CAPITOLO 9

APPENDICE: COMPLEMENTI SUI COMPLESSI DI CAMERE MAGRI

Dirò che un complesso di camere magro è *bicolorabile* (o :*colorabile*) se il grafo, costruito prendendo come vertici le camere e come lati le coppie di camere adiacenti, è bipartito. Si ha:

(c.1) Un complesso di camere magro è colorabile se e solo se, date tre camere C, C', C'' con C' e C'' adiacenti, risulta $|d(C,C')-d(C,C'')| = 1$.

($d(C,C')$ è la distanza di due camere C e C', come nel Cap. 5). Proviamo il "se".

Scegliamo una camera C_o e contrassegnamo con una marca + o - tutte le camere del complesso, assegnando alla camera C il segno + o - a seconda che $d(C_o,C)$ sia pari o dispari. Nelle ipotesi assunte, camere adiacenti sono marcate da segni opposti. E il "se" è provato. Proviamo il "solo se". Se il complesso è colorabile, possiamo marcare con + o - tutte le camere, in modo che camere adiacenti abbiano marche opposte. Sicché, data una camera C, il segno di una camera C' è concorde o discorde col segno di C a seconda che $d(C,C')$ sia pari o dispari. Pertanto, se C' e C'' sono adiacenti, risulta $d(C,C') \neq d(C,C'')$, poiché C' e C'' hanno segno opposti. E ne segue che $|d(C,C')-d(C,C'')| = 1$, perché $|d(C,C'')-d(C,C')| \leq 1$.

Un automorfismo ϕ di un complesso di camere magro si dirà quasi speciale se per ogni camera C, ϕ fissa tutti i vertici (o varietà, se così si preferisce dire) della faccia $\phi(C) \cap C$. Si è già visto implicitamente nel Cap. 1 che:

Sia K un complesso di camere magro e G un (anzi: *il*, per la (c.4)) gruppo di automorfismi quasi speciali di K transitivo sulle camere. Scelta una camera C come *camera fondamentale*, per ogni faccia A di C indichiamo con G_A lo stabilizzatore di A in G. Possiamo ricopiare isomorficamente K sul sistema dei laterali dei sottogruppi G_A (con $A \subseteq C$). Precisamente, ad una faccia A' di K associamo il laterale gG_A ove g è un opportuno elemento di G che porta un'opportuna $A \subseteq C$ in A'. Ai vertici di K restano allora associati i laterali dei sottogruppi G_x, stabilizzatori di vertici x di C, e alle camere di K restano associati i laterali di G_C; cioé, qui, gli elementi di G, poiché è $G_C = 1$ per la (c.2). L'inclusione tra faccie si traduce nella duale della inclusione tra laterali, l'incidenza di due faccie nel fatto che i corrispettivi laterali abbiano intersezione $\neq \emptyset$.

Lasciando a chi legge le altre verifiche, mi limito a mostrare che la corrispondenza è ben posta. Sia A' una faccia di K e siano $g_1, g_2 \in G$ ed $A_1, A_2 \subseteq C$ tali che $g_1(A_1) = A' = g_2(A_2)$. Sia $C_i = g_i^{-1}(C)$, per $i = 1,2$. E' $A' \subseteq C_1 \cap C_2$. Ed esiste $g \in G$ tale che $g(C_1) = C_2$. Sicché g fissa A', essendo un automorfismo quasi speciale. Per di più, $g_2 g g_1^{-1} \in G_C$ (qui è anzi $g_2 g g_1^{-1} = 1$ perché $G_C = 1$). Sicché, $g_2 g_1^{-1}$ e $g_2 g g_2^{-1}$ individuano lo stesso laterale di G_C. Ma $g_2 g g_2^{-1}$ fissa A_2. Sicché $g_2 g_1^{-1}$ fissa A_2. Del resto $g_2 g_1^{-1}$ porta A_1 in A_2. Ne segue che $A_1 = A_2$. E che $g_1 G_{A_1} = g_2 G_{A_2}$ segue ora dal fatto che $g_2 g_1^{-1}$ fissa $A_2 = A_1$.

Nota - Ho evitanto di sfruttare il fatto che $G_C = 1$, per evidenziare come il ragionamento sia più generale di quel che le ipotesi qui assunte facciano supporre. La costruzione ora descritta è già stata incontrata più volte nei capitoli precedenti. In tali occasioni le notazioni erano diverse da quelle qui usate: il sottogruppo G_A vi sarebbe stato scritto come $\bar{G}_{C-A}$, o come S_{C-A}, o come $W_{C-A}, \dots$. La cosa aveva una sua giustificazione al momento di risalire direttamente dall'insieme (qui = faccia), apposto come indice, ad un insieme di riflessioni generante per il sottogruppo. Ho poi mantenuto tali convenzioni nel Cap. 7 solo per non allontanarmi troppo da quelle usate in precedenza; ma, in quella sede, non ve ne sarebbe stato alcun bisogno.

E' poi presto visto, per la magrezza di K, che per ogni $x \in C$ risulta $G_{C-\{x\}} = \langle r_x \rangle$, ove r_x è la riflessione che scambia C con la camera adiacente a C sulla faccia $C-\{x\}$. Il sistema delle r_x $(x \in C)$, dette *riflessioni fondamentali*, dà un insieme di generatori per G. Infatti, possiamo graduare gli elementi di G associando a $g \in G$ come grado $d(g)$ la distanza da C della camera $g(C)$. Possiamo ora ragionare per induzione su $d(g)$. Se $d(g) = 1$, allora g è una riflessione fondamentale. Sia $d(g) > 1$, e sia $C = C_o, C_1, \ldots C_m = g(C)$ una galleria minimale da C a $g(C)$. Sia r la riflessione che scambia C_{m-1} e C_m, e sia g' l'elemento di G che porta C in C_{m-1}. Allora $g = rg'$, e $(g')^{-1} rg'$ è una riflessione fondamentale. Ma g' è prodotto di riflessioni fondamentali, per ipotesi induttiva. Sicché $g = rg' = g'(g')^{-1} rg'$ è prodotto di riflessioni fondamentali.

Nota - La condizione i) della fine del Capitolo 8 dà l'estensione ai casi non magri di quanto ora visto. La dimostrazione non è molto diversa da quella data qui sopra.

Viceversa, sia dato in un gruppo G un sistema di sottogruppi G_i $(i \in I)$, tale che, posto $G_J = \bigcap_{i \in J} G^i$ $(J \subseteq I)$, sia:

i) $G_I = 1$

ii) G è generato da un insieme $\{r_i \mid i \in I\}$ di involuzioni, dette *riflessioni fondamentali*, tali che, per ogni $i \in I$, sia $G_{I-\{i\}} = \langle r_i \rangle$.

Allora, prendendo come faccie i laterali sinistri dei G_J e rappresentando l'inclusione tra faccie con la duale dell'inclusione tra laterali (al solito: si identifichi gG_J con l'insieme dei laterali gG_i con $i \in J$), si ottiene un complesso di camere magro, sui cui G, agendo per moltiplicazione a sinistra, definisce un gruppo di automorfismi quasi speciali transitivo sulle camere (tutto ciò è di facile verifica).

Nota - E' ovvio come si riadatterà ai casi non magri quanto ora detto: si cancellerà la i), e si sostituirà la ii) con la condizione indicata con i) alla fine del Cap. 8. Lascio le dimostrazioni a chi legge.

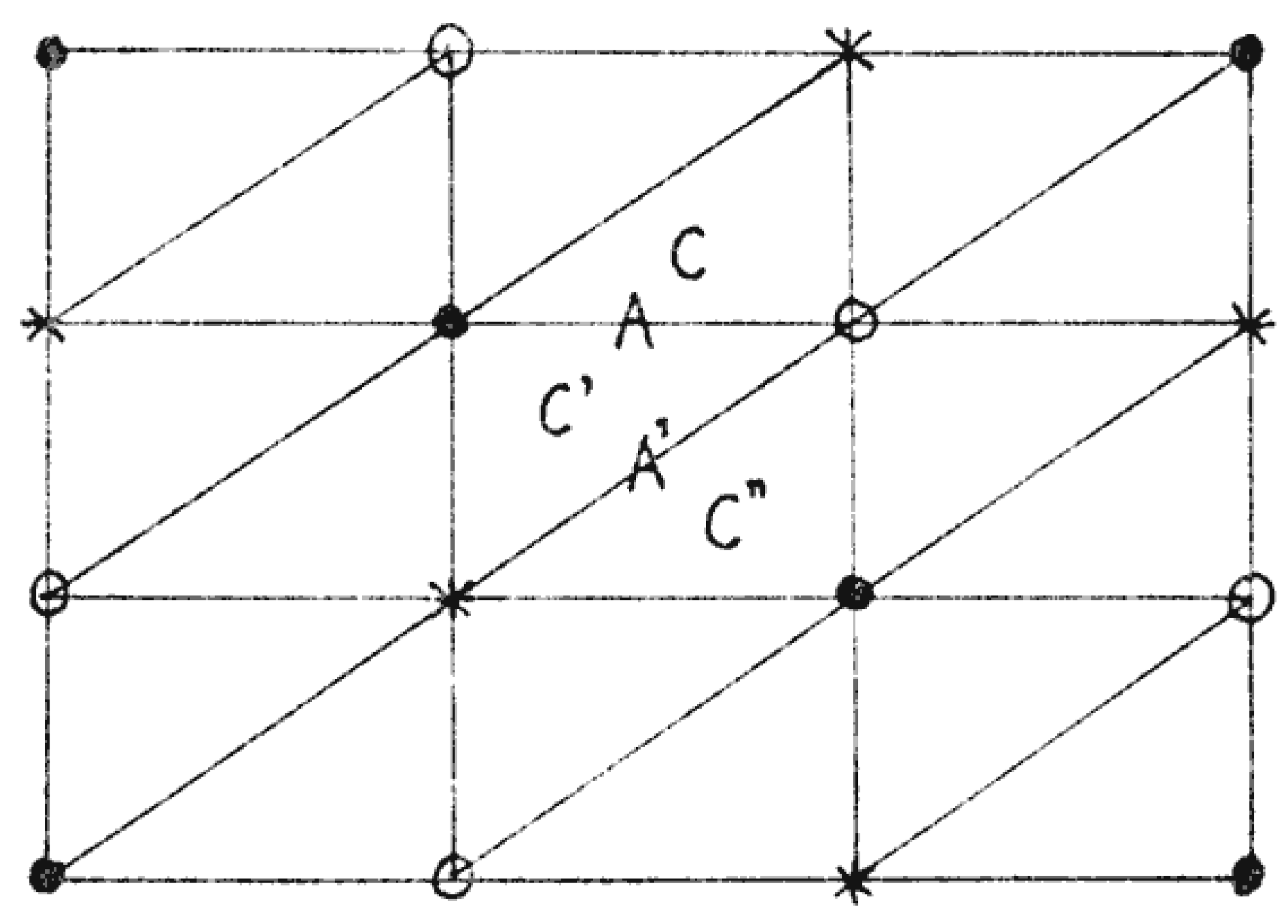
E' ovvio che queste due costruzioni sono l'una l'inversa dell'altra.

Conveniamo di dire *totalmente simmetrico* un complesso di camere magro in cui esistono tutte le riflessioni e tale che ogni automorfismo del complesso che sia generato da riflessioni è quasi speciale. Per la (c.4) un complesso di camere magro $\mathbf{K}$ totalmente simmetrico ammette esattamente un gruppo di automorfismi quasi speciali transitivo sulle camere: il gruppo $G_r(\mathbf{K})$ generato dalle riflessioni. Dato un complesso di camere magro totalmente simmetrico $\mathbf{K}$, possiamo assegnare un tipo (che chiameremo per ora *r-tipo*) ai vertici di $\mathbf{K}$, scegliendo una camera C come camera fondamentale, ed assegnando al vertice x', come r-tipo, il vertice x di C tale che $x' = g(x)$ per qualche $g \in G(\mathbf{K})$ (si è già implicitamente visto che questa definizione è ben posta). Indichiamo con Θ_r l'equivalenza definita tra i vertici di $\mathbf{K}$ ponendo $x \equiv y(\Theta_r)$ se x ed y hanno lo stesso r-tipo. E' ovvio che Θ_r è indipendente da C. La partizione Θ_r è non più fine della partizione naturale in tipi Θ_I: ciò segue subito dal fatto che ogni camera di $\mathbf{K}$ prende esattamente una varietà per ogni r-tipo. Per questo stesso motivo, Θ_I è ben posta. Proviamo ora che è, anzi, $\Theta_I = \Theta_r$. Siano x,y due vertici di ugual r-tipo. Possiamo supporre, senza introdurre restrizioni essenziali, che $x \in C$. Sia $g \in G_r(\mathbf{K})$ tale che $g(x) = y$. Ma g è prodotto di riflessioni. Sia $\ell(g)$ la minima lunghezza di una espressione di g come prodotto di riflessioni. Ragioniamo per induzione su $\ell(g)$. Se $\ell(g) = 1$, è ovvio che $x \equiv y(\Theta_I)$. Sia $\ell(g) > 1$. Allora esiste una riflessione r ed un elemento $g' \in G_r(\mathbf{K})$ tali che $g = rg'$ e $\ell(g') = \ell(g)-1$. Posto $z = g'(x)$, è $x \equiv z(\Theta_I)$ per ipotesi induttiva, e banalmente, $y \equiv z(\Theta_I)$. In definitiva: $x \equiv y(\Theta_I)$. La $\Theta_I = \Theta_r$ segue. In particolare: Θ_I è trasversale. Da ciò si ha subito che:

(c.5) Sia $\mathbf{K}$ un complesso di camere magro totalmente simmetrico. Allora $G_r(\mathbf{K})$ è il gruppo degli automorfismi speciali di $\mathbf{K}$.

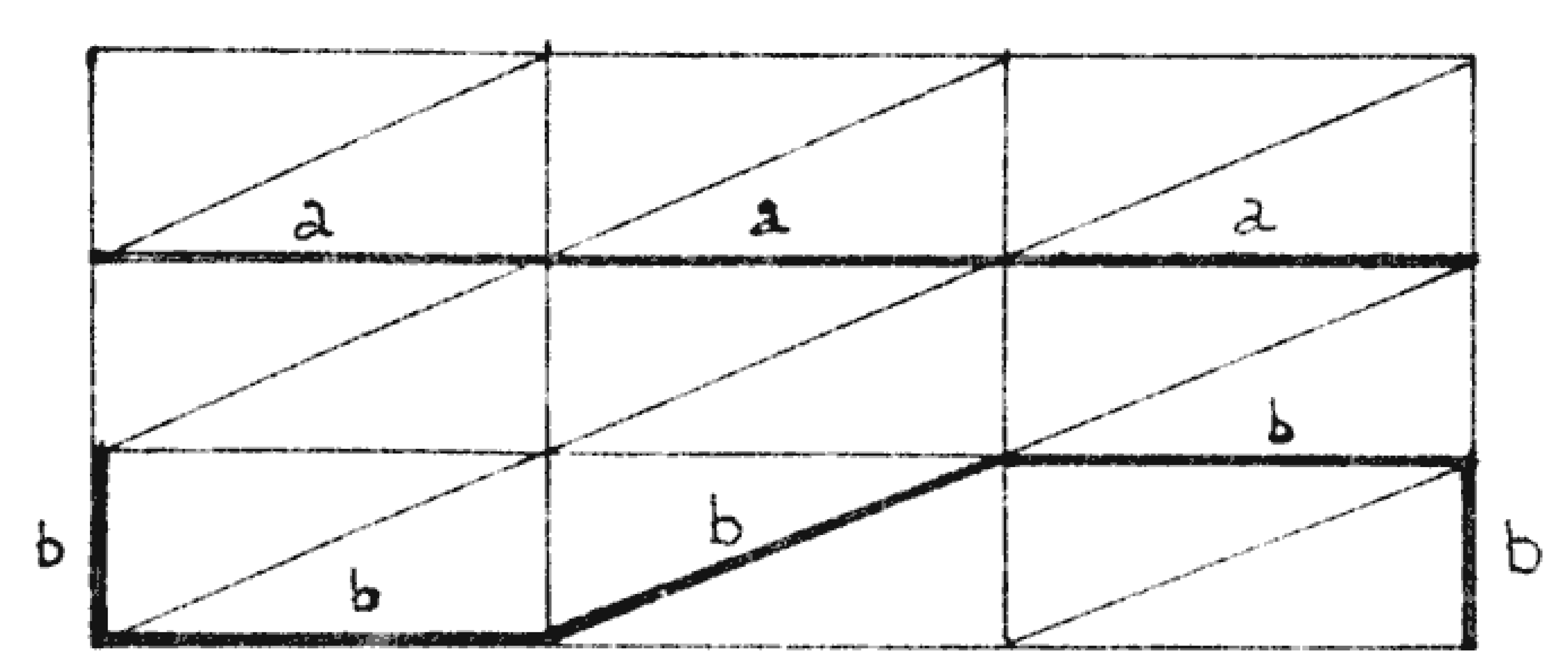
Quanto sin qui visto mostra che il senso dato qui a "speciale" è in armonia con quelli stabiliti in precedenza su complessi di Coxeter ed edifici generalizzati. E mostra anche come la condizione (G) possa tradursi nella (G.bis) del Cap. 3

Sia ora K un complesso di camere magro, colorabile e totalmente simmetrico. Siano C,C' due camere adiacenti di K, e sia $A = C\cap C'$. Poniamo Φ_A^+ uguale all'insieme delle camere $\bar{C}$ per cui è $d(C,\bar{C}) = d(C',\bar{C})-1$ e Φ_A^- uguale all'insieme delle camere $\bar{C}'$ per cui è $d(C,\bar{C}')-1 = d(C',\bar{C})$. La colorabilità di K assicura che Φ_A^+ e Φ_A^- bipartiscono le camere di K in due insiemi disgiunti, detti le due *radici* relative alla faccia A. E' poi ovvio che $r_{C,C'}$ scambia tali due radici. Indicati poi con K_A^+ e K_A^- i due sottocomplessi di K individuati da Φ_A^+ e Φ_A^-, poniamo $\partial\Phi_A = K_A^+\cap K_A^-$. $\partial\Phi_A$ verrà detto *muro* di A. Indicato poi con F_A l'insieme delle faccie di K tenute fisse da $r_{C,C'}$, è evidente che $F_A \subseteq \partial\Phi_A$. Il viceversa non è detto. Do qui un controesempio. Si consideri l'usuale triangolazione di un toro con 18 triangoli:

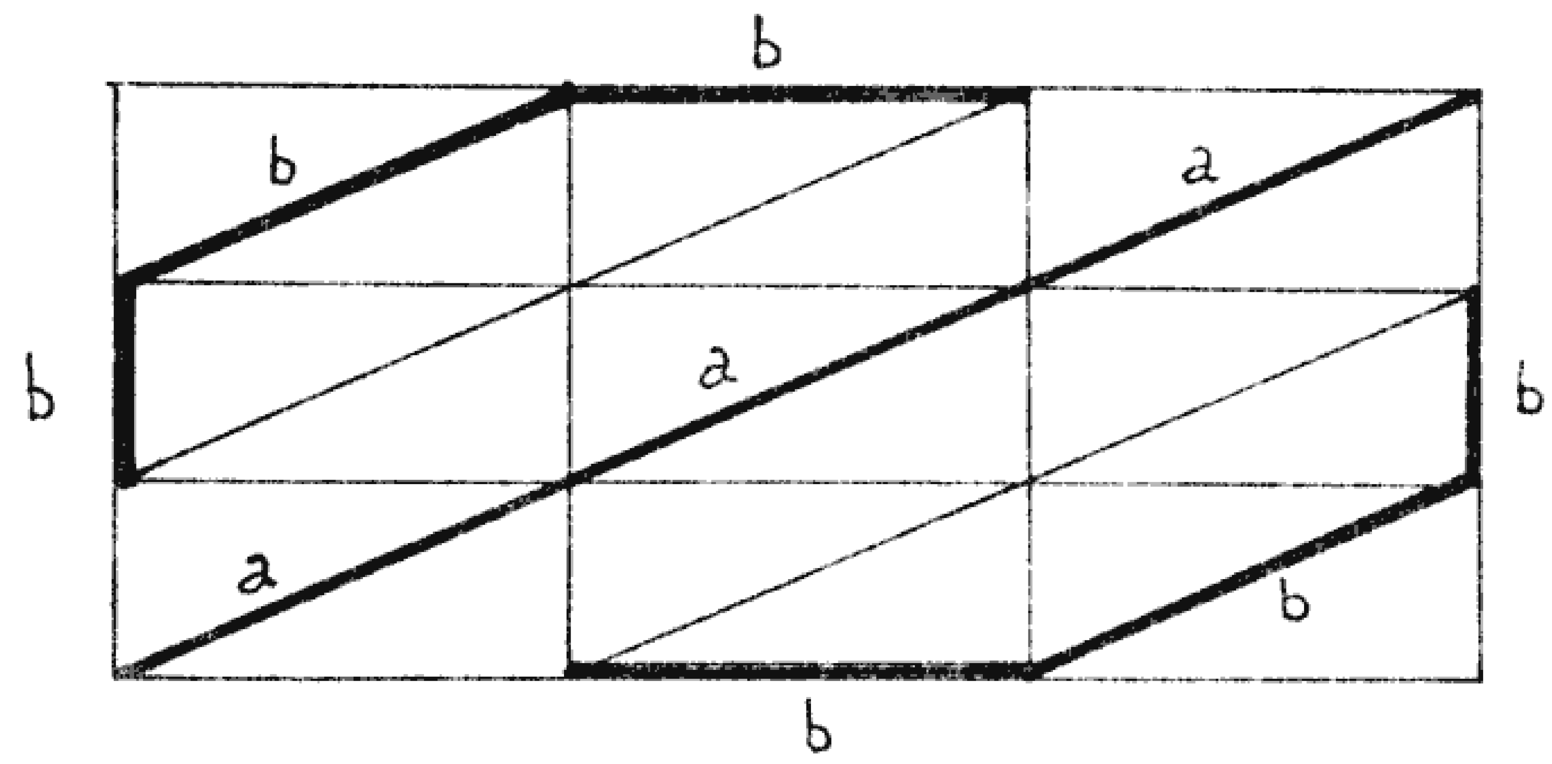


(i bordi della figura vanno identificati nei modi soliti). Si assumano come vertici i vertici della triangolazione e come incidenza tra due vertici il fatto di essere congiunti da un lato della triangolazione. E' presto visto che si ottiene un complesso di camere magro, colorabile e totalmente simmetrico. Le camere sono i triangoli. I tipi sono indicati in figura coi contrassegni $\bullet$, o e $*$

Consideriamo il muro della faccia $A = C\cap C'$. Esso risulta dalle due spezzate chiuse a e b in figura:



Ma F_A è la spezzata a; mentre $r_{C,C'}$ trasla la spezzata b su sé stessa. Ancora: consideriamo il muro della faccia $A' = C' \cap C''$. Risulta dalle due spezzate chiuse a e b in figura:



Ma $F_{A'}$ è la spezzata a; mentre $r_{C,C'}$ trascina b su sé stessa.

Consideriamo la seguente condizione:

(*) Scelte comunque due coppie di camere adiacenti (C,C') e $(\bar{C},\bar{C}')$, se $d(C,\bar{C}) = d(C',\bar{C})$, allora $r_{C,C'} \neq r_{\bar{C},\bar{C}'}$.

Essa è evidentemente falsa sull'esempio ora dato, proprio perché, delle due spezzate a,b che costituiscono il muro di A (di A'), $r_{C,C'}$ (rispettivamente: $r_{C',C''}$) ne trascina una su sé stessa.

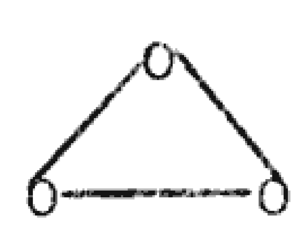
Supponiamo ora che K sia un complesso di camere magro, colorabile, totalmente simmetrico e verificante la (*). Siano C,C' due camere adiacenti ed $A = C \cap C'$. Cominciamo col provare che le due radici relative ad A sono insiemi convessi di camere (cfr. Cap. 5). Siano dunque $\bar{C},\bar{C}' \in \Phi_A^+$, e sia $\bar{C} = C_o, C_1, \ldots C_m = \bar{C}'$ una galleria minimale in K da $\bar{C}$ a $\bar{C}'$. Per assurdo, tale galleria fuoriesca da Φ_A^+. Sia C_h la prima camera della galleria che fuoriesce da Φ_A^+. Peraltro, prima o poi la galleria deve rientrare in Φ_A^+, dal momento che $\bar{C}' \in \Phi_A^+$. Sia dunque C_k la prima camera dopo C_h che rientra in Φ_A^+. Risulta $d(C,C_{h-1}) = d(C',C_h)$ e $d(C',C_{k-1}) = d(C,C_k)$. Sicché, per la (*), è $r_{C_{h-1},C_h} = r_{C,C'} = r_{C_{k-1},C_k}$.

Ne segue che $r_{C,C'}$ porta il tratto di galleria da C_h a C_{k-1} in una galleria da C_{h-1} a C_k. Sicché la galleria data sopra da $\bar{C}$ a $\bar{C}'$ può essere sostituita da una galleria più breve; non era dunque minimale; assurdo. Su Φ_A^- il ragionamento è lo stesso.

Da ciò si ha poi subito che, date due camere $\bar{C} \in \Phi_A^+$ e $\bar{C}' \in \Phi_A^-$, ogni galleria minimale da $\bar{C}$ a $\bar{C}'$, attraversa $\partial\Phi_A$ una sola volta (ovvero: si divide in due tronconi, il primo tutto contenuto in Φ_A^+, il secondo in Φ_A^-).

Ovviamente, $\partial\Phi_A$ non contiene camere. Sia $\bar{F}_A$ l'insieme delle faccie di codimensione 1 (o corango 1, come si preferisca dire), in $\partial\Phi_A$. Si ha ora che $\bar{F}_A \subseteq F_A$. Sia infatti $B \in \bar{F}_A$, e siano $\bar{C}$ e $\bar{C}'$ le due camere uscenti da B. Necessariamente, una di esse sta in Φ_A^+ e l'altra in Φ_A^-. Poniamo sia $\bar{C} \in \Phi_A^+$. E' allora $d(C,\bar{C}) = d(C',\bar{C}')$. Sicché, per la (*), $r_{C,C'} = r_{\bar{C},\bar{C}'}$. Sicché $r_{C,C'}$, scambiando $\bar{C}$ e $\bar{C}'$, fissa B. Si ha, tra l'altro, che A e B individuano la stessa riflessione, e pertanto che $F_A = F_B$.

Ma non possiamo però ancora provare che $F_A = \partial\Phi_A$. Do qui un controesempio. Consideriamo nel piano euclideo i punti (x,y) di coordinate intere.Ripartiamoli in tre tipi 0,1,2 assegnando ad (x,y) il tipo r se $x-y \equiv r \pmod{3}$. Stabiliamo tra questi punti un'incidenza ponendo due punti incidenti se distano di 1 oppure se distano di $\sqrt{2}$ e individuano una retta di coefficiente angolare -1. Sia K il complesso di camere determinato da questa relazione d'incidenza. K è magro, colorabile, totalmente simmetrico, e verificante la (*). Anzi: K è il complesso di Coxeter di diagramma:



(ciò risulterà dal seguito). Noto che K può anche pensarsi ottenuto da una qualunque tasselazione del piano euclideo in triangoli equilateri.

Costruiamo ora su K un secondo complesso K^*, identificando ogni punto (x,y) di tipo 0 con uno dei tre punti $(0,0)$,$(1,1)$ e $(2,2)$ a seconda che $x \equiv 0,1$ o $2 \pmod{3}$. Non aggiungiamo però altre faccie oltre a quelle direttamente ottenibili da quelle di K (per esempio: risulta ora $(0,0)$ incidente a $(2,0)$, perché $(0,0)$ è identificato a $(3,0)$, che è incidente a $(2,0)$ in K; ciò nonostante non consideriamo la terna $(0,0)$,$(1,0)$, $(2,0)$ come una camera di K^*). Si verifica direttamente che K^* è un complesso di camere magro, colorabile, totalmente simmetrico e verificante la (*). Non è però vero che, presa una faccia A di K^* di codimensione 1, sia $F_A = \partial\Phi_A$. Infatti F_A è rappresentabile da una retta del piano, mentre $\partial\Phi_A$ contiene, oltre ad F_A, i tre vertici di K^* di tipo 0. Il complesso K^* presenta un'altra anomalia, legata a quella ora vista: il residuo di un vertice di tipo 0 non è un complesso di camere: consta infatti di (infiniti) esagoni, tra loro disgiunti.

Veniamo dunque alla caratterizzazione dei complessi di Coxeter:

(c.6) I complessi di Coxeter sono i complessi di camere magri, colorabili, totalmente simmetrici, verificanti la (*) e tali che per ogni loro faccia B il residuo di B sia un complesso di camere.

Che i complessi di Coxeter abbiano tutte le proprietà sopra elencate segue dalla caratterizzazione dei complessi di Coxeter data da Tits in [26] Cap. 2. Viceversa, sia K un complesso di camere verificante tutte le condizioni elencate nella (c.6). Proviamo che per ogni faccia A di K di codimensione 1 è $F_A = \partial\Phi_A$. Sia infatti $B \in \partial\Phi_A$, siano $\bar{C}$ e $\bar{C}'$ due camere contenenti B con $\bar{C} \in K_A^+$ e $\bar{C}' \in K_A^-$; sia poi $\bar{C} = C_o, C_1, \ldots C_m = \bar{C}'$ una galleria nella stella di camere per B (ovvero: nel residuo di B) da $\bar{C}$ a $\bar{C}'$. Sia C_h la prima camera della galleria che esce da Φ_A^+. Allora, posto $\bar{A} = C_{h-1} \cap C_h$, è $\bar{A} \in \partial\Phi_A$. Ma $\bar{A}$ ha codimensione 1, sicché $\bar{A} \in F_A$, per quanto visto in precedenza. Pertanto: $B \in F_A$.

Date ora due camere adiacenti C, C' e posto $A = C \cap C'$, possiamo definire due endomorfismi γ_A^+ e γ_A^- di K, detti *ripiegature* di K attorno ad A (o attorno a $\partial\Phi_A$) ponendo $\gamma_A^+(B) = r_{C,C'}(B)$ per ogni faccia B in Φ_A^+ e $\gamma_A^+(B) = B$ per ogni faccia B in Φ_A^- (similmente per γ_A^-, scambiando + con -). La $F_A = \partial\Phi_A$ assicura che la definizione è ben posta. Che K sia un complesso di Coxeter segue allora dalla caratterizzazione dei complessi di Coxeter data da Tits nel Cap. 2 di [26].

La caratterizzazione dei Complessi di Coxeter data da Tits è molto semplice:

si riassume tutta nell'ipotesi che il complesso (di camere magro) ammetta tutte le ripiegature (definite in generale come endomorfismi idempotenti ϕ del complesso tali che ogni camera sia immagine mediante ϕ o di nessuna o di due camere). Insisto sul fatto che, in pratica, la caratterizzazione data dalla (c.6) è di scarsa utilità. Per esempio: se mediante la (c.6) si volesse dedurre la (b.2) del Cap. 1, non sarebbe difficile, usando la (b.1), la (B.4) e l'assunzione di grassezza della (B.1), ricavare che gli appartamenti sono colorabili, totalmente simmetrici e che verificano la (*). Ma, per dedurre che il residuo di una faccia in un appartamento è un complesso di camere, è necessario sapere già che gli appartamenti ammettono tutte le ripiegature (cioè: occorre avere già dimostrato la (b.2)). Rimando per questo a [26], nn. 2.7-2.9 e 3.14.