[3] L. CHAMBADAL, J.L.OVAERT — Algebre lineaire et Algebre tensorielle - Dunod (Paris, 1968) .

[4] Y. CHOQUET-BRUHAT — Géométrie différentielle et systémes extérieurs - Dunod (Paris,1968).

[5] C. GODBILLON — Géométrie différentielle et Mecanique Analytique - Hermann (Paris, 1969).

[6] S. LANG — Algebra - Addison Publishing Com. (Reading Massachus Palo Alto, 1965).

[7] S. LANG — Algebra Lineare - Boringhieri (Torino, 1974).

[8] S. LANG — Calculus of Several Variables - Addison Publishing (London-Ontario, 1973).

[9] S. LANG — Introduction aux Varietés differentiables - Dunod (Paris, 1967).

[10] M. MODUGNO — Appunti di Geometria Differenziale sugli Spazi Affini - Ist. Matematico (Lecce, 1976).

[11] M. MODUGNO — Elementi di Algebra ed Analisi Tensoriale con applicazioni ai sistemi continui - Centro 2P(Firenze,1974/75).

[12] M. MODUGNO — Formulario schematico di Geometria Differenziale sugli Spazi Affini - Ist. Matematico (Lecce, 1977).

[13] M. MODUGNO — Formulation of Analytical Mechanics in general Relativity - Ist. Matematico U. Dini (Firenze, 1974).

[14] M. MODUGNO — Un modello assiomatico della Meccanica Classica - Ist. Matematico (Lecce, 1976).

[15] PHAM MAU QUAM — Introduction à la géometrie des Varietés differentiables Dunod (Paris, 1969).

[16] L. SCHWARTZ — Cours d'Analyse - Hermann (Paris, 1967).

[17] SPIVAK M. — Calculus of manifold - W.A. Benjamin (New York,1967)