A P P E N D I C E

Vogliamo riassumere alcuni dei teoremi che abbiamo dimostrato e altri risultati strettamente collegati.

Sia M una varietà riemanniana di dimensione m ed indichiamo con K_M la curvatura sezionale (K_M è una funzione reale definita sulla Grassmanniana $G_2(M)$ dei 2-piani tangenti ad M) e sia infine $\tilde{M}$ il rivestimento universale riemanniano.

Abbiamo allora i seguenti risultati:

1) VARIETA' A CURVATURA COSTANTE.

$K_M > 0 \Rightarrow \tilde{M}$ è isometrica alla sfera standard S^m di raggio $K_M^{-\frac{1}{2}}$.

$K_M = 0 \Rightarrow \tilde{M}$ è isometrica ad $\mathbb{R}^m$ con la struttura standard.

$K_M < 0 \Rightarrow \tilde{M}$ è isometrica ad $\mathbb{R}^m$ con la metrica di Poincaré.

2) VARIETA' A CURVATURA DI SEGNO COSTANTE.

$K_M \leq 0 \Rightarrow \tilde{M}$ è diffeomorfa ad $\mathbb{R}^m$.

$K_M \geq 0 \Rightarrow \tilde{M}$ si scinde a meno di isometrie, cioè $\tilde{M} = \bar{M} \times \mathbb{R}^k$ con $\bar{M}$ compatta.

$K_M \geq \delta > 0 \Rightarrow M$ è compatta, ha diametro $d \leq \pi\sqrt{\delta}$ e gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ finito.

Se inoltre m è pari il gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ è nullo per M orientabile ed è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ in caso contrario (in particolare $\pi_1(\tilde{M}) = 0$).

3) VARIETA' PIZZICATE.

Si dice δ-pizzicata una varietà compatta semplicemente connessa la cui curvatura sezionale verifichi la seguente condizione

$$0 < \delta A \leq K_M \leq A \qquad \text{con } A \in \mathbb{R}^+$$

Si ha allora

$\delta > \frac{1}{4} \Longrightarrow M$ è omeomorfa ad S^m.

$\delta \geq \frac{1}{4} \Longrightarrow M$ è omeomorfa ad uno spazio simmetrico di rango 1 (cioé S^m o uno spazio proiettivo).

$\delta \geq 0,8 \Longrightarrow M$ è diffeomorfa ad S^m.