CAPITOLO I

VARIETA' RIEMANNIANE

1.1. CONNESSIONI SU VARIETA' RIEMANNIANE.

Richiamiamo alcune nozioni di geometria riemanniana sopratutto per fissare le notazioni.

Per "differenziabile" intenderemo sempre differenziabile di classe C^∞; se M è una varietà di dimensione m indicheremo con T_pM, $p \in M$, lo spazio tangente a M in p e con $T(M)$ il fibrato tangente. $\Gamma(M)$ sarà l'algebra dei campi di vettori su M e $\mathfrak{F}(M)$ l'anello delle funzioni differenziabili a valori reali. Se $X \in \Gamma(M)$ indichiamo con X_p il valore di X nel punto $p \in M$. Se $f : M \to N$, con M ed N varietà differenziabili, è un'applicazione differenziabile, indicheremo con $\Gamma(f)$ l'insieme dei campi di vettori lungo f, cioé le applicazioni $X : M \to T(N)$ differenziabili tali che $\pi_N \circ X = f$ essendo $\pi_N : T(N) \to N$ la proiezione canonica del fibrato tangente su N.

1.1.1. - DEFINIZIONE. Per metrica riemanniana su M intenderemo una famiglia di forme bilineari, simmetriche e definite positive

$$\{(,)_p / \; p \in M \;\text{ e }\; (,)_p : T_pM \times T_pM \to R\}$$

tale che se $X, Y \in \Gamma(M)$ l'applicazione $p \mapsto (X_p, Y_p)$ è in $\mathfrak{F}(M)$ cioé è differenziabile.

La coppia costituita da una varietà e da una metrica riemanniana sulla varietà sarà detta <u>varietà riemanniana.</u>

Indicheremo con $||X_p||$, per $X_p \in T_p M$, la norma del vettore tangente rispetto alla metrica riemanniana definita sulla varietà, cioé $||X_p|| = (X_p, X_p)^{\frac{1}{2}}$.

Se $f : M \to N$ è una applicazione differenziabile sia $df_p : T_pM \to T_{f(p)} N$ il suo differenziale. Nel caso $M = \mathbb{R}$ se $\frac{d}{ds}$ è la sezione standard di $T\mathbb{R}$ definiamo vettore velocità di f in $t_o \in \mathbb{R}$ il vettore tangente su N, $\dot{f}(t_o) = df_{t_o} (\frac{d}{ds}) \in T_{f(t_o)} N$.

Se $\{x_1, \ldots\ldots, x_m\}$ è un sistema di coordinate locali in un intorno di $f(t_o)$ e se $f_i(t)$ sono le coordinate del generico punto $f(t)$ risulta ovviamente $\dot{f}(t) = \sum_{i=1}^{m} (\frac{df_i}{dt})_t \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Sia ora M una varietà riemanniana e $\gamma : (a,b) \to M$ una curva differenziabile. Ricordiamo che si definisce la lunghezza di γ, $L_a^b(\gamma)$, ponendo

$$L_a^b (\gamma) = \lim_{\varepsilon \to o} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} || \dot{\gamma}(t)|| dt.$$

E' ben noto allora che $L_a^b(\gamma)$ non dipende dalla particolare parametrizzazione e che è ben definita anche quando γ è solo continua in (a,b) e differenziabile nel complementare di un insieme finito (cioé differenziabile a tratti). Inoltre se denotiamo con $\Omega(p,q)$ l'insieme delle curve

$\gamma : [0,1] \to M$ differenziabili a tratti e tali che $\gamma(o) = p$ e $\gamma(1) = q$ la funzione

$$d(p,q) = \inf_{\gamma \in \Omega(p,q)} L_o^1(\gamma)$$

è una distanza in M compatibile con la topologia di M.

Se M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^k$, $X \in T_p M$ e $Y \in \Gamma(M)$, ha senso considerare la derivata direzionale di Y rispetto a X nel modo usuale. Il vettore che si ottiene non è in generale tangente a M; se però componiamo detta operazione con la proiezione sul piano tangente otteniamo una applicazione

$${}_p\nabla : T_p M \times \Gamma(M) \to T_p M$$

che gode delle seguenti proprietà:

1) ${}_p\nabla$ è R-bilineare, cioè $\forall\, a,b \in R$, $X_p, X'_p \in T_p M$ e $Y,Y' \in \Gamma(M)$

risulta

$${}_p\nabla(X_p, aY+bY') = a\, {}_p\nabla(X_p,Y) + b\, {}_p\nabla(X_p,Y')$$

$${}_p\nabla(aX_p + bX'_p,Y) = a\, {}_p\nabla(X_p,Y) + b\, {}_p\nabla(X'_p,Y)$$

2) ${}_p\nabla(X_p,fY) = X_p(f)\, Y + f(p)\; {}_p\nabla(X_p,Y) \qquad \forall f \in \mathfrak{F}(M),\ X_p \in T_p M, Y \in \Gamma(M).$

($X_p(f)$ è la derivata direzionale di f rispetto a X_p)

3) Se $X,Y \in \Gamma(M)$ l'applicazione $M \to T\,M$ data da $p \mapsto {}_p\nabla(X_p,Y)$

è un campo di vettori (differenziabile) su M.

Le considerazioni precedenti permettono allora d'introdurre un concetto formale di derivazione di campi di vettori per varietà, non necessariamente immerse, nel modo seguente.

1.1.2. DEFINIZIONE. Sia M una varietà differenziabile. Diremo connessione su M una applicazione

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$$

tale che

1') ∇ è $\mathbb{R}$-bilineare

2') ∇ è $\mathfrak{F}(M)$-lineare nel primo argomento (cioè $\nabla(fX,Y) = f\,\nabla(X,Y)$ per $X,Y \in \Gamma(M)$ $f \in \mathfrak{F}(M)$)

3') $\nabla(X,fY) = X(f)\,Y + f\,\nabla(X,Y)$.

Indicheremo in seguito con $\nabla_X Y$ il campo di vettori $\nabla(X,Y)$ e si chiamerà anche derivata covariante di Y rispetto a X. Naturalmente data una famiglia $\{{}_p\nabla\}_{p \in M}$ di operatori verificanti le 1) 2) 3) si può definire una connessione affine tale che $(\nabla_X Y)_p = {}_p\nabla(X_p,Y)$ e viceversa è facile vedere che per un'applicazione ∇ che verifica la definizione 1.1.2. $(\nabla_X Y)_p$ dipende solo dal valore di X in p e quindi ∇ definisce una famiglia $\{{}_p\nabla\}_{p \in M}$ di applicazioni verificanti le 1) 2) 3).

1.1.3. DEFINIZIONE. Se M è una varietà riemanniana diremo che una connessione ∇ su M è compatibile (o riemanniana) se risulta $\forall X,Y,Z \in \Gamma(M)$

a) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (*) cioè ∇ è simmetrica.

b) $X(Y,Z) = (\nabla_X Y,Z) + (Y, \nabla_X Z)$.

Si ha allora il seguente teorema (per la dimostrazione si consulti un qualunque testo di geometria riemanniana).

1.1.4. TEOREMA. Se M è una varietà riemanniana esiste una ed una sola connessione su M verificante a) e b).

In seguito quando parleremo di connessione su una varietà riemanniana ci riferiremo sempre a quella riemanniana la cui esistenza è assicurata dal teorema precedente.

Se $\gamma : (a,b) \to M$ è una curva differenziabile, avremo in seguito necessità di "derivare" un campo di vettori $V \in \Gamma(\gamma)$ rispetto a $\dot{\gamma}$. Questo sarà possibile a norma del seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

1.1.5. TEOREMA. Se M è una varietà riemanniana con connessione riemanniana ∇, e $\gamma : (a,b) \to R$ è una curva differenziabile, esiste un unico operatore

$$\frac{D}{dt} : \Gamma(\gamma) \to \Gamma(\gamma)$$

tale che se $V,W \in \Gamma(\gamma)$

1) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{D}{dt}(V) + \frac{D}{dt}(W)$

(*) $[\ ,\ ]$ indica l'operatore parentesi di Lie cioè $[X,Y]$ è il campo di vettori che su $f \in \mathfrak{F}(M)$ vale $X(Y(f)) - Y(X(f))$.

2) se $f \in \mathcal{F}((a,b))$, $\frac{D}{dt}(fV) = \left(\frac{df}{dt}\right) V + f \frac{D}{dt}(V)$

3) se $Y \in \Gamma(M)$ e $Y_{\gamma(t)} = V(t) \quad \forall \; t \in (a,b)$

allora $\left(\frac{D}{dt}(V)\right)_s = \nabla_{\dot\gamma(s)} Y \qquad \forall \; s \in (a,b)$

Il campo di vettori lungo γ, $\frac{D}{dt}(V)$, sarà spesso indicato con $\frac{DV}{dt}$ o, quando non vi sia possibilità di equivoco, con V'.

A volte può essere utile avere un'espressione in coordinate locali di ∇ e $\frac{D}{dt}$. Sia allora $p \in M$ e $\{x_1, \ldots, x_m\}$ un sistema di coordinate locali in un intorno U di p. Sia $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\}$ la base associata in $TM_{|U}$ e poniamo

1.1.6. $$\Gamma^k_{ij} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$$

Le funzioni Γ^k_{ij} determinano completamente ∇ in U.

Infatti se $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, usando le proprietà formali di ∇ si ottiene facilmente

1.1.7. $$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m X^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(Y^k) + \sum_{j=1}^m \Gamma^k_{ij} Y^j\right)\right) \frac{\partial}{\partial x_k} .$$

Analogamente se $\gamma : \mathbb{R} \to M$ è una curva differenziabile

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots\ldots, \gamma_m(t))$ e $V = \sum_{i=1}^{m} V_i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(t)}$ è un campo di vettori lungo γ.

$$1.1.8. \quad \frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{dV_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{m} \frac{d\gamma_i(t)}{dt}\, \Gamma^k_{ij}\, (\gamma(t)V_j)\right)\frac{\partial}{\partial x_k} \ .$$

Una situazione in cui ci troveremo spesso è la seguente:

sia $S : \mathbb{R}^2 \to M$ una "superficie parametrizzata", cioé una funzione differenziabile, e $V \in \Gamma(S)$. Se x,y sono le coordinate correnti in R^2 e $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ la base ad esse associata possiamo definire la derivata di V lungo $\frac{\partial}{\partial x}$ o $\frac{\partial}{\partial y}$ nel modo seguente.

Fissato $(x_o,y_o) \in \mathbb{R}^2$ sia $S_{x_o} : \mathbb{R} \to M$ la curva $S_{x_o}(t) = S(x_o,t)$. Definiamo allora $\left(\frac{DV}{\partial y}\right)_{(x_o,y_o)} = \left(\frac{DV}{dt}\right)_{t=y_o}$ ove $\frac{D}{dt}$ è l'operatore introdotto precedentemente.

Analogamente per $\left(\frac{DV}{\partial x}\right)_{(x_o,y_o)}$. Si definisce allora per ogni (x_o,y_o) una coppia di vettori in $T_{S(x_o,y_o)}M$.

Usando la 1.1.8. è facile vedere che le applicazioni

$$(x,y) \mapsto \frac{DV}{\partial x}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{DV}{\partial y}$$

definiscono campi di vettori lungo S(cioé sono differenziabili).

1.1.9. PROPOSIZIONE. Se una connessione ∇ verifica la a) della definizione 1.1.3. e $S: R^2 \to M$ è una applicazione differenziabile, allora

$$\frac{D}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{D}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial x} \, (*) .$$

Dimostrazione. In termini di coordinate locali mediante la 1.1.8 si ottiene

$$\frac{D}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j,k=1}^{m} \frac{\partial S_i}{\partial y} \frac{\partial S_j}{\partial x} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

avendo posto $S(x,y) = (S_1(x,y),\dots,S_m(x,y))$; analoga espressione si trova per il secondo membro dell'uguaglianza.

Ma per la a)

$$\Gamma_{ij}^{k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} , \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] , \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$$

$$= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} , \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \Gamma_{ji}^{k}$$

(*) $\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{(x_o,y_o)} = dS_{(x_o,y_o)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$

($[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ per la simmetria della derivata seconda in R^2) e

quindi si ha la tesi. ■

1.2. PARALLELISMO E GEODETICHE - APPLICAZIONE ESPONENZIALE

Sia M una varietà riemanniana, ∇ e $\frac{D}{dt}$ gli operatori di derivazione associati alla metrica introdotti nel paragrofo precedente.

1.2.1. DEFINIZIONE. Se $\gamma : (a,b) \to M$ è una curva differenziabile e $V \in \Gamma(\gamma)$, diremo che V è parallelo lungo γ se $\frac{DV}{dt} = 0$

Intuitivamente nel caso che γ è una curva su una superficie M e "facciamo rotolare M su un piano lungo γ" un campo di vettori lungo γ risulterà parallelo se il corrispondente campo di vettori sul piano indotto dal "rotolamento" è un campo parallelo nel senso ovvio.

1.2.2. PROPOSIZIONE. Se $\gamma : \mathbb{R} \to M$ è una curva differenziabile e $X_p \in T_pM$, $p = \gamma(o)$, allora esiste un unico campo di vettori $X \in \Gamma(\gamma)$ tale che:

1) X è parallelo lungo γ

2) $X(o) = X_p$.

Dimostrazione. L'equazione $\frac{DX}{dt} = 0$ in coordinate locali è una equazione differenziale lineare del 1° ordine (vedi 1.1.8.) per cui i ben noti teoremi sulle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie ci assicurano la tesi. ∎

1.2.3. COROLLARIO. *Se* $\gamma : R \to M$ *è una curva differenziabile e se* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, *l'isomorfismo* $T_{t_1}^{t_2} : T_{\gamma(t_1)}M \to T_{\gamma(t_2)}M$ *che al vettore* $X_{\gamma(t_1)}$ *associa il valore in* t_2 *dell'unico campo* X *parallelo lungo* γ *tale che* $X(t_1) = X_{\gamma(t_1)}$ *è una isometria.*

Dimostrazione. Osserviamo intanto che per la proposizione precedente l'applicazione $T_{t_1}^{t_2}$ è biunivoca e che dalla R-linearità di $\frac{D}{dt}$ segue che $T_{t_1}^{t_2}$ è lineare; inoltre se X è parallelo lungo γ

$$\frac{d}{dt}(||X||^2) = \dot{\gamma}_{(t)}(X,X) = 2(\frac{DX}{dt}, X) = 0$$

dunque $T_{t_1}^{t_2}$ conserva la norma (e quindi il prodotto scalare). ∎

Un'osservazione che ci sarà particolarmente utile nei calcoli in seguito è la seguente. Sia $\gamma : (a,b) \to M$ una curva differenziabile e $a < c < b$. Sia $\{P_1, \ldots P_m\}$ una base ortonormale in $T_{\gamma(c)}M$. Trasportando parallelemente $\{P_i\}$ lungo γ si determina per ogni $t \in (a,b)$ una base $\{P_i(t) = T_c^t(P_i)\}$ che è ancora ortonormale. Se $X \in \Gamma(\gamma)$ si può scrivere $X(t) = \sum_{i=1}^m X^i(t)P_i(t)$ con $X^i(t) \in \mathfrak{F}((a,b))$. Risulta allora

$$\frac{DX}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{dX^i}{dt}(t)\right)P_i(t) .$$

1.2.4. DEFINIZIONE. Diremo che una curva $\gamma :(a,b) \to M$ è una geodetica se $\dot\gamma(t)$ è parallelo lungo γ.

1.2.5. PROPOSIZIONE. Sia $p \in M$ e $X_p \in T_pM$. Esiste allora $\varepsilon > o$ ed un'unica curva $\gamma:(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tale che

1) γ è una geodetica

2) $\gamma(o) = p$

3) $\dot\gamma(o) = X_p$

Dimostrazione. L'equazione $\frac{D}{dt}\dot\gamma(t)$ è (in coordinate locali) una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine. I teoremi ricordati nella dimostrazione della proposizione 1.2.2. ci assicurano allora la tesi. ∎

OSSERVAZIONI: 1) Se M è una superficie di R^3 ritroviamo il concetto di geodetica come curva il cui vettore accelerazione $\ddot\gamma = \frac{D\dot\gamma}{dt}$ è perpendicolare ad M.(si ricordino le considerazioni fatte prima della definizione 1.1.2.).

2) Dalla dimostrazione del corollario 1.2.3. segue che se γ è una geodetica $||\dot\gamma(t)|| = c \in \mathbb{R}$ per ogni valore del parametro t e pertanto $L_o^s(\gamma) = \int_o^s c\,dt = sc$. Quindi una geodetica è sempre para-

metrizzata con parametro proporzionale alla lunghezza d'arco.

Sia $p \in M$ e $X_p \in T_p M$. Esiste allora un'unica geodetica

$\gamma : (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \to M$ con condizioni iniziali $\gamma(o) = p$ e $\dot\gamma(o) = X_p$. Sia

$\varepsilon_1 < \varepsilon$ e $|t| < 2$; allora $|t\,\varepsilon_1| < 2\varepsilon$ e quindi $\gamma(\varepsilon_1 t)$ è definita

per $|t| < 2$ e $\alpha(t) = \gamma(\varepsilon_1 t)$ è una geodetica con condizioni iniziali $\alpha(o) = p$ e $\dot\alpha(o) = \varepsilon_1 X_p$ definita nell'intervallo $(-2,2)$. Poiché le soluzioni di un'equazione differenziale dipendono differenziabilmente (se le funzioni che intervengono nell'equazione sono differenziabili) dalle condizioni iniziali, esiste $\varepsilon > o$ tale che per ogni vettore X_p in un opportuno intorno di 0 la soluzione con dati iniziali p, X_p è definita in $(-\varepsilon, \varepsilon)$ con ε indipendente da X_p. Se ne conclude che esiste $\varepsilon_1 > o$ tale che se $||X_p|| < \varepsilon_1$ la geodetica con dati iniziali p, X_p è definita in $(-2,2)$.

Si ha allora la seguente

1.2.6. <u>PROPOSIZIONE</u>. <u>L'insieme</u> N_p <u>dei vettori</u> $X_p \in T_p M$ <u>tali che la geodetica con dati iniziali</u> p <u>e</u> X_p <u>è definita in un intervallo del parametro contenente</u> 1 <u>è un intorno di</u> $0 \in T_p M$.

Se $X \in T_p M$(*) indichiamo con γ la geodetica di dati iniziali p, X.

1.2.7. <u>DEFINIZIONE</u>. <u>Definiamo, per</u> $X \in N_p$, $\exp_p X = \gamma_X(1)$.

$\exp_p : N_p \to M$ <u>si dice applicazione esponenziale</u>.

(*) Quando il contesto non crea ambiguità indichiamo semplicemente con una lettera $X, Y, \ldots\ldots$ un vettore tangente in un punto della varietà.

Il nome deriva dal caso classico del gruppo lineare $GL(m, \mathbb{R})$.
In tal caso infatti se I è la matrice identica $T_I GL(m, \mathbb{R}) = M(m, \mathbb{R})$ e la geodetica uscente da I con vettore velocità $A \in M(m, \mathbb{R})$ è il sottogruppo ad un parametro e^{tA} e quindi risulta

$$\exp_I A = e^A = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k .$$

1.2.8. <u>PROPOSIZIONE</u>. $\exp_p$ <u>è un diffeomorfismo di un intorno aperto di</u> 0 <u>in</u> T_pM <u>su un intorno aperto di</u> p <u>in</u> M.

<u>Dimostrazione</u>. Poiché le soluzioni di un'equazione differenziale dipendono differenziabilmente dalle condizioni iniziali e N_p è un intorno di 0 allora $\exp_p$ è differenziabile in un intorno di 0. Inoltre, previa l'usuale identificazione $T_pM = T_o(T_pM)$, $(d \exp_p)_0(X) = X \quad \forall X \in T_pM$ in quanto il segmento $\{tX|-1<t<1\}$ è mandato sulla geodetica γ_X e quindi $(d \exp_p)_0 X$ è il vettore tangente a γ_X in 0 cioè X. La conclusione segue dal teorema delle funzioni inverse.■

Se U è un intorno di $0 \in T_pM$ tale che $\exp_{p|U}$ sia un diffeomorfismo, $\exp_{p|U}$ ci fornisce un sistema di coordinate locali, dette normali, in un intorno $V = \exp_p(U)$ di p in M.

Un tale sistema di coordinate realizza formalmente l'idea intuitiva di proiettare localmente lo spazio tangente sulla varietà facendo corrispondere alle rette per l'origine di T_pM le geodetiche per p su M. Inoltre è un tipo di coordinate particolarmente utile nei calcoli locali in quanto, detta $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_m}\}$ la base naturale associata alle coordinate normali $(x_1, \dots\dots, x_m)$ in $T(M)_{|V}$ risulta $(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j})_q = o \quad \forall q \in V$

e se $X_p \in T_pM$, $\nabla_{X_p} \frac{\partial}{\partial x_j} = o$.

<u>OSSERVAZIONI</u> : 3) Dato $X_p \in T_pM$, la curva $t \mapsto \exp_p(tX_p)$ è la geodetica di dati iniziali p e X_p

4) Se $\gamma(t) = \exp_p(tX_p)$ allora per ogni valore del parametro $t, ||\dot{\gamma}(t)||=||X||_p$(*). Ne segue allora che $\exp_p$ è un'isometria lungo i raggi, cioé se X_p e Y_p sono vettori paralleli in T_pM, cioé se $X_p = KY_p$, allora $||X_p - Y_p|| = d(\exp_pX_p, \exp_pY_p)$.

Estendiamo ora l'applicazione esponenziale al fibrato tangente $TM \xrightarrow{\pi} M$.

Sia $\qquad N = \{X \in T(M) / \exp_{\pi(X)} X$ è definito$\}$.

Possiamo allora definire

$$\mathrm{Exp} : N \to M \times M, \quad \mathrm{Exp}(X) = (\pi(X), \exp_{\pi(x)} X)$$

N è ovviamente un intorno della zero sezione in $T(M)$ e Exp è una appli

---

(*) infatti $||\dot{\gamma}(t)|| = ||\dot{\gamma}(o)||= || X_p||$ per l'osservazione 2).

cazione differenziabile.

1.2.9. PROPOSIZIONE. Exp è un diffeomorfismo di un intorno della zero sezione in $T(M)$ su un intorno della diagonale in $M \times M$.

Dimostrazione. Chiaramente se $p \neq q$, $X_p \in T_pM$, $X_q \in T_qM$ allora $\mathrm{Exp}\, X_p \neq \mathrm{Exp}\, X_q$. Inoltre se $(x_1,\ldots, x_m)$ è un sistema di coordinate locali in un intorno di $p \in M$ e $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\}$ la base associata in $T(M)$ e se un vettore in $T(M)$ vicino al vettore nullo in T_pM ha coordinate $(x_1,\ldots x_m; V_1,\ldots V_m)$ e risulta

$$\mathrm{Exp}(x_1,\ldots,x_m; V_1,\ldots,V_m) = (x_1,\ldots,x_m; \exp_{(x_1,\ldots,x_m)} \sum_{i=1}^{m} V_i \frac{\partial}{\partial x_i}) =$$

$$= (x_1,\ldots,x_m; y_1, \ldots ,y_m) = (f_1(x_1,\ldots,x_m ;V_1,\ldots,V_m),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_m; V_1,$$

$$\ldots,V_m); g_1(x_1,\ldots,x_m; V_1,\ldots V_m),\ldots,g_m(x_1,\ldots x_m;V_1,\ldots,V_m),$$

allora ovviamente

(a) $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_o = \delta_{ij}$ (b) $\left(\frac{\partial f_i}{\partial V_j}\right)_o = 0$

(c) $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right)_o = \delta_{ik}$ (d) $\left(\frac{\partial g_i}{\partial V_k}\right)_o = \delta_{ik}$;

la (a) e (b) sono ovvie, la (c) viene dal fatto che $\exp_p 0 = p$ quindi per $V = 0$ $g_i = x_i$, la (d) viene dalla dimostrazione della proposizione

1.2.8. .

La tesi segue allora dal teorema delle funzioni inverse essendo $(d\ \mathrm{Exp})_{(p;o)}$ non singolare.■

Procediamo ora ad uno studio "locale" del comportamento delle geodetiche uscenti da un punto

1.2.10. TEOREMA . Per ogni $p \in M$ esiste un intorno U_p di p e $\varepsilon > o$ tale che ogni coppia di punti in U_p è congiunta da un'unica geodetica di lunghezza minore di ε(*). Inoltre questa geodetica dipende differenzialmente dai due punti(**).

Dimostrazione. Per 1.2.9. esiste un intorno U di $(p,o) \in T(M)$ tale che $\mathrm{Exp}|_U$ è un diffeomorfismo su un intorno aperto di (p,p) in MxM.
Possiamo ovviamente supporre che U sia della forma
$\{(q,V) | q$ è in un intorno di p e $||V|| < \varepsilon\}$.

Si ha allora la tesi non appena si ricordi che la lunghezza del vettore tangente ad una geodetica è costante e dunque

$$\int_o^1 || \frac{d}{dt} \exp_q tV||dt = \int_o^1 ||V||dt < \varepsilon .$$■

Caratterizziamo ora le geodetiche mediante una proprietà di "minimalità locale".

(*) Sarebbe possibile dimostrare che per un'opportuna scelta di ε, tale geodetica è completamente contenuta in U_p, cioé che U_p è un "intorno convesso".

(**) Esplicitamente questo significa che l'applicazione di $U_p x U_p$ in $U_p x TM|_{U_p}$ data da $(q_1,q_2) \mapsto (q_1,\dot{\gamma}(o))$, dove γ è la geodetica in questione da q_1 a q_2, è differenziabile.

1.2.11. TEOREMA. Siano ε e U_p come in 1.2.10 e $\gamma:[0,1] \to M$ una geodetica di lunghezza minore di ε. Sia inoltre $\omega: [0,1] \to M$ una curva differenziabile a tratti congiungente $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$.

Allora $L(\gamma) \leq L(\omega)$ e $L(\gamma) = L(\omega)$ se e solo se

$$\{\gamma(t) \mid t \in [0,1]\} = \{\omega(t) \mid t \in [0,1]\}^{(*)}$$

Premettiamo due lemmi che insieme costituiscono il cosidetto "lemma di Gauss". In essi useremo le stesse notazioni del teorema enunciato sopra.

1.2.12. LEMMA. Consideriamo in U_p per ogni $r_o \in (o,\varepsilon)$ l'insieme

$$\Sigma r_o = \{\exp_p V \mid \|V\| = r_o\}$$

Allora le geodetiche uscenti da p sono curve ortogonali a Σr_o(**).

(*) Il teorema si può eneunciare intuitivamente dicendo che le geodetiche sono caratterizzate, a meno di un cambiamento di parametro, dal fatto che minimizzano la lunghezza tra tutte le curve che congiungono due punti abbastanza vicini.

(**) Poiché $\exp_p|_{U_p}$ è un diffeomorfismo e $\Sigma r_o = \exp_p(S_{r_o})$, $S_{r_o} = \{V \in T_pM \mid \|V\| = r_o\}$, Σr_o è una ipersuperficie di M.

Dimostrazione. Sia $X : \mathbb{R} \to T_pM$ una curva differenziabile con $||X(t)|| = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e definiamo una superficie differenziabile $F : [o,\varepsilon) \times \mathbb{R} \to M$ ponendo

$$F(r,t) = \exp_p(rX(t)).$$

Dall'osservazione 3) segue che, per t_o fissato in $\mathbb{R}$, $r \mapsto F(r,t_o)$ è un arco dell'unica geodetica uscente da p e passante per il punto $q_o = \exp_p(r_oX(t_o))$ che al variare della curva X e di t_o descrive la ipersuperficie Σr_o.

Bisogna dunque provare che la geodetica $r \mapsto F(r,t_o)$ è ortogonale alla curva $t \mapsto \exp_p(r_oX(t))$ qualunque sia $X : \mathbb{R} \to T_pM$ tale che $X(t_o) = q_o$.

per questo basta verificare che

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad r \in [o,\varepsilon).$$

(Ricordiamo che se $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}$ sono i vettori della base standard in $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial F}{\partial r} = dF(\frac{\partial}{\partial r})$ e $\frac{\partial F}{\partial t} = dF(\frac{\partial}{\partial t})$).

Ora

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \left(\frac{D}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{D}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} \right)$$

ma $r \mapsto F(r,t)$ per t fissato è una geodetica e quindi $\frac{D}{\partial r} \frac{F}{\partial r} = o$

inoltre per la 1.1.9. $\frac{D}{\partial r}\frac{F}{\partial t} = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial r}$ e quindi

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{D}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial r}\right) = o;$$

infatti ancora, per t fissato, $r \mapsto f(r,t)$ è una geodetica e quindi

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \text{costante} = X(t) = 1$$

In definitiva $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = o$ e poiché $F(o,t) = p \quad \forall t \in R$

si ottiene $\quad \forall r,t \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t}\right)_{r=o} = o$. ∎

1.2.13. LEMMA. Sia $\omega : [a,b] \to (U_p - \{p\})$ differenziabile a tratti; allora

$\int_a^b \| \dot\omega \| \, dt \geq |r(a) - r(b)|$ (*) e l'uguaglianza vale se e solo se $r(t)$ è monotona e $X(t)$ è costante (*), essendo $X : \mathbb{R} \to T_pM$ come nel lemma precedente.

Dimostrazione. Sia, come sopra, $F(r,t) = \exp_p(r\,X(t))$ allora

$$\omega(t) = F(r(t),t) \quad \text{e} \quad \dot\omega = \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) r' + \frac{\partial F}{\partial t} .$$

Poiché $\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = o$ e $\left\|\frac{\partial F}{\partial r}\right\| = 1$ si ha

$$\|\dot\omega(t)\|^2 = |r'(t)|^2 + \left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\|^2 \geq |r'(t)|^2$$

(*) Ciascun punto $\omega(t)$ può scriversi in modo unico come $\omega(t) = \exp_p(r(t)\;X(t))$ con $o < r(t) < \varepsilon$ e $\|X(t)\| = 1$.

e vale il segno di uguaglianza se e solo se $\left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\| = o$ cioè $X(t) = o$.

$$\text{Quindi} \quad \int_a^b \|\dot{\omega}(t)\|\, dt \geq \int_a^b |r'(t)|\, dt \geq |r(b) - r(a)|$$

e vale il segno di uguaglianza se e solo se r è monotona e $X = X(t)$ è costante. ■

Dimostrazione del teorema 1.2.11. Sia $\gamma : [0,1] \to M$ una geodetica e sia $X = \frac{\dot{\gamma}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|}$. Consideriamo un cammino ω da p a $q = \exp_p(rX) \in U_p$ con $0 < r = \|\dot{\gamma}(0)\| < \varepsilon$. Per ogni $\delta > 0$ il cammino conterrà un tratto congiungente un punto di Σ_δ con un punto di Σ_r e giacente sulla corona circolare $\Sigma_r - \Sigma_\delta$. Per il lemma 1.2.13., essendo $\|X\| = 1$, la lunghezza di questo tratto sarà maggiore o uguale a $r - \delta$ e quindi facendo tendere δ a zero $L(\omega) \geq r = L(\gamma)$. Se poi

$$\{\omega(t) \mid t \in [0,1]\} = \{\exp_p tX \mid t \in [0,r]\}^{(*)}$$

allora dall'ultima asserzione del lemma 1.2.13. segue $L(\omega) = r = L(\gamma)$. ■

Come ovvia conseguenza si ottiene

1.2.14. COROLLARIO. Supponiamo che $\omega : [0,1] \to M$ sia un cammino parametrizzato proporzionalmente alla lunghezza d'arco e minimizzante la lunghezza tra tutti i cammini congiungenti $\omega(0)$ e $\omega(1)$. Allora ω è una geodetica$^{(**)}$.

(*) Si ricordi che $\exp_p(t\dot{\gamma}(0)) = \gamma(t)$ $\forall t \in [0,1]$ se $\gamma : [0,1] \to M$ è una geodetica ed $\exp_p$ è definito in $\dot{\gamma}(0)$.

(**) Si ha, in particolare, che ω è differenziabile.

Per terminare con queste prime considerazioni vogliamo solo notare esplicitamente che se il concetto di lunghezza di un cammino differenziabile a tratti non dipende dalla parametrizzazione, il concetto di geodetica dipende dalla parametrizzazione (*) .

Già da questi primi fatti appare evidente l'utilità di un'applicazione quale l'esponenziale; ma senza ulteriori ipotesi un argomento sul quale intervenga l'esponenziale può essere portato avanti solo per problemi di natura locale. Vediamo ora brevemente che tipo di ipotesi sono necessarie perché l'esponenziale sia definito globalmente e quanto esse siano restrittive.

1.2.15. DEFINIZIONE. Diremo che una varietà riemanniana M è completa se lo è rispetto alla metrica introdotta nel paragrafo precedente. Diremo che M è geodeticamente completa se ogni geodetica è definita per tutti i valori reali del parametro.

1.2.16. TEOREMA di HOPF-RINOW. Sia M una varietà riemanniana connessa.

1) Le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) M è completa

b) M è geodeticamente completa

c) Esiste $p \in M$ tale che $\exp_p$ è definito su tutto T_pM

d) Exp è definito su tutto $T(M)$

e) Ogni sottoinsieme di M chiuso e limitato è compatto.

2) Se M è completa, per ogni coppia di punti $p,q \in M$ esiste una geodetica $\gamma : [0,1] \to M$ tale che $\gamma(o) = p$, $\gamma(1) = q$ e $L(\gamma) = d(p,q)$ (esiste cioé una geodetica minimale congiungente p e q).

(*) Un facile calcolo in coordinate locali mostra che se la curva $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [0,1]$, è una geodetica e se $t = t(\tau)$, $\tau \in [a,b]$, è una funzione lineare di $[a,b]$ su $[0,1]$, $\gamma=\gamma(t(\tau))$ è ancora una geodetica. Questo risultato non vale però per una qualunque riparametrizzazione della curva γ.

Per la dimostrazione rimandiamo ad un qualunque buon testo di geometria differenziale.

Le varietà che considereremo le assumeremo sempre complete; dal nostro punto di vista (cioè lo studio della topologia delle varietà mediante l'uso di concetti metrici) una tale assunzione può essere giustificata (solo in parte però) dal seguente teorema.

1.2.17. TEOREMA. Sia M una varietà riemanniana. Esiste allora una struttura riemanniana su M, conforme alla data e rispetto alla quale M è completa(*). Per la dimostrazione rimandiamo a Hicks [15].

Un'altra ragione che rende meno restrittiva l'ipotesi fatta sulle varietà che prenderemo in considerazione è l'equivalenza fornitaci dal teorema di Hopf-Rinow tra la completezza (metrica) e la completezza geodetica. Questa giustificazione però cade se tentiamo di generalizzare la geometria riemanniana al caso di varietà modellate su spazi di Hilbert (varietà di dimensione infinita). Infatti in tal caso la completezza metrica (ipotesi ancora accettabile) non implica la completezza geodetica e il richiedere quest'ultima costantemente è un po' troppo restrittivo.

(*) Ricordiamo che due strutture riemanniane $(,)$ e $< , >$ su M si dicono conformi se $\forall X,Y \in T_pM$ (e $\forall p \in M$) risulta

$$\frac{(X,Y)}{((X,Y)\quad(Y,Y))^{\frac{1}{2}}} = \frac{<X,Y>}{(<X,X>\quad<Y,Y>)^{\frac{1}{2}}}$$

1.3. CURVATURA

1.3.1. DEFINIZIONE. Assegnata una varietà M con una connessione riemanniana ∇, si dice curvatura l'applicazione

$$R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$$

definita ponendo (*)

$$R(X,Y,Z) = R(X,Y)Z = -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

R è un campo di tensori del tipo (1,3), infatti si verifica facilmente che è un'applicazione $\mathfrak{F}(M)$-multilineare.

OSSERVAZIONE. 1) $(R(X,Y)Z)(p)$ dipende solo dai valori che X,Y,Z assumono in p, nel senso che se $X',Y',Z' \in \Gamma(M)$ e $X'_p = X_p, Y'_p = Y_p, Z'_p = Z_p$ risulta $(R(X',Y')Z')(p) = (R(X,Y)Z)(p)$.

Avrà senso allora scrivere $R(X_p,Y_p)Z_p$ se $X_p,Y_p,Z_p \in T_pM$.

Si parlerà quindi di tensore di curvatura sulla varietà M associato alla connessione ∇.

Il tensore di curvatura misura di quanto la "derivata covariante seconda" si discosta dall'essere simmetrica. Daremo ora un calcolo che giustifica tale affermazione.

(*) Molti testi definiscono la curvatura ponendo

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z .$$

La definizione che abbiamo dato qui ha il vantaggio che il prodotto scalare $(R(\partial_h, \partial_i)\, \partial_j, \partial_k)$ coincide con il simbolo classico R_{hijk}.

1.3.2. LEMMA. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to M$ una superficie di parametri x e y e sia X un campo di vettori lungo F. Risulta allora

$$\frac{D}{\partial y}\frac{D}{\partial x} X - \frac{D}{\partial x}\frac{D}{\partial y} X = R\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) X$$

dove $\dfrac{D}{\partial y} = \nabla_{\frac{\partial F}{\partial y}}$ e $\dfrac{D}{\partial x} = \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x}}$.

Dimostrazione. Esprimiamo i due termini dell'uguaglianza su scritta in un sistema di coordinate locali $(x_1,\dots,x_m)$; siano $(x^i),(y^i),(X^i)$ rispettivamente le componenti dei campi di vettori $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, X nella base naturale $(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i})$; risulta allora

$$\frac{D}{\partial y}\frac{D}{\partial x} X - \frac{D}{\partial x}\frac{D}{\partial y} X = \sum_{i=1}^{m} X^i\left(\frac{D}{\partial y}\frac{D}{\partial x}\partial_i - \frac{D}{\partial x}\frac{D}{\partial y}\partial_i\right) =$$

$$= \sum_{i,j,k} X^i x^j y^k (\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_k}\partial_i) = (\text{poiché } [\partial_i\ \partial_k] = 0) =$$

$$= \sum_{i,j,k} X^i x^j y^k\, R(\partial_j,\partial_k)\partial_i = R\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) X. \blacksquare$$

1.3.3. LEMMA. Il tensore di curvatura verifica le seguenti proprietà (si ricordi che la connessione ∇ si è supposta riemanniana) qualunque siano i campi di vettori $X,Y,Z,W \in \Gamma(M)$.

a) $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$

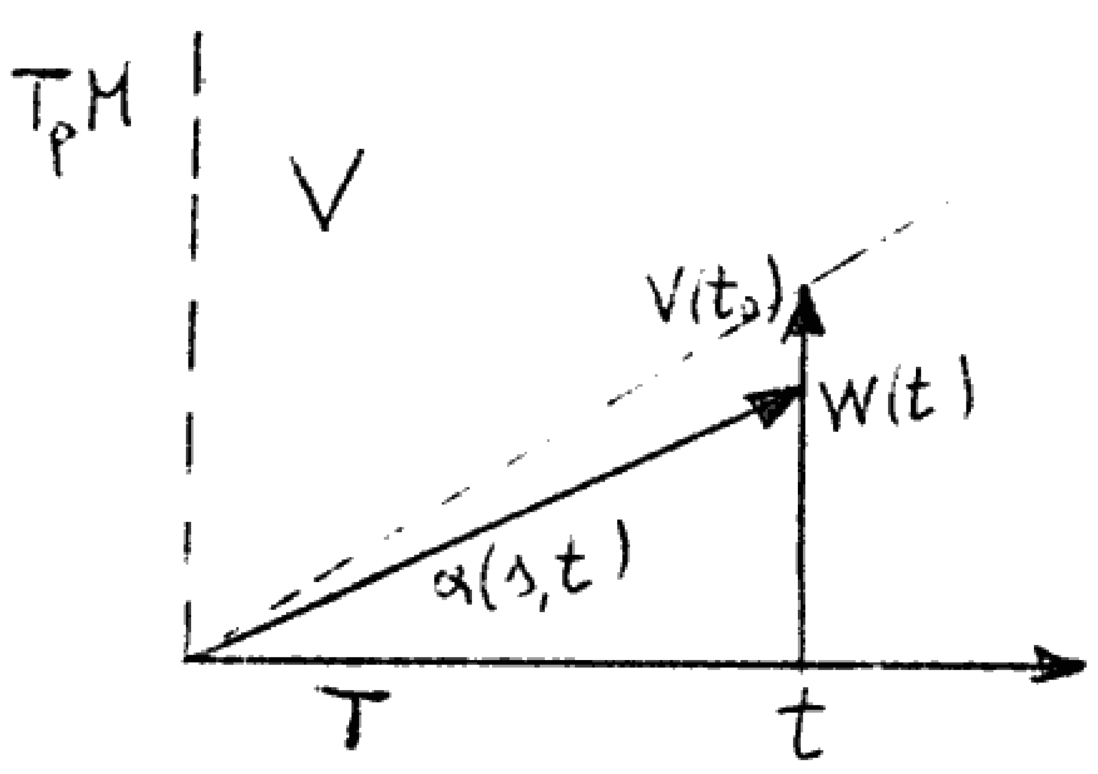
b) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

c) $(R(X,Y)Z,W) = -(R(X,Y)W,Z)$

d) $(R(X,Y)Z,W) = (R(Z,W)X,Y)$.

La dimostrazione è un semplice calcolo.

Diamo ora una prima interpretazione geometrica di R. Il calcolo che faremo ci sembra particolarmente istruttivo perché è un primo esempio di "teorema di confronto". Si tratta in questo caso di confrontare una grandezza nello spazio "piatto" T_pM con la corrispondente nello spazio "curvo" M.



Sia T un vettore unitario in T_pM e V ortogonale a T e unitario. Sia $V(t)$ il campo lunto il raggio $\{tT|t \geq 0\}$ ottenuto trasportando V parallelamente e sia $W(t) = tV(t)$. Poniamo $J(t) = (d\exp_p)_{tT}(W(t))$; allora $J(t)$ è un campo di vettori lungo la geodetica $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tT)$. Poniamo inoltre $\alpha(s,t) = sW(t) + tT$ (*); chiaramente, fissato s_o, $t \mapsto \alpha(s_o,t)$ è un raggio in T_pM e quindi $t \mapsto \exp_p \alpha(s_o,t)$ è una geodetica. Se poniamo $\beta(s,t) = \exp_p(\alpha(s,t))$, chiaramente $J(t) = (\frac{\partial \beta}{\partial s})_{(0,t)}$.

Risulta allora

$$J''(t) = (\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \beta}{\partial s})_{(0,t)} = (\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial \beta}{\partial t})_{(0,t)} = (\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \beta}{\partial t})_{(0,t)} +$$

$$+ R(\frac{\partial \beta}{\partial s},\frac{\partial \beta}{\partial t})\frac{\partial \beta}{\partial t}$$

ma $t \mapsto \beta(s_o,t)$ è una geodetica e quindi $\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \beta}{\partial t} = 0$

Dunque

$$(1.3.4) \quad J''(t) + R(\dot\beta(0,t), J(t))\dot\beta(0,t) = 0$$

Poniamo per semplicità $X = \dot\beta(0,t)$.

(*) con il significato ovvio(anche se non molto corretto) del simbolo $tT + sW(t)$.

Ora sviluppando con la formula di Taylor:

$$||J(t)||^2 = (J(0),J(0)) + \left(\frac{d(J,J)}{dt}\right)_o t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2(J,J)}{dt^2}\right)_o t^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3(J,J)}{dt^3}\right)_o t^3 +$$

$$+ \frac{1}{24}\left(\frac{d^4(J,J)}{dt^4}\right)_o t^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J(0) = 0 \Rightarrow (J(0)\ ,\ J(0)) = 0$$

$$\left(\frac{d(J,J)}{dt}\right)_o = 2(J'(0),J(0)) = 0$$

$$\left(\frac{d^2(J,J)}{dt^2}\right)_o = 2||J'(0)||^2$$

$$\left(\frac{d^3(J,J)}{dt^3}\right)_o = \left(\frac{d^2\ 2(J',J)}{dt^2}\right)_o = 2\left(\frac{d(J'',J)}{dt}\right)_o + 2\left(\frac{d(J',J')}{dt}\right)_o =$$

$$= 2(J''(0),J'(0)) + 2(J'''(0),J(0)) + 4(J''(0),J(0)) = 0$$

(infatti per (1.3.4.) e per l'osservazione 1) se $J(0) = 0$ si ha $J''(0)=0$).

$$\frac{1}{24}\left(\frac{d^4(J,J)}{dt}\right)_o = \frac{1}{6}(J',J''')_o$$

Inoltre $(J',J''')_o = (J', \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t} J') = (J',\nabla_X\nabla_X J')_o = (J',\nabla_X\nabla_{J'}X)_o =$

$= (\text{poiché } [X,J'] = 0) = -(J',R(X,J')X)_o$

Concludendo

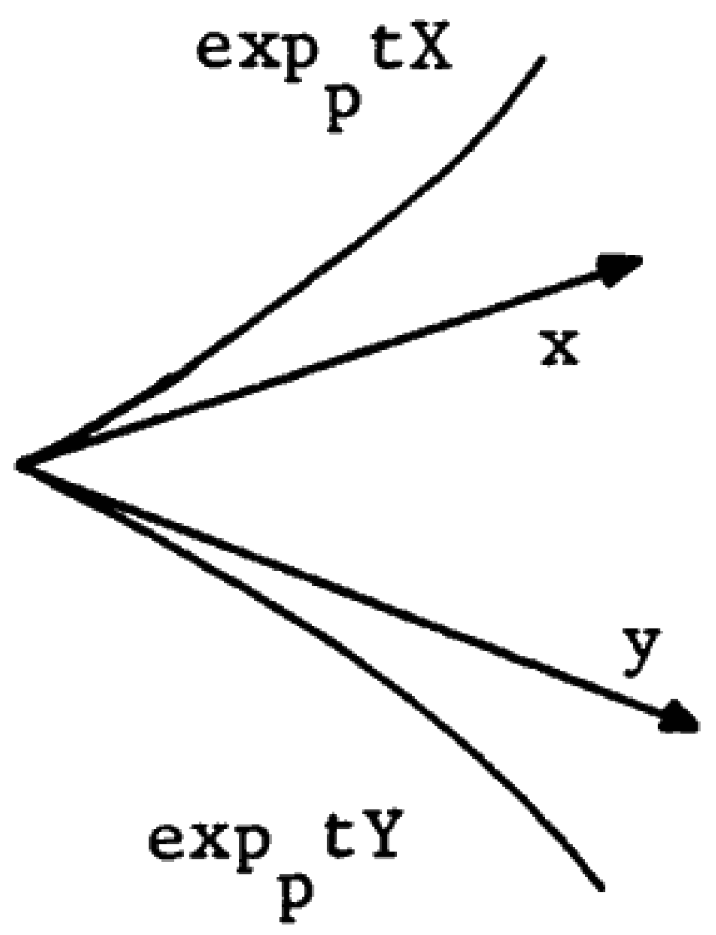
(1.3.5.) $$||J(t)||^2 = t^2 - \frac{1}{6}(J',R(X,J')X)_o\ t^4 + \sigma(t^5)$$

1.3.6. <u>PROPOSIZIONE.</u> 1) <u>L'effetto di</u> $d\ \exp_p$ <u>sui vettori del tipo</u> $tV(t)$ <u>ortogonali a</u> T <u>è misurato al 4° ordine da</u> $(J',R(X,J')X)_o$

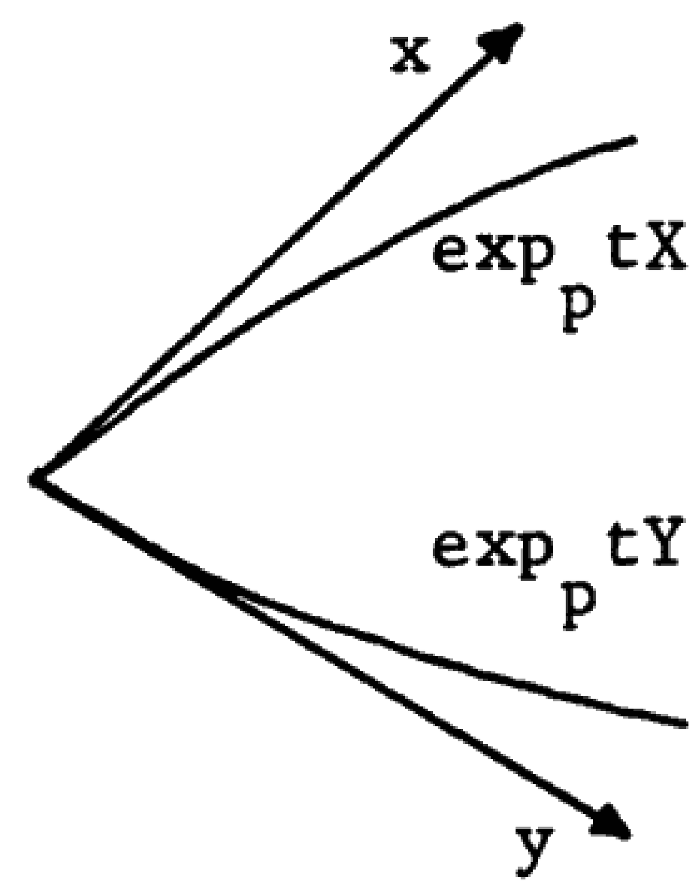
2) Se $(V_p, R(W_p, V_p)W_p) \leq 0$ $\forall V,W \in T_pM$ ortonormali allora le geodetiche uscenti da p si allontanano tra di loro più rapidamente dei corrispondenti raggi in T_pM

3) Se $(V_p, R(W_p, V_p)W_p) \geq 0$ $\forall V,W \in T_pM$ le geodetiche uscenti da p si allontanano meno rapidamente dei corrispondenti raggi in T_pM.

(Naturalmente tutte le considerazioni precedenti hanno carattere locale).



caso 2)



caso 3)

Come è facile intuire la quantità $(R(V,W)\ V,W)$ gioca un ruolo essenziale nella determinazione del comportamento delle geodetiche. Diamo allora la seguente definizione:

1.3.7. DEFINIZIONE. Siano X,Y vettori indipendenti in T_pM. Chiameremo curvatura gaussiana (o sezionale) rispetto ad X e Y la quantità (*)

$$K(X,Y) = \frac{(R(X,Y)\ X,Y)}{||X||^2\ ||Y||^2 - (X,Y)^2}$$

(*) Se il tensore di curvatura R è definito come nella nota alla definizione 1.3.1., si pone $K(X,Y) = \dfrac{(R(X,Y)\ Y,X)}{||X||^2\ ||Y||^2 - (X,Y)^2}$

Il nome deirva dal caso classico delle superifici in $\mathbb{R}^3$. Infatti, come è facile controllare con semplici calcoli (Hicks [15]), $K(X,Y)$ dipende solo dal piano generato da X e Y in T_pM e non da X,Y stessi. Se allora $P = \{tX+sY \mid t,s \in \mathbb{R}\}$ e U è un intorno di 0 in P abbastanza piccolo, $\exp_p(U)$ è una sottovarietà 2-dimensionale di M munita di una metrica riemanniana indotta da quella di M. Per il "Teorema Egregium" la curvatura gaussiana di una superficie in $\mathbb{R}^3$ (prodotto delle curvature principali) non dipende dall'immersione in $\mathbb{R}^3$ ma solo dalla struttura metrica della superficie e quindi per il solo tramite degli invarianti metrici di $\exp_p(U)$, è possibile definire la curvatura gaussiana K_p di $\exp_p(U)$ in p. Come allora ci attendiamo risulta $K_p = K(X,Y)$.

Sia p un punto di una varietà riemanniana M,P un piano per 0 in T_pM e $K(P)$ la curvatura sezionale di M in p rispetto al piano P. Sia inoltre r un numero reale positivo e $\gamma_r : [0,2\pi] \to P$ la circonferenza su P di centro 0 e raggio r.

Supposto r abbastanza piccolo per cui esista un $r' > r$ tale che $\exp_p$ sia un diffeomorfismo su $B_{r'} = \{X \in T_pM \mid \|X\| < r'\}$, indichiamo con $L(\gamma_r) = 2\pi r$ la lunghezza della circonferenza γ_r e con $L(r)$ la lunghezza della curva chiusa $\exp_p \circ \gamma_r : [0,2\pi] \to M$.

Si verifica (*) allora con calcoli laboriosi che

$$\frac{dL}{dr}(0) = 2\pi \qquad \frac{d^2L}{dr^2}(0) = 0 \qquad \frac{d^3L}{dr^3}(0) = -6\pi K(P),$$

e quindi dallo sviluppo di $L(r)$ in serie di Taylor in un intorno dello

---

(*) Vedi Hermann [14].

zero si ottiene il seguente Lemma

1.3.8. LEMMA. $K(P) = \lim_{r \to o} \frac{L(\gamma_r) - L(r)}{\pi r^3}$.

Questo risultato permette di provare la seguente proposizione.

1.3.9. PROPOSIZIONE. Siano N ed M due varietà riemanniane e $\varphi : N \to M$ una immersione isometrica di N in M, cioé una applicazione differenziabile tale che

$$||d\varphi_p(X)|| = ||X_p|| \qquad \text{per} \quad p \in N,\ X \in T_pN.$$

Sia inoltre P un piano per O in T_pM tale che per ogni $X \in P$ la curva $t \mapsto \varphi(\exp_p(tX))$ sia una geodetica in M.

Indicate allora con $K_N(P)$ e $K_M(P')$ la curvatura sezionale rispettivamente di N ed M in p rispetto a P ed a $P' = d\varphi_p(P)$ risulta

$$K_N(P) = K_M(P').$$

Dimostrazione . Se γ_r è la circonferenza su P di centro O e raggio r, poiché φ è una isometria sarà

$$L(r) = L(\exp_p \circ \gamma_r) = L(\varphi \circ \exp_p \circ \gamma_r) = L'(r).$$

Risulta allora ovviamente $K_N(P) = K_M(P') = 0.$ ∎

Vediamo ora come questi risultati diano un'altra interpretazione geometrica della curvatura sezionale, ben nota nel caso bidimensionale, e come formiscano uno dei possibili metodi per verificare lo stretto legame che c'è tra la curvatura sezionale qui definita e la curvatura gaussiana di una superficie.

OSSERVAZIONI. 1)Consideriamo la superficie $\Sigma = \exp_p(U)$ costruita in precedenza e l'ingezione canonica $j : \Sigma \to M$. Chiaramente la metrica indotta su Σ è tale che j è una isometria, dunque la curvatura sezionale di M in p

rispetto al piano P che individua Σ coincide con la curvatura sezionale della sottovarietà Σ in p. Poiché si verifica che la curvatura sezionale di Σ in p è proprio la curvatura gaussiana definita nel modo classico, si ottiene quanto si era già asserito.

2) La 1.3.9. ci permette anche di affermare che in genere l'applicazione esponenziale non è una isometria, sebbene lo sia lungo i raggi(*).

In effetti se per un punto $p \in M$, $\exp_p : T_p M \to M$ fosse una isometria, considerata la sua restrizione ad un intorno opportunamente piccolo di 0 sul quale $\exp_p$ è un diffeomorfismo, la curvatura sezionale di M in p dovrebbe essere uguale alla curvatura sezionale di T_pM in 0, cioé dovrebbe essere nulla; in generale ciò non si verifica.

Più precisamente la "non isometria" di $\exp_p$ si manifesta sui vettori ortogonali ai raggi e (1.3.5.) e (1.3.8) ci dicono appunto che K misura quanto $\exp_p$ si discosti dall'essere una isometria.

(*) Vedi l'osservazione 4 del paragrafo 2.