CAPITOLO II

ELEMENTI DI TEORIA DELLE GEODETICHE

2.1. FORMULE VARIAZIONALI

Sia M una varietà riemanniana completa.(*)

2.1.1. DEFINIZIONE. Diremo che un'applicazione $\omega : [a,b] \to M$ è un cammino differenziabile a tratti se esiste una suddivisione $a = t_o < t_1 < \ldots < t_k = b$ dell'intervallo $[a,b]$ tale che ω sia continua in $[a,b]$ e differenziabile sui segmenti $[t_i, t_{i+1}]$ per ogni i.

Denotiamo con $\Omega(p,q;M)$, o semplicemente con Ω quando non sorgono equivoci, l'insieme dei cammini differenziabili a tratti $\omega : [a,b] \to M$ tali che $\omega(a) = p$ e $\omega(b) = q$.

Ad Ω possiamo dare una struttura di spazio metrico ponendo

$$d'(\omega_1,\omega_2) = \sup_{t\in[a,b]} d(\omega_1(t),\omega_2(t)) + \{ \int_a^b (||\dot\omega_1(t)||-||\dot\omega_2(t)||)^2 dt\}^{\frac{1}{2}} \quad (**).$$

Ω con la topologia indotta da d' assomiglia ad una varietà di dimensione infinita. Ci proponiamo di trasportare a questa situazione le tecniche classiche dello studio dei punti stazionari per le funzioni reali differenziabili definite su una varietà (di dimensione finita).

Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per definire il differenziale di F cominciamo con l'introdurre qualcosa di simile allo "spazio tangente".

(*) Da questo momento consideriamo sempre varietà complete.

(**) Indichiamo, al solito, con d la distanza indotta in M dalla struttura riemanniana.

2.1.2 DEFINIZIONE. a) Sia $\omega \in \Omega$; è naturale definire curva in Ω passante per ω o variazione di ω (mantenente gli estremi fissi) una applicazione continua

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$$

tale che, se indichiamo con s la variabile in $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e t quella in $[a,b]$ e se $\{t_i\}_{i=0,\dots,k}$ è una suddivisione di $[a,b]$ per cui

$\omega|_{[t_i,t_{i+1}]}$ risulti differenziabile, si abbia:

1) $\alpha(0,t) = \omega(t)$ per ogni $t \in [a,b]$

2) $\alpha|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_i,t_{i+1}]}$ è differenziabile per ogni $i = 0,1,\dots,$

3) $\alpha(s,0) = p$ $\alpha(s,1) = q$ per ogni $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

b) Naturalmente il "vettore velocità di α in ω", o campo variazionale sarà il campo di vettori dato da

$$W(t) = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)_{(0,t)} = (d\alpha)_{(0,t)} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right) .$$

c) Per spazio tangente a Ω in ω(*), $T_\omega\Omega$, intenderemo lo spazio vettoriale dei campi di vettori W continui lungo ω differenziabili sugli intervalli $[t_i,t_{i+1}]$ $i = 0,\dots,k-1$ tali cioè che

$W|_{[t_i,t_{i+1}]} \in \Gamma(\omega|_{[t_i,t_{i+1}]})$.

OSSERVAZIONE: 1) Dato $W \in T_\omega\Omega$ esiste una variazione α di ω tale che

(*) Le notazioni sono le stesse della definizione 2.1.1.

$W(t) = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)_{(o,t)}$. Basta considerare $\alpha(s,t) = \exp_{\omega(t)}(sW(t))$.

2.1.3. DEFINIZIONE. Diremo differenziale di una funzione $F:\Omega \to \mathbb{R}$ in ω l'applicazione $(dF)_\omega : T_\omega\Omega \to T_{F(\omega)}\mathbb{R}$ definita ponendo

$$(dF)_\omega(W) = \left[\frac{d}{ds} (F(\bar{\alpha}(s))) \right]_{s=o} \qquad (1)$$

dove α è una variazione di ω avente W come campo variazionale e $\bar{\alpha}(s)$ è la curva $\bar{\alpha}(s)(t) = \alpha(s,t)$.

Osserviamo che a priori il differenziale di F così definito (che indicheremo anche con F_*) può non esistere o comunque potrebbe dipendere da α che non è univocamente determinata da W. In ogni caso però la seguente definizione, che è poi quella che ci interessa, è corretta.

2.1.4. DEFINIZIONE. Diremo che $\omega \in \Omega$ è critico per F se per ogni variazione α di ω $F(\bar{\alpha}(s))$ è una curva differenziabile in $\mathbb{R}$ e $\left[\frac{d}{ds} F(\bar{\alpha}(s)) \right]_{s=o} = 0$

Ritornando al concetto di variazione, possiamo generalizzarlo nel modo seguente.

2.1.5. DEFINIZIONE. a) Sia $B^n_\varepsilon = \{u \in \mathbb{R}^n / \ ||u|| < \varepsilon\}$; diremo variazione n-dimensionale di ω in Ω un'applicazione continua

$$\alpha : B^n_\varepsilon \times [a,b] \to M$$

tale che

1) $\alpha(0,t) = \omega(t)$ per ogni $t \in [a,b]$
2) $\alpha(u,0) = p$ $\alpha(u,1) = q$ per ogni $u \in B^n_\varepsilon$
3) $\alpha|_{B^n_\varepsilon \times [t_i,t_{i+1}]}$ è differenziabile per ogni $i = 0,\dots, k-1$.

---

(1) Se $F(\bar{\alpha}) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ è differenziabile, $\frac{d}{ds}(F(\bar{\alpha}))_{s=o} \in T_{F(\omega)}\mathbb{R}$.

b) <u>Se</u> $x_1,\ldots,x_n$ <u>sono coordinate in</u> B^n_ε <u>si definiscono i campi variazionali di</u> α

$$W_i(t) = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\right)_{(o,t)} = (d\ \alpha)_{(o,t)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) .$$

Possiamo definire a questo punto l'analogo della "derivata seconda".

2.1.6. <u>DEFINIZIONE.</u> <u>Siano</u> $W_1,W_2 \in T_\omega\ \Omega$ <u>e</u> $\alpha : B^2_\varepsilon x\ [a,b\ ] \to M$ <u>una variazione di dimensione due tale che</u> $W_i(t) = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\right)_{(o,t)}$ (*)

Poniamo allora

$$F_{**}(W_1,W_2) = \left(\frac{\partial^2 F(\bar\alpha(x_1,x_2))}{\partial x_1\ \partial x_2}\right)_{(0,0)}$$

(Anche qui vanno fatte le riserve già avanzate nel caso di F_*).

Vogliamo ora cercare delle forumule esplicite per F_* e F_{**} nel caso che F sia la funzione lunghezza o energia. Ricordiamo che si definisce, per $\omega \in \Omega$

$$L(\omega) = \int_a^b ||\dot\omega(t)||\ dt = \sum_{i=o}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||\dot\omega(t)||\ dt$$

$$E(\omega) = \int_a^b ||\dot\omega(t)||^2\ dt = \sum_{i=o}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||\dot\omega(t)||^2\ dt.$$

2.1.7. <u>LEMMA.</u> E: $\Omega \to \mathbb{R}$ <u>è continua rispetto alla topologia indotta su</u> Ω dalla distanza d' definita all'inizio di questo paragrafo.(**)

(*) Come nel caso 1-dimensionale, la formula $\alpha(x_1,x_2,t) = \exp_{\omega(t)}(x_1W_1(t) + +x_2W_2(t))$ ci assicura l'esistenza di almeno una tale variazione.

(**) Questo lemma giustifica l'introduzione del termine integrale nella definizione di d' rispetto alla solita definizione che contiene solo il termine $\sup_{t\in[a,b]} d(\omega_1(t),\ \omega_2(t))$. In ogni caso le due topologie sono equivalenti.

Dimostrazione. Tenendo presente che $||\dot{\omega}|| \in L^2([a,b])$ se $\omega \in \Omega$ si ha

$$|E(\omega_1) - E(\omega_2)| \le \int_a^b \Big| \, ||\dot{\omega}_1||^2 - ||\dot{\omega}_2||^2 \Big| dt = \int_a^b \Big| \, ||\dot{\omega}_1|| + ||\dot{\omega}_2|| \, \Big| \, \Big| \, ||\dot{\omega}_1|| - ||\dot{\omega}_2|| \, \Big| dt$$

$$\le \{\int_a^b (||\dot{\omega}_1|| + ||\dot{\omega}_2||)^2 dt\}^{\frac{1}{2}} \{\int_a^b (||\dot{\omega}_1|| - ||\dot{\omega}_2||)^2 dt\}^{\frac{1}{2}} \le M(\omega_1) \, d'(\omega_1, \omega_2) ,$$

cioé E è continua in ogni ω_1. ∎

2.1.8. LEMMA. La funzione E assume i suoi minimi relativi sull'insieme delle geodetiche minimali.

Dimostrazione. $L^2(\omega) = (\int_a^b ||\dot{\omega}|| \cdot 1 \; dt)^2 \le \int_a^b ||\dot{\omega}||^2 dt \int_a^b dt =$

$= (b - a) \; E \; (\omega)$

e vale l'uguaglianza se e solo se ω è parametrizzata con parametro proporzionale alla lunghezza d'arco (cioé $||\dot{\omega}|| = \text{cost}$).

Supponiamo che γ sia una geodetica minimale da $\omega(a) = p$ a $\omega(b) = q$

$E(\gamma) = \dfrac{L^2(\gamma)}{(b-a)} \le \dfrac{L^2(\omega)}{(b-a)} \le E(\omega)$. Quindi $E(\gamma)$ è minimo per E. Inoltre vale il segno di uguaglianza se e solo se ω è anch'essa una geodetica minimale. ∎

Vogliamo ora studiare i cammini critici per le funzioni E ed L. Supporremo tutti i cammini parametrizzati in $[0,1]$.

2.1.9. TEOREMA. (1^formula variazionale). Sia $\omega \in \Omega(p,q;M)$ e $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,1] \to M$ una variazione di ω con vettore variazionale $W(t) = (\dfrac{\partial\alpha}{\partial s})_{(0,t)}$. Sia $\Delta_{t_o} \dot{\omega} = \dot{\omega}(t_o^+) - \dot{\omega}(t_o^-) = \lim_{t \to t_o^+} \dot{\omega}(t) - \lim_{t \to t_o^-} \dot{\omega}(t)$. (*)

(*) Ovviamente $\Delta_t \dot{\omega} \neq 0$ solo nei punti in cui ω non è C^1 e quindi (ω è C^∞ a tratti) in un insieme finito di punti.

Risulta allora

$$\frac{1}{2}\left[\frac{dE(\bar{\alpha}(s))}{ds}\right]_{s=o} = -\Sigma_t (W(t), \Delta_t\dot{\omega}(t)) + \int_0^1 (W(t), \frac{D}{dt}\dot{\omega}(t))dt^{(*)} .$$

Dimostrazione. $\frac{1}{2}\left[\frac{d\,E(\bar{\alpha}(s))}{d\,s}\right]_{s=o} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{ds}\left(\int_o^1 (\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial t})\,dt\right)\right]_{s=o} =$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial t})dt\right]_{s=o} = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 2(\frac{D}{ds}\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial t})dt\right]_{s=o} = \left[\int_0^1 (\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t})dt\right]_{s=o}$$

integriamo allora per parti ricordando che

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t}) = (\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t}) + (\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,s},\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t})$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d}{ds}E(\bar{\alpha}(s))\right]_{s=o} = \left[\int_o^1 \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t})dt\right]_{s=o} - \left[\int_o^1 (\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t})dt\right]_{s=o} =$$

$$= \Sigma_i \left[(\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t})_{s=o}\right]_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_o^1 (W(t),\frac{D}{dt}\dot{\omega}(t))dt = -\Sigma_t (W(t),\Delta_t\dot{\omega}(t)) - \int_o^1 (W(t),\frac{D}{dt}\dot{\omega}(t))dt. \blacksquare$$

2.1.10. COROLLARIO. $\omega \in \Omega$ è critico per E se e solo se ω è una geodetica.

Dimostrazione. Chiaramente se ω è una geodetica $\Delta_t\dot{\omega}(t) = 0$ per ogni $t \in [0,1]$ e $\frac{D}{dt}\dot{\omega}(t) = 0$ e quindi per ogni variazione α risulta $\left[\frac{d}{ds}E(\bar{\alpha}(s))\right]_{s=o} = 0$ e quindi ω è critico per E.

Viceversa supponiamo che ω sia un cammino critico per l'energia; se $\dot{\omega}$ è

(*) La sommatoria va estesa a tutti i t per cui $\Delta_t\dot{\omega} \neq 0$.

discontinuo in $t_1,\dots,t_k$ consideriamo una funzione C^∞, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $f(t_i) = 0$, $f(s) > 0$ se $s \neq t_i$. Consideriamo una variazione α di ω associata al campo di vettori $f(t) \frac{D}{dt} \dot{\omega}(t)$; risulta, poiché ω è critico:

$$0 = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{ds} E(\bar{\alpha}(s))\right]_{s=o} = -\int_o^1 f(t) \left|\left|\frac{D}{dt} \dot{\omega}(t)\right|\right|^2 dt$$

e quindi $\frac{D}{dt} \dot{\omega}(t) = 0$ negli intervalli $[t_i, t_{i+1}]$ e ω è una geodetica su tali intervalli. Scegliamo ora una variazione $\bar{\alpha}$ tale che $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right]_{s=0}(t_i) = \Delta_{t_i} \dot{\omega}(t_i)$. Avremo

$$0 = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{ds} E(\bar{\alpha}(s)) \right]_{s=0} = \Sigma_{t_i} ||\Delta_{t_i} \dot{\omega}(t_i)||^2$$

da cui $\Delta_{t_i} \dot{\omega}(t_i) = 0$ per ogni i e quindi la tesi segue dall'unicità della geodetica per ogni $\omega(t_i)$ con velocità $\dot{\omega}(t_i)$. ■

<u>OSSERVAZIONE:</u> 2) Notiamo come il valore di $\left[\frac{d}{ds} E(\bar{\alpha}(s))\right]_{s=0}$ esiste e non dipende dalla variazione α ma soltanto dal campo variazionale $W(t) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right)_{(0,t)}$ e quindi $(dE)_\omega : T_\omega \Omega \to T_{E(\omega)}\mathbb{R}$ resta ben definito indipendentemente dalla riserve formulate per la definizione 2.1.3..

2.1.11. <u>TEOREMA</u> (2^formula variazionale). <u>Sia</u> $\omega \in \Omega$, $\alpha : B_\varepsilon^2 \times [0,1] \to M$ <u>una variazione a due parametri e</u> $W_1 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\right)_{(0,t)}$, $W_2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)_{(0,t)}$ <u>i campi variazionali associati. Se</u> ω <u>è una geodetica risulta</u>

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}E(\alpha(x_1,x_2))\right)_{(0,0)}=$$

$$= -\Sigma_t\left(W_2(t),\Delta_t\frac{D}{dt}w_1(t)\right)-\int_o^1\left(W_2(t),\frac{D}{dt^2}W_1(t)+R(\dot\omega,W_1)\dot\omega\right)dt.$$

Dimostrazione. E' un calcolo analogo a quello fatto per la 1^formula variazionale. Notiamo soltanto che interviene il tensore di curvatura R poiché dobbiamo usare, durante il calcolo, non solo la 1.1.9. ma anche la 1.3.2. . ∎

OSSERVAZIONE. 3) Notiamo che $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}E(\alpha(x_1,x_2))\right)$ dipende non da α ma solo dai campi $W_1=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\right)_{(0,t)}$ e $W_2=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}\right)_{(0,t)}$.

Considerata ora la geodetica $\gamma\in\Omega$, definiamo un operatore:

$$E^{\gamma}_{**}:T_\gamma\Omega\times T_\gamma\Omega \to \mathbb{R}\ ^{(*)}$$

ponendo

$$E^{\gamma}_{**}(W_1,W_2)=-\Sigma_t\left(W_2,\Delta_t\frac{D}{dt}W_1\right)-\int_o^1\left(W_2,\frac{D^2}{dt^2}W_1+R(\dot\omega,W_1)\dot\omega\right)dt.$$

2.1.12. COROLLARIO. E_{**} è simmetrico e bilineare.

Dimostrazione. E_{**} è chiaramente bilineare; inoltre è simmetrico in quanto per la 2.1.10. si può interpretare come derivata seconda mista. ∎

(*) Spesso scriveremo solo E_{**}

La 2^formula variazionale permette inoltre di provare il seguente

2.1.13. *COROLLARIO. Se* γ *è una geodetica minimale da* $\gamma(0) = p$ *a* $\gamma(1) = q$ *allora* E_{**}^{γ} *è semidefinito positivo.*

2.2. PUNTI DI TAGLIO E PUNTI CONIUGATI.

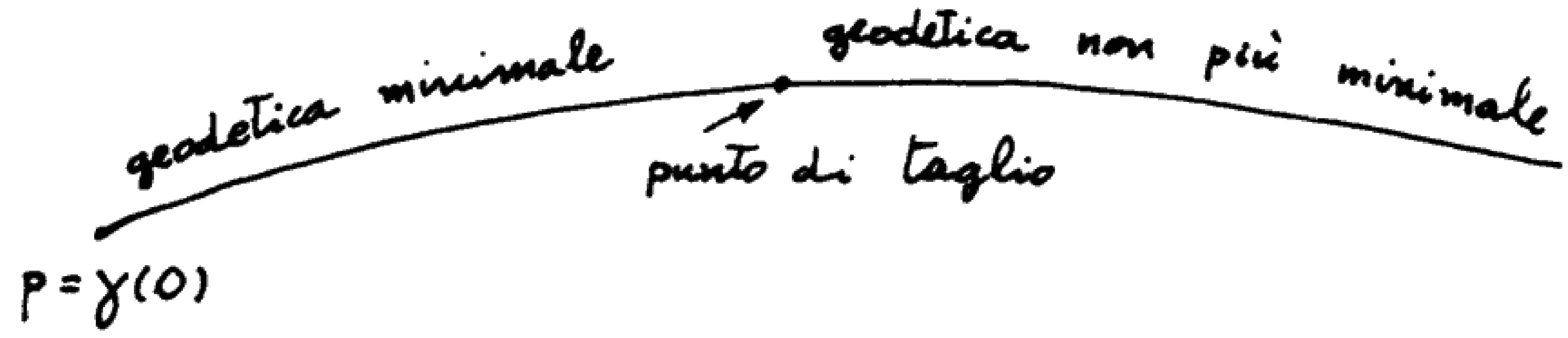
Abbiamo visto come una geodetica minimizzi localmente la funzione lunghezza e quindi l'energia. D'altra parte (globalmente) una geodetica non è in generale una curva di lunghezza minimale tra tutte le curve che congiungono due dati punti; abbiamo in particolare visto che condizione necessaria affinché ciò avvenga è che E^{γ}_{**} risulti semidefinito positivo.

Lo scopo che speriamo di raggiungere in questo paragrafo è, fissata una geodetica $\gamma : [0,\infty) \to M$ uscente da un punto, percorrere γ e vedere quando e perché γ cessa di essere minimale.

Sia $X_p \in T_pM$, $||X_p|| = 1$. Poniamo

$$m(X_p) = \sup \{t_o \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \mid t \mapsto \exp_p(tX_p) \text{ è minimale tra } p \text{ ed } \exp_p(t_oX_p)\}.$$

2.2.1. DEFINIZIONE. Diremo punto di taglio lungo la geodetica $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tX_p)$, $t \geq 0$, rispetto a p il punto $\exp_p(m(X_p)X_p)$ se $m(X_p) \in \mathbb{R}$.



Diremo anche che $m(X_p)X_p \in T_pM$ è il punto di taglio rispetto a p lungo il raggio $\{tX_p\}_{t \geq 0}$.

In generale è utile avere un procedimento analitico per la determinazione di $m(X_p)$. Abbiamo visto come una geodetica minimale è tale che E_{**} risulta semidefinito positivo. D'altra parte la 2^formula variazionale mostra che, a meno del termine di discontinuità, E_{**} ha per nucleo vettori che soddisfano la condizione $J'' + R(\dot{\omega},J)\dot{\omega} = 0$ Questo ci suggerisce la idea di cercare una stima di $m(X_p)$ mediante campi di vettori lungo ω verificanti una tale equazione.

2.2.2. DEFINIZIONE. Diremo che un campo di vettori J lungo una geodetica γ è un campo di vettori di Jacobi se

$$J'' + R(\dot{\gamma},J)\dot{\gamma} = 0$$

Prima di discutere anche le più elementari proprietà dei campi di Jacobi diamo una proposizione che chiarisce un po' quanto sopra affermato.

2.2.3. PROPOSIZIONE. Sia $\gamma : [0,1] \to M$ una geodetica; $J \in \Gamma(\gamma)$ un campo di Jacobi non identicamente nullo e tale che $J(0)=0$, $J(t_o) = 0$ per qualche $t_o \in (0,1)$. Allora γ non è minimale.

Dimostrazione. L'idea è di costruire, partendo da J, un campo di vettori $\tilde{J} \in \Gamma(\gamma)$ tale che $E_{**}(\tilde{J},\tilde{J}) < 0$.

Indichiamo con J_1 il campo così definito

$$J_1(t) = \begin{cases} J(t) & 0 \leq t \leq t_o \\ 0 & t_o \leq t \leq 1 \end{cases}$$

J_1 è allora un campo differenziabile a tratti e J_1' è discontinuo solo in t_o.

Essendo $J(t)$ la soluzione di un'equazione differenziale del 2° ordine, nulla in t_o e non identicamente nulla, risulta $J_1'(t_o^-) = J'(t_o) \neq 0.$(*)

(*) Riprendiamo l'argomento in seguito.

Sia ora $X \in \Gamma(\gamma)$ di classe C^{∞} in $[0,1]$ e tale che $X(0) = X(1) = 0$ e $X(t_o) = \dfrac{J_1'(t_o^-)}{\|J_1'(t_o^-)\|}$. Sia ancora $\tilde{J}(t) = c^{-1}J_1 - cX$ con $c \in \mathbf{R}^+$. Risulta allora

$$\frac{1}{2} E_{**}(\tilde{J},\tilde{J}) = -(-cX(t_o), -c^{-1}J_1'(t_o^-)) - \int_o^1 (c^{-1}J_1 - cX, -cR(\dot{\gamma},X)\dot{\gamma})\, dt =$$

$$= -1 - \int_o^1 (J_1, -R(\dot{\gamma},X)\dot{\gamma})dt - c^2 \int_o^1 (X, R(\dot{\gamma},X)\dot{\gamma})dt.$$

Ma

$$\int_o^1 (J_1, -R(\dot{\gamma},X)\dot{\gamma})dt = \frac{1}{2} E_{**}(J_1,-X) + (J_1, -\Delta_t X') =$$

$$= \frac{1}{2} E_{**}(X,J_1) \overset{(*)}{=} -(-X(t_o), \Delta_{t_o} J_1') \overset{(**)}{=} -1$$

Scelto c tanto piccolo che $\left| c^2 \int_o^1 (X, R(\dot{\gamma},X)\dot{\gamma})dt \right| < 2$

risulta $E_{**}(\tilde{J},\tilde{J}) < 0$ da cui segue che γ non è un minimo per E, quindi per L.

Visto allora come i campi di Jacobi (ed in particolare i loro zeri) ci possono essere utili in quanto vogliamo fare, diamo alcune definizioni e proprietà elementari.

Sia $\gamma : [0,1] \to M$ una geodetica.

2.2.4. DEFINIZIONE. Diremo che $\gamma(t_o)$ è coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ se esiste un campo di Iacobi J, non identicamente nullo, tale che $J(0) = 0$

(*) E_{**} è simmetrica. Inoltre X è $C^{\infty} \Rightarrow X'$ continua.

(**) J_1 è di Jacobi a tratti e quindi la parte integrale va a zero.

<u>e</u> $J(t_o) = 0$.

OSSERVAZIONI: 1) Dalla 2.2.3. segue che il punto di taglio lungo γ precede sempre il primo punto coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ. In questo senso la posizione del primo punto coniugato ci dà una stima per eccesso di $m(\dot{\gamma}(0))$.

2) Per i soliti teoremi sulle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie un campo di Jacobi $J \in \Gamma(\gamma)$ è univocamente determinato dalle condizioni iniziali $J(0)$ e $J'(0)$. Pertanto lo spazio vettoriale dei campi di Jacobi lungo γ ha dimensione 2m.

3) Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $(at + b)\ \dot{\gamma}(t)$ è un campo di Jacobi lungo γ.

4) Se p è coniugato a q lungo γ, allora q è coniugato a p lungo γ percorsa nel verso opposto. Analogo discorso si può fare per i punti di taglio.

Diamo ora una caratterizzazione più geometrica dei campi di Jacobi.

2.2.5. <u>DEFINIZIONE</u>. <u>Se</u> $\gamma: [0,1] \to M$ <u>è una geodetica, per variazione di</u> γ <u>attraverso geodetiche intenderemo un'applicazione differenziabile</u>

$\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,1] \to M$ <u>tale che</u>

1) $\alpha(0,t) = \gamma(t) \qquad \forall\, t \in [0,1]$

2) $\alpha(s_o,t)$ è una geodetica $\forall\, s_o \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

2.2.6. <u>PROPOSIZIONE</u>. <u>Un campo di vettori</u> $J \in \Gamma(\gamma)$ <u>è di Jacobi se e solo se esiste una variazione</u> α <u>di</u> γ <u>attraverso geodetiche, tale che</u>

$$J(t) = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)_{(0,t)} = (d\alpha)_{(0,t)}$$

<u>Dimostrazione.</u> Se α è una variazione come in 2.2.5. risulta

$$\frac{D^2}{dt^2}\frac{\partial\alpha}{\partial s} + R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{D}{dt}\,\frac{D}{ds}\,\frac{\partial\alpha}{\partial t} + R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t} =$$

$$= \frac{D}{ds}\,\frac{D}{dt}\,\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (t \mapsto \alpha(s_o,t) \text{ è una geodetica}).$$

Viceversa, sia J un campo di Jacobi lungo γ ed U un intorno di $\gamma(0)$ tale che due suoi punti qualsiasi siano congiungibili da un'unica geodetica di lunghezza $< \varepsilon$. Consideriamo $\delta > 0$ tale che $\gamma(t) \in U$ e, se $t \in [0,\delta]$, sia $c_o : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ una curva tale che $c_o(0) = \gamma(0)$ e $\dot c_o(0) = J(0)$ e $c_1 (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ tale che $c_1(0) = \gamma(\delta)$ e $\dot c_1(0) = J(\delta)$.

Se $\forall s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ si ha che $\alpha(s) : [0,\delta] \to M$ è l'unica geodetica di lunghezza minore di ε congiungente $c_o(s)$ e $c_1(s)$, otteniamo una variazione di $\gamma/[0,\delta]$ attraverso geodetiche (*) $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,\delta] \to M$ ponendo $\alpha(s,t) = \bar\alpha(s)(t)$.

Proviamo ora che un campo di Jacobi lungo $\gamma\big|_{[0,\delta]}$ è univocamente determinato dai suoi valori in 0, e δ.

Infatti se $\mathcal{J}(\gamma) = \{J \in \Gamma(\gamma) \mid J \text{ è di Jacobi}\}$ consideriamo l'applicazione

$$r : \mathcal{J}(\gamma) \to T_{\gamma(0)}M \times T_{\gamma(\delta)}M$$

data da $r(J) = (J(0),J(\delta))$. Chiaramente r è lineare; inoltre l'argomento precedente permette, fissato $J(0)$ e $J(\delta)$, di costruire la variazione α tale che $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)_{(0,0)} = J(0)$ e $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)_{(0,\delta)} = J(\delta)$.

(*) α è differenziabile poiché le geodetiche suddette dipendono differenziabilmente dai dati iniziali.

$(\frac{\partial\alpha}{\partial s})_{(0,t)}$ è un campo di Jacobi (per la 1^parte della proposizione) e

$r((\frac{\partial\alpha}{\partial s})_{(0,t)}) = (J(0)\ ,\ J(\delta))$ e quindi r è suriettiva.

Essendo gli spazi $J(\gamma)$ e $T_{\gamma(0)} \times T_{\gamma(\delta)}$ entrambi 2m-dimensionali ne segue che r è un isomorfismo e ciò prova l'asserzione.

Estendiamo allora α ad una variazione definita in $(-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,1]$ (ricordiamo che M è completa). Il campo variazionale così ottenuto, $\tilde{J}$, è allora un campo di Jacobi lungo γ e per quanto sopra visto coincide con J in $[0,\delta]$. In particolare $\tilde{J}(0) = J(0)$ e $\tilde{J}'(0) = J'(0)$. Ne segue dunque $\tilde{J}(t) = J(t)$. ∎

Risulterà estremamente utile in seguito la seguente caratterizzazione dei punti coniugati.

2.2.7. <u>PROPOSIZIONE.</u> <u>Sia</u> $\gamma: [0,1] \to M$ <u>una geodetica.</u> $\gamma(t_o)$ <u>è coniugato a</u> $\gamma(0)$ <u>lungo</u> γ <u>se e solo se</u> $\exp_{\gamma(0)}$ <u>è singolare in</u> $t_o\dot{\gamma}(0)$.

La dimostrazione è a questo punto un facile esercizio ricordando le considerazioni fatte per ottenere la 1.3.4.

2.2.8. <u>DEFINIZIONE.</u> <u>Sia</u> $\gamma(t_o)$ <u>coniugato a</u> $\gamma(0)$ <u>lungo</u> γ. <u>Diremo che</u> $\omega(t_o)$ <u>è coniugato di ordine</u> k <u>se lo spazio vettoriale dei campi di Jacobi lungo</u> γ <u>che si annullano in</u> 0 <u>e</u> t_o <u>ha dimensione</u> k. Questo equivale in termini della 2.2.7 al fatto che $\mathrm{Ker}\,(d\exp_{\gamma(0)})_{t_o\dot{\gamma}(0)}$ ha dimensione k.

A priori l'ordine di un punto coniugato soddisfa la relazione $1 \leq k \leq m$ poiché m è la dimensione dello spazio vettoriale dei campi di Jacobi nulli in un punto.

Ma abbiamo osservato che $t\,\dot{\gamma}(t)$ è un campo di Jacobi, lungo γ e si annulla soltanto in $t=0$. Quindi esistono al più $m-1$ campi di Jacobi indipendenti che si annullano in 2 punti distinti.

Esempi. 1) Consideriamo $\mathbb{R}^m$ con la metrica usuale. I campi di Jacobi lungo le geodetiche $\{tX\}_{t\geq 0}$ sono allora le soluzioni dell' equazione $x''(t)=0$ e quindi non si annullano che in $t=0$. Non esistono dunque coppie di punti coniugati.

2) Sia M una varietà di dimensione m e tale che la curvatura sezionale K sia costante per ogni 2-piano del fibrato tangente ad M.

Facendo uso delle proprietà di simmetria del tensore R è facile vedere che risulta

2.2.9. $$(R(X,Y)Z,W) = ((X,Z)(Y,W) - (Y,Z)(X,W))\,K.$$

Siano allora $\gamma : [0,\infty) \to M$ una geodetica, $\{P_i\}_{i=1,\dots\dots,m}$ una base ortonormale in $T_{\gamma(0)}M$ e $\{P_{i(t)}\}_{i=1,\dots\dots,m}$ la base in $T_{\gamma(t)}M$ ottenuta trasportando P_i parallelamente lungo γ.

Supponiamo γ parametrizzata con la lunghezza d'arco $(\|\dot{\gamma}\| = 1)$ e $P_1(t) = \dot{\gamma}(t)$.

Poniamo $J_i(t) = a(t)\,P_i(t)$.

Risulta allora

$J''_i(t) = a''(t)P_i$.

J_i è allora di Jacobi se e solo se risulta

$J''_i(t) = a''(t)P_i = - R(P_1,J_i)P_1 = - a(t)\ R(P_1,P_i)P_1$

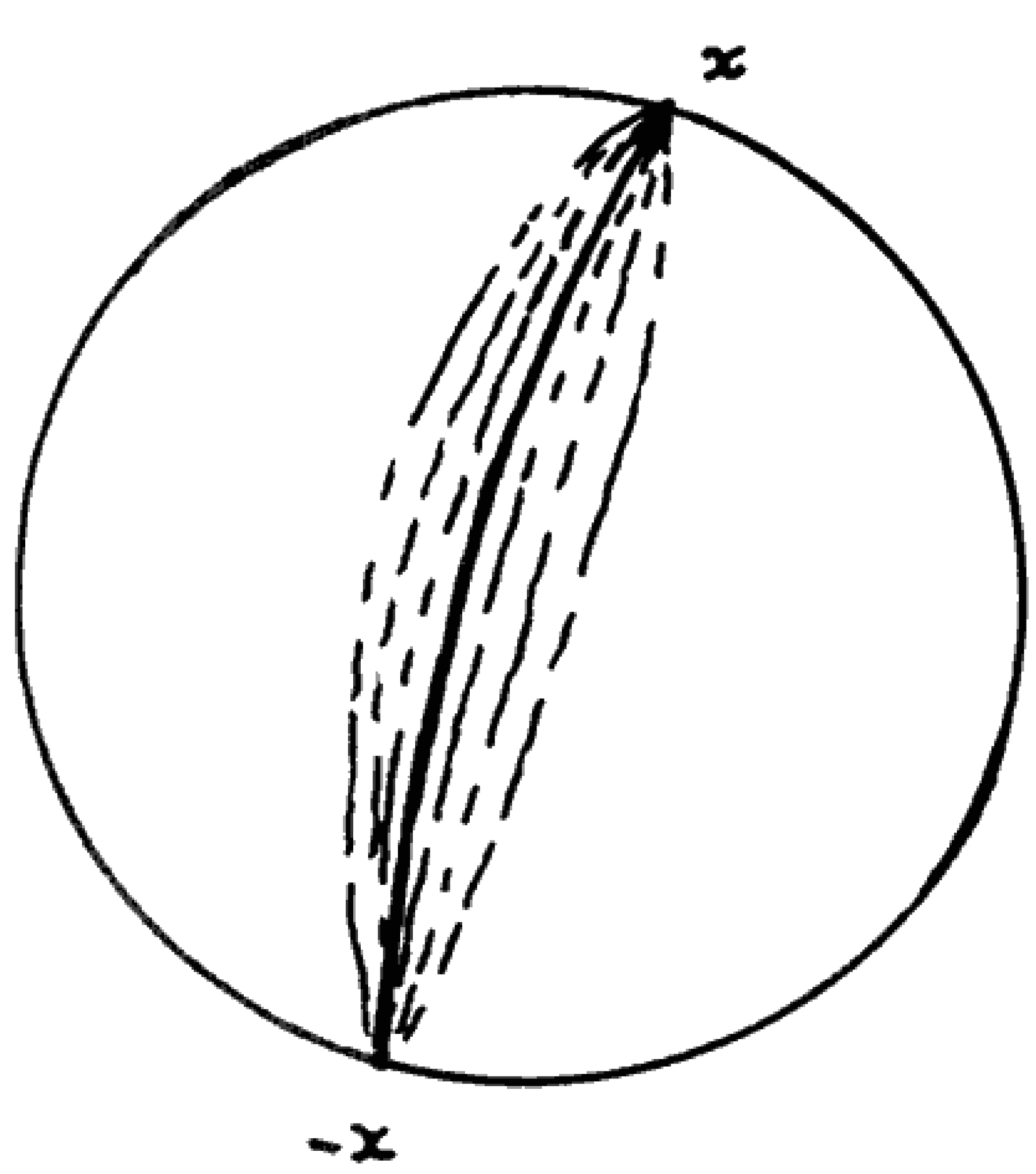
cioé se $a(t)$ soddisfa l'equazione $a''(t) + Ka(t) = 0$; infatti da (2.2.9) segue $R(P_1,P_i)P_1 = KP_i$ $(i \neq 1)$.

Ne segue allora che se $K \leq 0$ non vi sono punti coniugati in quanto le soluzioni non nulle dell'equazione $a''(t) + Ka(t) = 0$ sono funzioni che si annullano al più in un punto.

Se $k > 0$, si ha la soluzione $a(t) = \mathrm{sen}(t\sqrt{K})$ e quindi i campi di Jacobi $J_i = \mathrm{sen}(t\sqrt{K})P_i(t)$.

In tal caso i punti coniugati sono i punti $\{\gamma(\frac{n\pi}{\sqrt{K}})_{n\in \mathbb{Z}}\}$ e tutti hanno ordine $m-1$.

3) Nel caso $M = S^m$ (sostanzialmente lo stesso di $K = \mathrm{cost} > 0$ si può ragionare anche più geometricamente osservando che le $m-1$ rotazioni indipendenti attorno ad un asse $\{x,-x\}$ ci danno $m-1$ variazioni "indipendenti" di una geodetica congiungente x e $-x$ e quindi $m-1$ campi di Jacobi indipendenti.



Ovviamente detti campi si annullano in x e $-x$ e quindi due qualsiasi punti antipodali sono tra loro coniugati, lungo ogni geodetica che li congiunge, con molteplicità $m-1$.

Osserviamo esplicitamente come $\exp_x : T_xS^m \to S^m$ proietti $\{||x|| < \pi\}$ in modo diffeomorfo su $S^m - \{-x\}$ e porti $\{||x|| = \pi\}$ su $\{-x\}$.

Terminiamo questo paragrafo dando una ulteriore proprietà dei campi di Jacobi.

2.2.10. PROPOSIZIONE. Se J_1, J_2 sono campi di Jacobi lungo γ allora

$$(J_1, J_2') - (J_1', J_2) = \text{cost.}\ .$$

Inoltre se $J_1(t_o) = J_2(t_o) = 0$ per qualche t_o

$$(J_1, J_2') - (J_1', J_2) = 0.$$

Dimostrazione.

$$\frac{d}{dt}((J_1, J_2') - (J_1', J_2)) = (J_1', J_2') + (J_1, J_2'') - (J_1'', J_2) -$$

$$- (J_1', J_2') = (J_1, R(\dot\gamma, J_2)\,\dot\gamma) - (J_2, R(\dot\gamma, J_1)\dot\gamma) = 0\ . \blacksquare$$

2.2.11. COROLLARIO. $(J_1', \dot\gamma(t)) = C_1, \qquad (J_1, \dot\gamma(t)) = C_2 + tC_1$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2.3. LUOGO DI TAGLIO E LUOGO CONIUGATO.

In questo paragrafo ci proponiamo di approfondire maggiormente le relazioni tra punti di taglio e punti coniugati. Esamineremo anche la struttura dell'insieme dei punti di taglio e dei punti coniugati(considerati nello spazio tangente) senza però entrare nei dettagli di tutte le dimostrazioni in quanto, per le applicazioni che daremo, la situazione sarà molto particolare e dette dimostrazioni immediate.

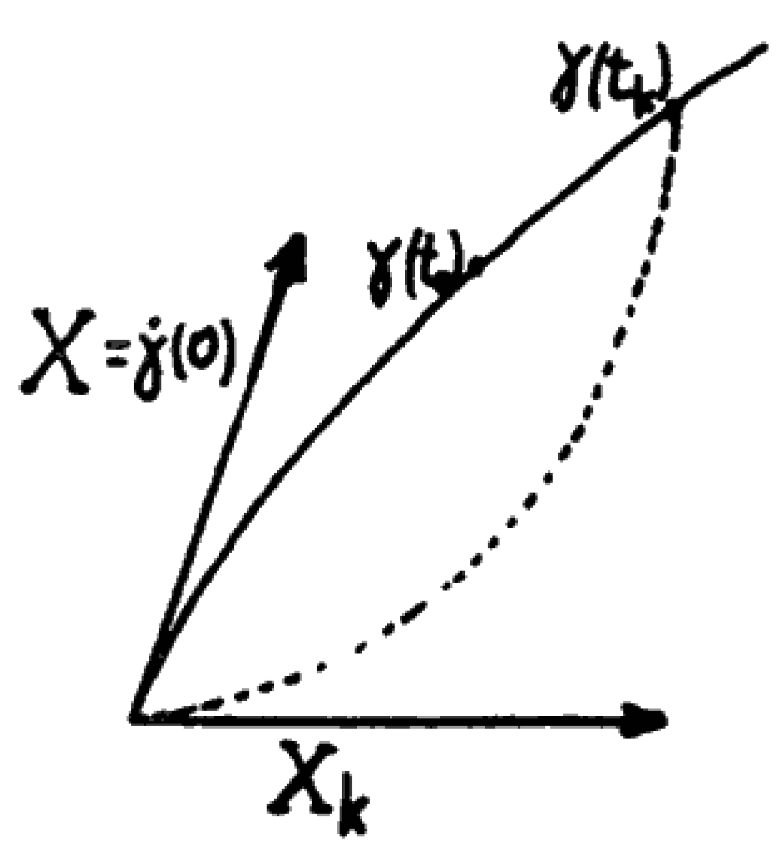
1.3.1. PROPOSIZIONE. Sia $\gamma : [0,\infty) \to M$ una geodetica e $\gamma(t_o)$ il punto di taglio (rispetto a $\gamma(0)$). Allora è verificata almeno una delle seguenti condizioni:

a) $\gamma(t_o)$ è il primo punto coniugato lungo γ (rispetto a $\gamma(0)$);

b) esistono almeno due geodetiche minimali tra $\gamma(0)$ e $\gamma(t_o)$.

Dimostrazione. Sia $\{t_k\}_{k\in N}$ una successione strettamente decrescente che converge a t_o e $t \mapsto \exp_{\gamma(0)}(tX_k)$ per $||X_k|| = 1$ e $0 \leq t \leq b_k$ una geodetica minimale tra $\gamma(0)$ e $\gamma(t_k)$. Dalle ipotesi fatte risulta $X_k \neq X = \dot{\gamma}(0)$,

$$b_k < t_k \quad e \quad \lim_{k\to\infty} b_k = t_o .$$

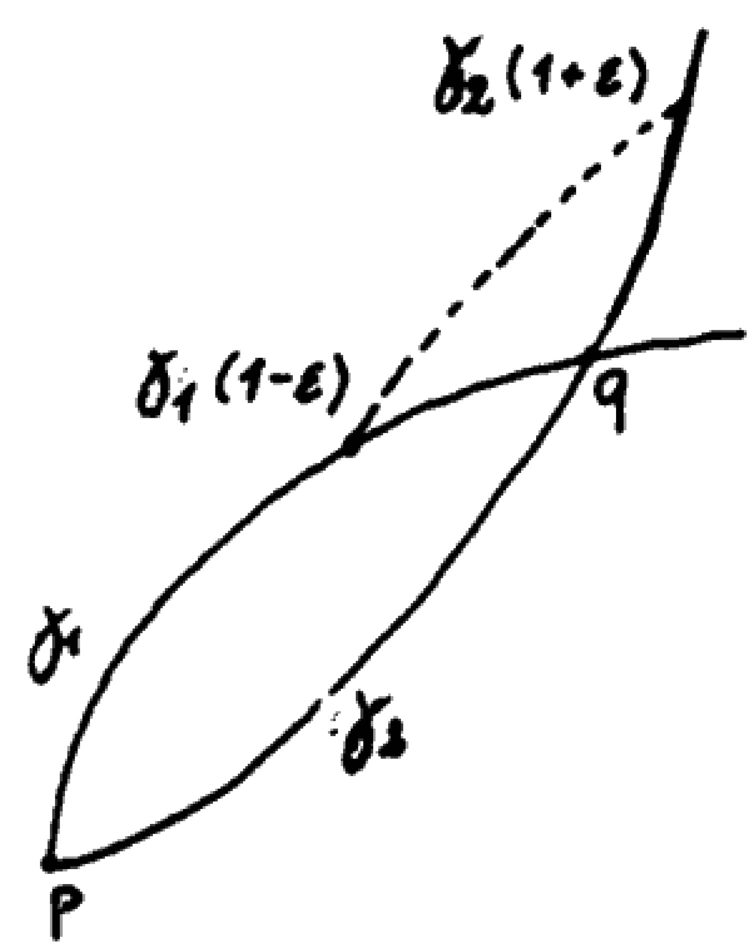


Poiché $\{X \in T_{\gamma(0)}M| \ ||X|| = 1\}$ è compatta possiamo supporre $X_k \to Y$ per $k \to \infty$. Se $Y \neq X$, $t \mapsto \exp_{\gamma(0)}(t\,Y)$ e $t \mapsto \gamma(t)$ sono due geodetiche minimali distinte come nella b).

Supponiamo $X = Y$. Allora $\gamma(t_o)$ è coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ. Infatti se così non fosse esisterebbe (PROP. 2.2.7.) un intorno U di t_oY in $T_{\gamma(0)}M$ tale che $\exp_{\gamma(0)|U}$ sia un diffeomorfismo. Ma questo è assurdo poiché per k abbastanza grande b_kX_k e t_kX apparterrebbero ad U e l'uguaglianza $\exp_{\gamma(0)}(b_kX_k) = \exp_{\gamma(0)}(t_kX)$ implicherebbe $b_kX_k=t_kX$ per $k > k_o$ che contraddice $X_k \neq X$ essendo $||X_k|| = 1 = ||X||$ e $b_k < t_k$. ∎

OSSERVAZIONE: 1) La condizione b) caratterizza i punti di taglio nel senso che se p e q sono congiunti da due geodetiche minimali γ_1 e γ_2 distinte allora q è di taglio rispetto a p lungo γ_1 e γ_2.

Infatti supponendo γ_1 e γ_2 parametrizzate con la lunghezza d'arco e $\gamma_i(0) = p$ $\gamma_i(1) = q$ $(i = 1,2)$, se $\dot\gamma_1(1) =-\dot\gamma_2(1)$ è ovvio che γ_1 e γ_2 non minimizzano per $t > 1$; se invece $\dot\gamma_1(1) \neq -\dot\gamma_2(1)$ allora per $\varepsilon < 1$,



$d(\gamma_1(1 - \varepsilon), \gamma_2(1 + \varepsilon)) < 2\varepsilon$(*) e quindi $d(p,\gamma_2(1 + \varepsilon)) < 1 + \varepsilon$ da cui risulta che $\gamma_2|_{[0,1 + \varepsilon]}$ non è minimale; analogamente per $\gamma_1|_{[0,1+\varepsilon]}$.

(*) Da $\dot\gamma_1(1) \neq -\dot\gamma_2(1)$ segue che la curva σ: $[1 -\varepsilon,1+\varepsilon] \to M$ che per t $[1 -\varepsilon,1]$ vale $\gamma_1(t)$ e per $t \in [1,1+\varepsilon]$ vale $\gamma_2(t)$ non è una geodetica e quindi $L(\sigma) = 2\varepsilon > d(\gamma_1(1 - \varepsilon),\gamma_2(1+\varepsilon))$.

Ricordando le definizioni del paragrafo 2.1 , poniamo

$K(p) = \{m(X)X \mid X \in T_pM,\ ||X|| = 1$ e $m(X) \in \mathbb{R}\}$ = luogo di taglio (rispetto a p) in T_pM

$\tilde{K}(p) = \exp_p(K(p))$ = luogo di taglio (rispetto a p) in M

$C(p) = \{X \in T_pM \mid \exp_p$ è singolare in $X\}$ = luogo coniugato (rispetto a p) in T_pM

$\tilde{C}(p) = \exp_p(C(p))$ = luogo coniugato (rispetto a p) in M

$C^1(p) = \{X \in C(p) \mid \exp_p$ è regolare in tX per $t < 1\}$

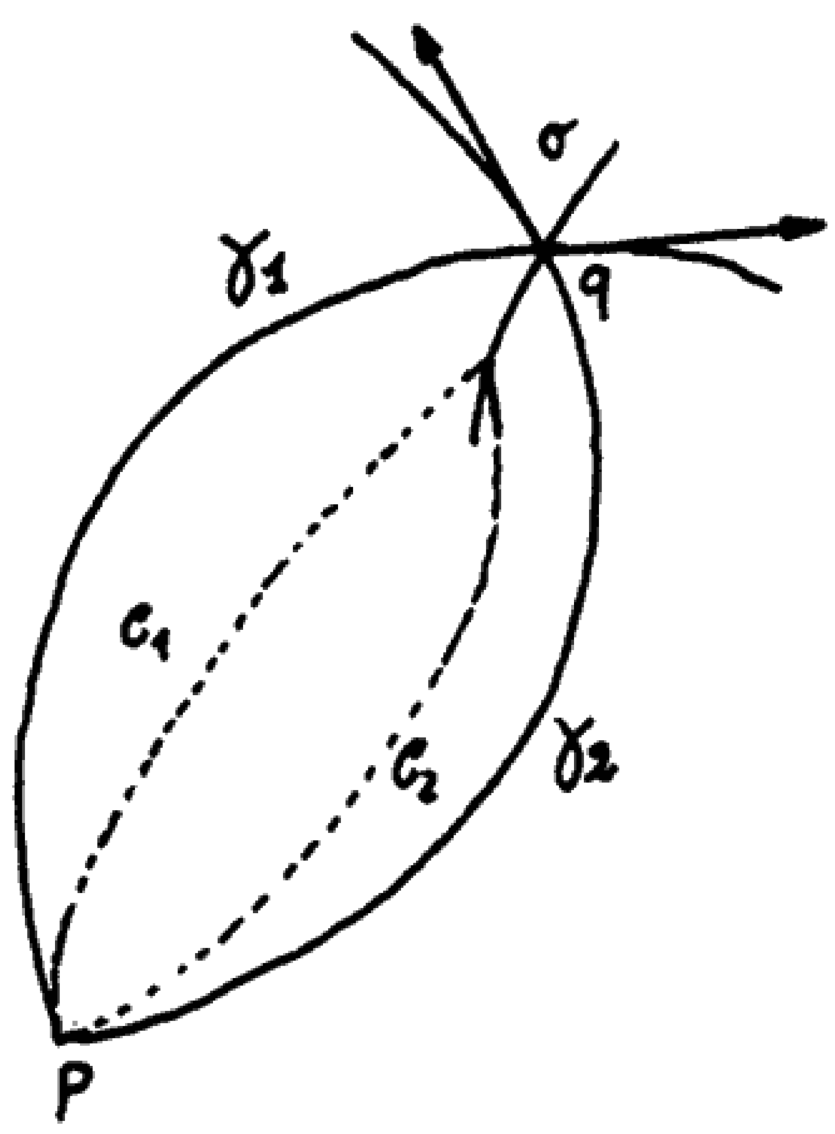
$C_k(p) = \{X \in C(p) \mid \operatorname{Ker}(d\exp_p)_X$ ha dimensione $k\}$

$C^1_k(p) = C^1(p) \cap C_k(p)$.

2.3.2. PROPOSIZIONE. Se $q \in \tilde{K}(p)$ è un punto di taglio a distanza minima da p e se $q \notin \tilde{C}(p)$ esistono esattamente due geodetiche minimali γ_1, γ_2 congiungenti p e q e tali che, posto $r = d(p,q)$, risulta $\dot{\gamma}_1(r) = -\dot{\gamma}_2(r)$.

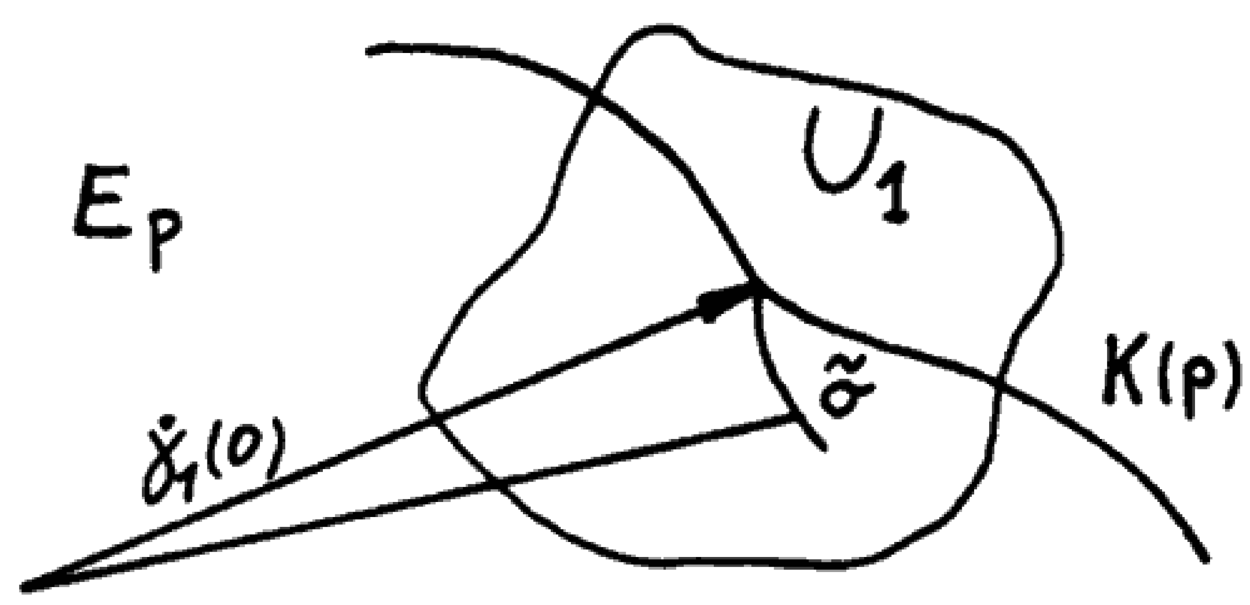
Dimostrazione. Per 2.3.1. esistono almeno due geodetiche γ_1 e γ_2 minimali congiungenti p e q. Se $\dot{\gamma}_1(r) \neq -\dot{\gamma}_2(r)$ sia $\sigma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ una geodetica tale che $\sigma(t_o)$ è contenuto nell'immagine di intorni U_i di $r\cdot\dot{\gamma}_i(0)$ tali che $\exp_{p|U_i}$ sia un diffeomorfismo. Esistono allora X_1 e X_2 in U_1 e U_2 rispettivamente tali che $t \mapsto (\exp_p tX_i) = c_i(t)$.

Sia una geodetica minimale congiungente p e $\sigma(t_o)$.



(in M)

poiché $\dot{\sigma}(0)$ forma un angolo acuto con $\dot{\gamma}_i(r)$ possiamo sollevare $\sigma_{|(-\varepsilon,0)}$ in $E_p = \{tY \,|\, ||Y|| = 1 \text{ e } t < m(Y)\}$ ottenendo una curva $\tilde{\sigma}$



(in T_pM)

e quindi c_i ha lunghezza minore di r. Ma allora $\sigma(t_o)$ è un punto di taglio rispetto a p, a distanza minore di r da p. ■

Cominciamo ora a studiare un po' in dettaglio la struttura di K(p) e C(p).

Posto $S_p = \{X \in T_pM \,|\, ||X|| = 1\}$ sia $m : S_p \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ l'applicazione che ad X associa m(X) definito all'inizio del paragrafo 2.3.(*) e sia

$$Q(M) = \{X \in T(M) \,|\, ||X|| = 1\} \text{ e } m(X) < \infty \}^{(**)}$$

(*) Indichiamo tale applicazione sempre con m, qualunque sia il punto p di M.

(**) Quando la determinazione di p non ci interessa, indichiamo con X gli elementi $(p,X) \in T(M)$; indicheremo inoltre con exp l'applicazione $Exp : T(M) \to M \times M$ composta con la proiezione $p_2 : M{\times}M \to M$.

definiamo una applicazione

$$f : Q(M) \to M$$

ponendo per ogni $X \in Q(M) \cap T_pM$

$$f(X) = \exp_p(m(X)X).$$

Ovviamente $f(X)$ è il punto di taglio di p lungo la geodetica $t \mapsto \exp_p(tX)$.

2.3.3. PROPOSIZIONE. $f : Q(M) \to M$ è continua.

Dimostrazione. Proveremo che per ogni successione $\{X_i\}_{i \in N}$ convergente a X in $Q(M)$ (siano $X_i \in T_{p_i}M$ e $X \in T_pM$) esiste il limite della successione $f(X_i)$ ed è uguale a $f(X)$.

Poniamo $m_i = m(X_i)$, $m = m(X)$, $q_i = f(X_i)$, $q = f(X)$

$$\gamma_i(t) = \exp_{p_i}(tX_i), \quad \gamma(t) = \exp_p(tX) \quad \text{per ogni } t \geq 0,\ i \in N$$

ed osserviamo che per goni $t > 0$ $\gamma(t) = \lim\limits_{i \to \infty} \gamma_i(t)$

Poiché l'applicazione esponenziale è continua, se esiste $\lim\limits_{i \to \infty} m_i = m$ risulta che

$$\exists \lim_{i \to \infty} f(X_i) = \lim_{i\to \infty} \exp(m_iX_i) = \exp(\lim_{i\to \infty} m_iX_i) = \exp(\lim_{i\to \infty} m_i \lim_{i\to\infty} X_i) = \exp(mX) = f(X).$$

Basta provare dunque che $\lim\limits_{i \to \infty} m_i = m$

Se per assurdo fosse $\limsup_{i\to\infty} m_i = m' > m$, considerato un numero reale positivo(*) $\varepsilon < m' - m$ esisterebbe una sottosuccessione convergente

$\{m_{i_j}\}_{j\in N}$ di $\{m_i\}_{i\in N}$ tale che $m_{i_j} > m + \varepsilon$ per ogni $j \in N$.

Essendo $\gamma_{i_j}(m_{i_j})$ il punto di taglio di p_{i_j} ed essendo le γ_{i_j} parametrizzate per lunghezza d'arco risulterebbe allora per ogni j

$$m + \varepsilon = d(d(p_{i_j}, \gamma_{i_j}(m + \varepsilon))$$

quindi

$$m + \varepsilon = \lim_{J\to\infty} d(p_{i_j}, \gamma_{i_j}(m + \varepsilon)) = d(\lim_{j\to\infty} p_{i_j}, \lim_{J\to\infty} \gamma_{i_j}(m+\varepsilon)) = d(p, \gamma(m+\varepsilon)).$$

Ciò è assurdo perché γ non può essere minimale tra p ed un punto che si ottiene per $t > m$.

Dunque $\limsup_{i\to\infty} m_i \leq m$.

Si può allora supporre, a meno di considerare una sottosuccessione di X_i, che $\lim_{i\to\infty} m_i = \bar{m} \in R$; ci resta da provare che $\bar{m} \geq m$

Supponiamo per assurdo che sia $\bar{m} < m$; allora $\bar{q} = \gamma(\bar{m})$ non è coniugato

---

(*) Se $m' = \infty$, ε sarà un numero reale positivo qualunque.

a p lungo γ, cioé per la proposizione 2.2.7. $(\mathrm{dexp})_{\bar{m}X}$ è non singolare; quindi exp è un diffeomorfismo di un intorno U di $\bar{m}X$ in TM su un intorno di $(\bar{q},\bar{p})$ in $M\times M$.

Supponiamo che i termini della successione $\{m_i\}_{i\in N}$ siano tali che ogni m_iX_i stia in U(*).

Poiché $\exp_{|U}$ è un diffeomorfismo, il punto di taglio $q_i=\gamma_i(m_i)$ di ogni p_i non può essere coniugato a p_i lungo γ_i e dunque, per la proposizione 2.3.2. vi è un'altra geodetica minimale da p_i a q_i. Per ogni i tale geodetica undividua un unico vettore Y_i in S_{p_i}, $Y_i\neq X_i$, tale che

$$\exp_{p_i}(m_iX_i) = \exp_{p_i}(m_iY_i)$$

e risulta $m_iY_i \notin U$.

Posto (**) $Y = \lim_{i\to\infty} Y_i$, $Y\in S_p$, risulta ancora $\bar{m}\,Y \notin U$.

Ne segue che

$$\exp_p(\bar{m}Y) = \exp_p(\lim_{i\to\infty} m_iY_i) = \lim_{i\to\infty}(\exp_{p_i}(m_iY_i)) =$$

$$= \lim_{i\to\infty}(\exp_{p_i}(m_iX_i)) = \exp_p(\lim_{i\to\infty} m_iX_i) = \exp_p(\bar{m}\,X).$$

Se indichiamo quindi con τ la geodetica $t\to\exp_p(tY)$, γ e τ sono geodetiche minimali distinte tra p ed $\exp_p(\bar{m}X) = \exp_p(\bar{m}Y)$ e dunque

(*) Ci si può mettere comunque in tale situazione escludendo un numero finito di termini della successione m_i.

(**) L'esistenza di tale limite si prova come per il limite di $\{X_i\}_{i\in N}$.

nessuna delle due, in particolare γ, è minimale tra p ed $\exp_p(mX)$, $m > \bar{m}$; ciò è assurdo poiché per ipotesi $\gamma(m) = \exp_p(mX)$ è il punto di taglio di p lungo γ. ∎

2.3.4. <u>COROLLARIO</u>. <u>La funzione</u> $m : S_p \to R^+ \cup \{\infty\}$ <u>già definita è continua.</u>

<u>Dimostrazione</u>: Si è già provato, nella dimostrazione della proposizione 2.3.3. che $m_{|S_p \cap Q(M)}$ è continua e si può osservare che considerata la funzione g definita da $g(\exp_p m(X)X) = m(X)$ risulta

$m_{|S_p \cap Q(M)} = g \cdot f_{|S_p \cap Q(M)}$.

Se si considera allora un vettore unitario X in T_pM tale che $m(X) = \infty$ e se in ogni intorno di X in S_p esiste un vettore Y per cui $m(Y) < \infty$, considerata una successione di tali vettori $\{X_i\}_{i \in N}$ tale che $\lim_{i \to \infty} X_i = X$ risulta $\lim_{i \to \infty} m(X_i) = \lim_{i \to \infty} g \cdot f(X_i) = \infty = m(\lim_{i \to \infty} X_i)$.

Infatti se fosse $\lim_{i \to \infty} g \cdot f(X_i) = c < \infty$ sarebbe $g \cdot f(\lim_{i \to \infty} X_i) = g \cdot f(X) = c$ e ciò è assurdo poiché $X \notin Q(M)$. ∎

2.3.5 <u>COROLLARIO</u>. <u>Sia</u> $E_p = \{tY | Y \in S_p, \ t < m(Y)\}$

Allora 1) E_p è un aperto in T_pX

2) $\exp_p$ è un diffeomorfismo di E_p su un aperto di M

3) M è unione disgiunta di $\exp_p(E_p)$ e $\exp_p K(p) = \tilde{K}(p)$.

Dimostrazione. La 1) segue da 2.3.3. immediatamente. La 2) segue dal fatto che $\exp_p$ è non singolare in E_p (in quanto il 1° punto coniugato segue sempre il punto di taglio) ed è globalmente biunivoca per l'osservazione 1). La 3) viene dalla completezza della varietà ($M = \exp_p E_p \cup \tilde{K}(p)$) e dalla 2.3.1 ($\exp_p E_p \cap \tilde{K}_p = \emptyset$). ■

2.3.6. COROLLARIO. M è compatta se e solo se $m(Y) < \infty$ per ogni $Y \in S_p$.

Dimostrazione. Se M è compatta il diametro di M è finito quindi $m(X) < \infty$ per ogni $X \in S_p$. Viceversa se $m(X) \leq b$ per ogni $X \in S_p$ (m è continua ed S_p è compatto) allora $M = \exp_p(B)$

($B = \{ X \in T_pM \mid ||X|| \leq b\}$) è compatta. ■

ESEMPI. 1) Sia $M = S^m$. Allora $K(p) = C^1(p) = C^1_{m-1}(p) = \{X \in T_pM \mid ||X|| = \pi\}$.

$C(p) = C_{m-1}(p) = \{X \in T_pM \mid ||X|| = k\pi$ per qualche k intero positivo$\}$.

2) Sia $M = \mathbb{R}P^m = \dfrac{S^m}{\mathbb{Z}_2}$ lo spazio proiettivo reale con la metrica naturale. Allora $K(p) = \{X \in T_pM \mid ||X|| = \dfrac{\pi}{2}\}$

$C(p) = C_{m-1}(p) = \{X \in T_pM \mid ||X|| = k\pi\}$.

3) Sia $M = \mathbb{C}P^m$ lo spazio proiettivo complesso.

Allora $K(p) = C^1(p) = C^1_1(p) = \{X \in T_pM \mid ||X|| = \pi\}$. $C(p) = C_1(p) \cup C_{m-1}(p)$ con $C_1(p) = \{X \mid ||X|| = (2k+1)\pi\}$ e $C_{m-1}(p) = \{X \in T_pM \mid ||X|| = 2k\pi\}$.

4) Sia $M = T^2 = \dfrac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}$ il toro "piatto". La suriezione canoni-

ca $\varphi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ è un rivestimento. Ovviamente $C(\bar{q}) = \emptyset$ per ogni $\bar{q} \in T^2$ (la curvatura sezionale è identicamente nulla) e se $p = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ in $\mathbb{R}^2$ e $\bar{p} = \varphi(p)$ allora $K(\bar{p}) = \partial Q$ dove Q è il quadrato in $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)$ avendo identificato $T_p T^2$ con $\mathbb{R}^2$.

Per quanto riguarda la struttura di $C(p)$ si intravede la possibilità che sia una sottovarietà differenziabile di T_pM in quanto definito mediante gli zeri di soluzioni di equazioni differenziali. Ma se da una parte sembra abbastanza prevedibile un risultato sulla dipendenza differenziabile dei punti coniugati dalla direzione, dall'altra ci si convince facilmente che, se l'ordine k non è costante sulle componenti connesse di $C(p)$ si avranno dei "rami" per cui non si potrà concludere che $C(p)$ è una varietà topologica.

Seguendo Warner definiamo allora $C^R(p) = \{X \in C(p) \mid \exists$ un intorno U di X in $C(p)$ tale che per ogni $Y \in U$, ordine Y = ordine $X\}$.
Poniamo inoltre $C^S(p) = C(p) - C^R(p)$.
Diremo che $C^R(p)$ è il luogo coniugato regolare e $C^S(p)$ quello singolare. Diremo che il luogo coniugato è regolare se $C^S(p) = \emptyset$.

2.3.7. <u>TEOREMA</u>. 1. $C^R(p)$ <u>è aperto e denso in</u> $C(p)$

2. $C^R(p)$ <u>è una sottovarietà di classe</u> C^∞ <u>di</u> T_pM.

Per la dimostrazione rimandiamo a Warner.

In questo articolo si dà una descrizione molto particolareggiata di $C(p)$ ed inoltre si dimostra un fatto molto interessante a proposito dello spazio tangente a $C^R(p)$ e precisamente

2.3.8. <u>TEOREMA</u>. Se $X \in C^R(p)$ <u>e</u> ordine $X \geq 2$ <u>allora</u> $T_X C^R(p) \supsetneq \mathrm{Ker}(d\exp_p)_X$

Ci si può domandare quanto sia restrittivo richiedere che $C^S(p)$ sia vuoto.

Purtroppo la risposta è che una simile richiesta è estremamente restrittiva.

A. Weinstain [31] ha dato un teorema che illustra significativamente questa affermazione.

Per concludere questo paragrafo enunciamo un'ultimo teorema che lega $K(p)$ e $C(p)$. In una forma molto più blanda dimostreremo un teorema dello stesso tipo in seguito.

2.3.9. TEOREMA. Sia M una varietà semplicemente connessa compatta, e $p \in M$. Supponiamo che una delle seguenti condizioni sia verificata:

a) Per ogni $X \in C^1(p)$ $\quad$ $\mathrm{ord}\,(X) \geq 2$

b) $C^1(p) \subseteq C^R(p)$ e ogni $X \in C^1(p)$ ha modulo X = costante.

c) $K(p) = \{X \in T_pM \mid ||X|| = \text{costante}\}$.

Allora $K(p) \subseteq C(p)$.