

CAPITOLO 9

APPENDICE: COMPLEMENTI SUI COMPLESSI

DI CAMERE MAGRI

Dirò che un complesso di camere magro è *bicolorabile* (o *colorabile*) se il grafo, costruito prendendo come vertici le camere e come lati le coppie di camere adiacenti, è bipartito. Si ha:

(c.1) Un complesso di camere magro è colorabile se e solo se, date tre camere C, C', C'' con C' e C'' adiacenti, risulta $|d(C, C') - d(C, C'')| = 1$.

($d(C, C')$ è la distanza di due camere C e C' , come nel Cap. 5). Proviamo il "se".

Scegliamo una camera C_0 e contrassegnamo con una marca + o - tutte le camere del complesso, assegnando alla camera C il segno + o - a seconda che $d(C_0, C)$ sia pari o dispari. Nelle ipotesi assunte, camere adiacenti sono marcate da segni opposti. E il "se" è provato. Proviamo il "solo se". Se il complesso è colorabile, possiamo marcare con + o - tutte le camere, in modo che camere adiacenti abbiano marche opposte. Sicché, data una camera C , il segno di una camera C' è concorde o discorde col segno di C a seconda che $d(C, C')$ sia pari o dispari. Pertanto, se C' e C'' sono adiacenti, risulta $d(C, C') \neq d(C, C'')$, poiché C' e C'' hanno segno opposti. E ne segue che $|d(C, C') - d(C, C'')| = 1$, perché $|d(C, C'') - d(C, C')| \leq 1$.

Un automorfismo ϕ di un complesso di camere magro si dirà quasi speciale se per ogni camera C , ϕ fissa tutti i vertici (o varietà, se così si preferisce dire) della faccia $\phi(C) \cap C$. Si è già visto implicitamente nel Cap. 1 che:

ché $r' = r$.

Sicché una riflessione è individuata dalla coppia di camere che scambia. Risultata così giustificato denotare con $r_{C,C'}$ la riflessione che scambia due camere (adiacenti) C e C' .

Osservo ora che la costruzione della partizione in tipi Θ_I data nel Cap. 5 può essere riformulata anche su complessi di vertici e faccie che non siano complessi di bandiere. Si vede subito che un automorfismo ϕ di un complesso di camere induce una permutazione t_ϕ sulla partizione individuata da Θ_I sull'insieme dei vertici. L'automorfismo ϕ sarà detto *speciale* se t_ϕ è l'identità.

Sia ora K un complesso di camere magro. È presto visto che se la partizione di K in tipi Θ_I è regolare, allora ogni riflessione r è un automorfismo speciale. Viceversa, se Θ_I è ben posta, gli automorfismi speciali di K sono quasi speciali.

Si ha:

(c.4) Sia K un complesso di camere magro. Allora K ammette un gruppo G di automorfismi quasi speciali transitivo sull'insieme delle camere solo se ammette tutte le riflessioni, nel qual caso G è il gruppo generato dalle riflessioni. Viceversa, se K ammette tutte le riflessioni e se ogni automorfismo generato da riflessioni è quasi speciale, allora il gruppo di automorfismi generato dalle riflessioni è l'unico gruppo di automorfismi quasi speciali transitivo sulle camere di K .

Sia G un gruppo di automorfismi quasi speciali transitivo sulle camere di K . Per ogni coppia di camere C, C' adiacenti esiste $g \in G$ che porta C in C' . Sicché, essendo g quasi speciale, è $g = r_{C,C'}$. Fissata poi una camera C , sia $g \in G$ e $C' = g(C)$. Sia $C = C_0, C_1, \dots, C_m = C'$ una galleria da C a C' . Sia $r_i = r_{C_{i-1}, C_i}$, per $i = 1, \dots, m$, e sia $g' = r_m r_{m-1} \dots r_1$. Si ha che $g'(C) = g(C)$. Ma $g, g' \in G$. Sicché $g^{-1}g' \in G$. Pertanto è $g^{-1}g' = 1$, per la (c.2), perché $g^{-1}g'(C) = C$. E la prima parte della (c.4) è provata. La seconda parte è ora ovvia.

Sia K un complesso di camere magro e G un (anzi: *il*, per la (c.4)) gruppo di automorfismi quasi speciali di K transitivo sulle camere. Scelta una camera C come *camera fondamentale*, per ogni faccia A di C indichiamo con G_A lo stabilizzatore di A in G . Possiamo ricopiare isomorficamente K sul sistema dei laterali dei sottogruppi G_A (con $A \subseteq C$). Precisamente, ad una faccia A' di K associamo il laterale gG_A ove g è un opportuno elemento di G che porta un'opportuna $A \subseteq C$ in A' . Ai vertici di K restano allora associati i laterali dei sottogruppi G_x , stabilizzatori di vertici x di C , e alle camere di K restano associati i laterali di G_C ; cioè, qui, gli elementi di G , poiché è $G_C = 1$ per la (c.2). L'inclusione tra faccie si traduce nella duale della inclusione tra laterali, l'incidenza di due faccie nel fatto che i corrispondenti laterali abbiano intersezione $\neq \emptyset$.

Lasciando a chi legge le altre verifiche, mi limito a mostrare che la corrispondenza è ben posta. Sia A' una faccia di K e siano $g_1, g_2 \in G$ ed $A_1, A_2 \subseteq C$ tali che $g_1(A_1) = A' = g_2(A_2)$. Sia $\sqrt{g_i}^{-1}(C)$, per $i = 1, 2$. È $A' \subseteq C_1 \cap C_2$. Ed esiste $g \in G$ tale che $g(C_1) = C_2$. Sicché g fissa A' , essendo un automorfismo quasi speciale. Per di più, $g_2 g g_1^{-1} \in G_C$ (qui è anzi $g_2 g g_1^{-1} = 1$ perché $G_C = 1$). Sicché, $g_2 g_1^{-1}$ e $g_2 g g_2^{-1}$ individuano lo stesso laterale di G_C . Ma $g_2 g g_2^{-1}$ fissa A_2 . Sicché $g_2 g_1^{-1}$ fissa A_2 . Del resto $g_2 g_1^{-1}$ porta A_1 in A_2 . Ne segue che $A_1 = A_2$. E che $g_1 G_{A_1} = g_2 G_{A_2}$ segue ora dal fatto che $g_2 g_1^{-1}$ fissa $A_2 = A_1$.

Nota - Ho evitato di sfruttare il fatto che $G_C = 1$, per evidenziare come il ragionamento sia più generale di quel che le ipotesi qui assunte facciano supporre. La costruzione ora descritta è già stata incontrata più volte nei capitoli precedenti. In tali occasioni le notazioni erano diverse da quelle qui usate: il sottogruppo G_A vi sarebbe stato scritto come \bar{G}_{C-A} , o come S_{C-A} , o come W_{C-A}, \dots . La cosa aveva una sua giustificazione al momento di risalire direttamente dall'insieme (qui = faccia), apposto come indice, ad un insieme di riflessioni generante per il sottogruppo. Ho poi mantenuto tali convenzioni nel Cap. 7 solo per non allontanarmi troppo da quelle usate in precedenza; ma, in quella sede, non ve ne sarebbe stato alcun bisogno.

E' poi presto visto, per la magrezza di K , che per ogni $x \in C$ risulta $G_{C-\{x\}} = \langle r_x \rangle$, ove r_x è la riflessione che scambia C con la camera adiacente a C sulla faccia $C-\{x\}$. Il sistema delle r_x ($x \in C$), dette *riflessioni fondamentali*, dà un insieme di generatori per G . Infatti, possiamo graduare gli elementi di G associando a $g \in G$ come grado $d(g)$ la distanza da C della camera $g(C)$. Possiamo ora ragionare per induzione su $d(g)$. Se $d(g) = 1$, allora g è una riflessione fondamentale. Sia $d(g) > 1$, e sia $C = C_0, C_1, \dots, C_m = g(C)$ una galleria minimale da C a $g(C)$. Sia r la riflessione che scambia C_{m-1} e C_m , e sia g' l'elemento di G che porta C in C_{m-1} . Allora $g = rg'$, e $(g')^{-1}rg'$ è una riflessione fondamentale. Ma g' è prodotto di riflessioni fondamentali, per ipotesi induttiva. Sicché $g = rg' = g'(g')^{-1}rg'$ è prodotto di riflessioni fondamentali.

Nota - La condizione i) della fine del Capitolo 8 dà l'estensione ai casi non magri di quanto ora visto. La dimostrazione non è molto diversa da quella data qui sopra.

Viceversa, sia dato in un gruppo G un sistema di sottogruppi G_i ($i \in I$), tale che, posto $G_J = \bigcap_{i \in J} G_i$ ($J \subseteq I$), sia:

- i) $G_I = 1$
- ii) G è generato da un insieme $\{r_i | i \in I\}$ di involuzioni, dette *riflessioni fondamentali*, tali che, per ogni $i \in I$, sia $G_{I-\{i\}} = \langle r_i \rangle$.

Allora, prendendo come faccie i laterali sinistri dei G_j e rappresentando l'inclusione tra faccie con la duale dell'inclusione tra laterali (al solito: si identifichi gG_j con l'insieme dei laterali gG_i con $i \in J$), si ottiene un complesso di camere magro, sui cui G , agendo per moltiplicazione a sinistra, definisce un gruppo di automorfismi quasi speciali transitivo sulle camere (tutto ciò è di facile verifica).

Nota - E' ovvio come si riadatterà ai casi non magri quanto ora detto: si cancellerà la i), e si sostituirà la ii) con la condizione indicata con i) alla fine del Cap. 8. Lascio le dimostrazioni a chi legge.

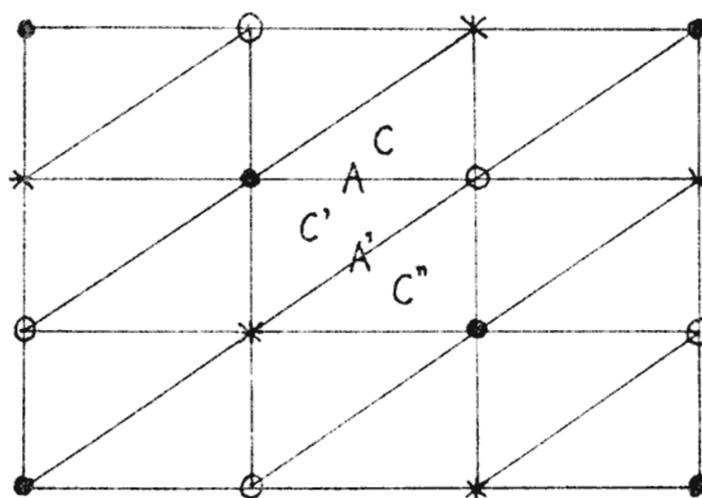
E' ovvio che queste due costruzioni sono l'una l'inversa dell'altra.

Conveniamo di dire *totalmente simmetrico* un complesso di camere magro in cui esistono tutte le riflessioni e tale che ogni automorfismo del complesso che sia generato da riflessioni è quasi speciale. Per la (c.4) un complesso di camere magro K totalmente simmetrico ammette esattamente un gruppo di automorfismi quasi speciali transitivo sulle camere: il gruppo $G_r(K)$ generato dalle riflessioni. Dato un complesso di camere magro totalmente simmetrico K , possiamo assegnare un tipo (che chiameremo per ora *r-tipo*) ai vertici di K , scegliendo una camera C come camera fondamentale, ed assegnando al vertice x' , come *r-tipo*, il vertice x di C tale che $x' = g(x)$ per qualche $g \in G(K)$ (si è già implicitamente visto che questa definizione è ben posta). Indichiamo con θ_r l'equivalenza definita tra i vertici di K ponendo $x \equiv y(\theta_r)$ se x ed y hanno lo stesso *r-tipo*. E' ovvio che θ_r è indipendente da C . La partizione θ_r è non più fine della partizione naturale in tipi θ_I : ciò segue subito dal fatto che ogni camera di K prende esattamente una varietà per ogni *r-tipo*. Per questo stesso motivo, θ_I è ben posta. Proviamo ora che è, anzi, $\theta_I = \theta_r$. Siano x, y due vertici di ugual *r-tipo*. Possiamo supporre, senza introdurre restrizioni essenziali, che $x \in C$. Sia $g \in G_r(K)$ tale che $g(x) = y$. Ma g è prodotto di riflessioni. Sia $\ell(g)$ la minima lunghezza di una espressione di g come prodotto di riflessioni. Ragioniamo per induzione su $\ell(g)$. Se $\ell(g) = 1$, è ovvio che $x \equiv y(\theta_I)$. Sia $\ell(g) > 1$. Allora esiste una riflessione r ed un elemento $g' \in G_r(K)$ tali che $g = rg'$ e $\ell(g') = \ell(g) - 1$. Posto $z = g'(x)$, è $x \equiv z(\theta_I)$ per ipotesi induttiva, e banalmente, $y \equiv z(\theta_I)$. In definitiva: $x \equiv y(\theta_I)$. La $\theta_I = \theta_r$ segue. In particolare: θ_I è trasversale. Da ciò si ha subito che:

(c.5) Sia K un complesso di camere magro totalmente simmetrico. Allora $G_r(K)$ è il gruppo degli automorfismi speciali di K .

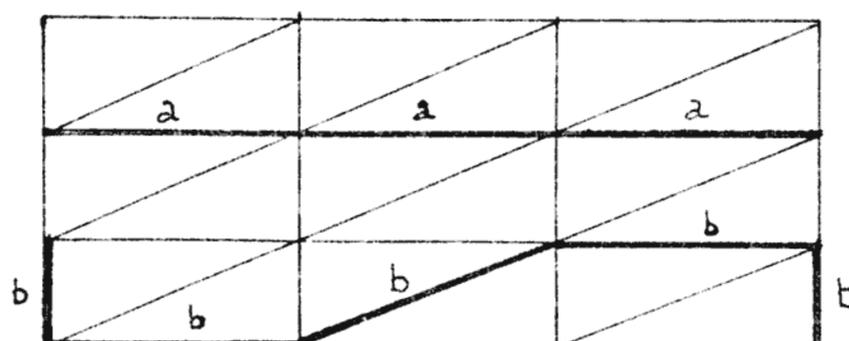
Quanto sin qui visto mostra che il senso dato qui a "speciale" è in armonia con quelli stabiliti in precedenza su complessi di Coxeter ed edifici generalizzati. E mostra anche come la condizione (G) possa tradursi nella (G.bis) del Cap. 3

Sia ora \mathcal{K} un complesso di camere magro, colorabile e totalmente simmetrico. Siano C, C' due camere adiacenti di \mathcal{K} , e sia $A = C \cap C'$. Poniamo ϕ_A^+ uguale all'insieme delle camere \bar{C} per cui è $d(C, \bar{C}) = d(C', \bar{C}) - 1$ e ϕ_A^- uguale all'insieme delle camere \bar{C}' per cui è $d(C, \bar{C}') - 1 = d(C', \bar{C})$. La colorabilità di \mathcal{K} assicura che ϕ_A^+ e ϕ_A^- bipartiscono le camere di \mathcal{K} in due insiemi disgiunti, detti le due radici relative alla faccia A . E' poi ovvio che $r_{C, C'}$ scambia tali due radici. Indicati poi con \mathcal{K}_A^+ e \mathcal{K}_A^- i due sottocomplessi di \mathcal{K} individuati da ϕ_A^+ e ϕ_A^- , poniamo $\partial\phi_A = \mathcal{K}_A^+ \cap \mathcal{K}_A^-$. $\partial\phi_A$ verrà detto muro di A . Indicato poi con F_A l'insieme delle faccie di \mathcal{K} tenute fisse da $r_{C, C'}$, è evidente che $F_A \subset \partial\phi_A$. Il viceversa non è detto. Do qui un controesempio. Si consideri l'usuale triangolazione di un toro con 18 triangoli:

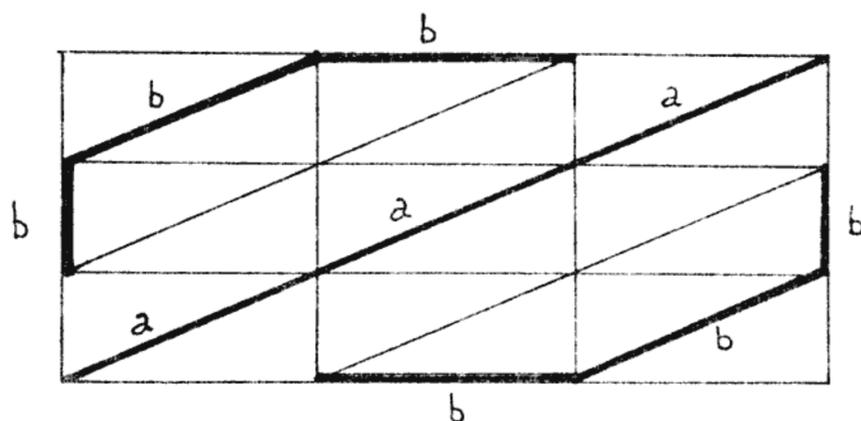


(i bordi della figura vanno identificati nei modi soliti). Si assumano come vertici i vertici della triangolazione e come incidenza tra due vertici il fatto di essere congiunti da un lato della triangolazione. E' presto visto che si ottiene un complesso di camere magro, colorabile e totalmente simmetrico. Le camere sono i triangoli. I tipi sono indicati in figura coi contrassegni \bullet , \circ e $*$

Consideriamo il muro della faccia $A = C \cap C'$. Esso risulta dalle due spezzate chiuse a e b in figura:



Ma F_A è la spezzata a ; mentre $r_{C,C'}$ trasla la spezzata b su sé stessa.
Ancora: consideriamo il muro della faccia $A' = C' \cap C''$. Risulta dalle due spezzate chiuse a e b in figura:



Ma $F_{A'}$ è la spezzata a ; mentre $r_{C,C'}$ trascina b su sé stessa.

Consideriamo la seguente condizione:

(*) Scelte comunque due coppie di camere adiacenti (C, C') e (\bar{C}, \bar{C}') , se $d(C, \bar{C}) = d(C', \bar{C})$, allora $r_{C, C'} \neq r_{\bar{C}, \bar{C}'}$.

Essa è evidentemente falsa sull'esempio ora dato, proprio perché, delle due spezzate a, b che costituiscono il muro di A (di A'), $r_{C, C'}$ (rispettivamente: $r_{C', C''}$) ne trascina una su sé stessa.

Supponiamo ora che K sia un complesso di camere magro, colorabile, totalmente simmetrico e verificante la (*). Siano C, C' due camere adiacenti ed $A = C \cap C'$. Cominciamo col provare che le due radici relative ad A sono insiemi convessi di camere (cfr. Cap. 5). Siano dunque $\bar{C}, \bar{C}' \in \Phi_A^+$, e sia $\bar{C} = C_0, C_1, \dots, C_m = \bar{C}'$ una galleria minimale in K da \bar{C} a \bar{C}' . Per assurdo, tale galleria fuoriesca da Φ_A^+ . Sia C_h la prima camera della galleria che fuoriesce da Φ_A^+ . Peraltro, prima o poi la galleria deve rientrare in Φ_A^+ , dal momento che $\bar{C}' \in \Phi_A^+$. Sia dunque C_k la prima camera dopo C_h che rientra in Φ_A^+ . Risulta $d(C, C_{h-1}) = d(C', C_h)$ e $d(C', C_{k-1}) = d(C, C_k)$. Sicché, per la (*), è $r_{C_{h-1}, C_h} = r_{C, C'} = r_{C_{k-1}, C_k}$.

Ne segue che $r_{C, C'}$ porta il tratto di galleria da C_h a C_{k-1} in una galleria da C_{h-1} a C_k . Sicché la galleria data sopra da \bar{C} a \bar{C}' può essere sostituita da una galleria più breve; non era dunque minimale; assurdo. Su Φ_A^- il ragio-

namento è lo stesso.

Da ciò si ha poi subito che, date due camere \bar{C} e ϕ_A^+ e \bar{C}' e ϕ_A^- , ogni galleria minimale da \bar{C} a \bar{C}' ; attraversa $\partial\phi_A$ una sola volta (ovvero: si divide in due tronconi, il primo tutto contenuto in ϕ_A^+ , il secondo in ϕ_A^-).

Ovviamente, $\partial\phi_A$ non contiene camere. Sia \bar{F}_A l'insieme delle faccie di codimensione 1 (o corango 1, come si preferisca dire), in $\partial\phi_A$. Si ha ora che $\bar{F}_A \subseteq F_A$. Sia infatti $B \in \bar{F}_A$, e siano \bar{C} e \bar{C}' le due camere uscenti da B . Necessariamente, una di esse sta in ϕ_A^+ e l'altra in ϕ_A^- . Poniamo sia $\bar{C} \in \phi_A^+$. E' allora $d(C, \bar{C}) = d(C', \bar{C}')$. Sicché, per la (*), $r_{C, C'} = r_{\bar{C}, \bar{C}'}$. Sicché $r_{C, C'}$, scambiando \bar{C} e \bar{C}' , fissa B . Si ha, tra l'altro, che A e B individuano la stessa riflessione, e pertanto che $F_A = F_B$.

Ma non possiamo però ancora provare che $F_A = \partial\phi_A$. Do qui un controesempio. Consideriamo nel piano euclideo i punti (x, y) di coordinate intere. Ripartiamoli in tre tipi 0, 1, 2 assegnando ad (x, y) il tipo r se $x - y \equiv r \pmod{3}$. Stabiliamo tra questi punti un'incidenza ponendo due punti incidenti se distano di 1 oppure se distano di $\sqrt{2}$ e individuano una retta di coefficiente angolare -1. Sia K il complesso di camere determinato da questa relazione d'incidenza. K è magro, colorabile, totalmente simmetrico, e verificante la (*). Anzi: K è il complesso di Coxeter di diagramma:



(ciò risulterà dal seguito). Noto che K può anche pensarsi ottenuto da una qualunque tassellazione del piano euclideo in triangoli equilateri.

Costruiamo ora su K un secondo complesso K^* , identificando ogni punto (x, y) di tipo 0 con uno dei tre punti $(0, 0), (1, 1)$ e $(2, 2)$ a seconda che $x \equiv 0, 1$ o $2 \pmod{3}$. Non aggiungiamo però altre faccie oltre a quelle direttamente ottenibili da quelle di K (per esempio: risulta ora $(0, 0)$ incidente a $(2, 0)$, perché $(0, 0)$ è identificato a $(3, 0)$, che è incidente a $(2, 0)$ in K ; ciò nonostante non consideriamo la terna $(0, 0), (1, 0), (2, 0)$ come una camera di K^*). Si verifi-

ca direttamente che K^* è un complesso di camere magro, colorabile, totalmente simmetrico e verificante la (*). Non è però vero che, presa una faccia A di K^* di codimensione 1, sia $F_A = \partial\Phi_A$. Infatti F_A è rappresentabile da una retta del piano, mentre $\partial\Phi_A$ contiene, oltre ad F_A , i tre vertici di K^* di tipo 0. Il complesso K^* presenta un'altra anomalia, legata a quella ora vista: il residuo di un vertice di tipo 0 non è un complesso di camere: consta infatti di (in finiti) esagoni, tra loro disgiunti.

Veniamo dunque alla caratterizzazione dei complessi di Coxeter:

(c.6) I complessi di Coxeter sono i complessi di camere magri, colorabili, totalmente simmetrici, verificanti la (*) e tali che per ogni loro faccia B il residuo di B sia un complesso di camere.

Che i complessi di Coxeter abbiano tutte le proprietà sopra elencate segue dalla caratterizzazione dei complessi di Coxeter data da Tits in [26] Cap. 2. Viceversa, sia K un complesso di camere verificante tutte le condizioni elencate nella (c.6). Proviamo che per ogni faccia A di K di codimensione 1 è $F_A = \partial\Phi_A$. Sia infatti $B \in \partial\Phi_A$, siano \bar{C} e \bar{C}' due camere contenenti B con $\bar{C} \in K_A^+$ e $\bar{C}' \in K_A^-$; sia poi $\bar{C} = C_0, C_1, \dots, C_m = \bar{C}'$ una galleria nella stella di camere per B (ovvero: nel residuo di B) da \bar{C} a \bar{C}' . Sia C_h la prima camera della galleria che esce da Φ_A^+ . Allora, posto $\bar{A} = C_{h-1} \cap C_h$, è $\bar{A} \in \partial\Phi_A$. Ma \bar{A} ha codimensione 1, sicché $\bar{A} \in F_A$, per quanto visto in precedenza. Pertanto: $B \in F_A$.

Date ora due camere adiacenti C, C' e posto $A = C \cap C'$, possiamo definire due endomorfismi γ_A^+ e γ_A^- di K , detti *ripiegature* di K attorno ad A (o attorno a $\partial\Phi_A$) ponendo $\gamma_A^+(B) = r_{C,C'}(B)$ per ogni faccia B in Φ_A^+ e $\gamma_A^+(B) = B$ per ogni faccia B in Φ_A^- (similmente per γ_A^- , scambiando + con -). La $F_A = \partial\Phi_A$ assicura che la definizione è ben posta. Che K sia un complesso di Coxeter segue allora dalla caratterizzazione dei complessi di Coxeter data da Tits nel Cap. 2 di [26].

La caratterizzazione dei Complessi di Coxeter data da Tits è molto semplice:

si riassume tutta nell'ipotesi che il complesso (di camere magro) ammetta tutte le ripiegature (definite in generale come endomorfismi idempotenti ϕ del complesso tali che ogni camera sia immagine mediante ϕ o di nessuna o di due camere). Insisto sul fatto che, in pratica, la caratterizzazione data dalla (c.6) è di scarsa utilità. Per esempio: se mediante la (c.6) si volesse dedurre la (b.2) del Cap. 1, non sarebbe difficile, usando la (b.1), la (B.4) e l'assunzione di grassezza della (B.1), ricavare che gli appartamenti sono colorabili, totalmente simmetrici e che verificano la (*). Ma, per dedurre che il residuo di una faccia in un appartamento è un complesso di camere, è necessario sapere già che gli appartamenti ammettono tutte le ripiegature (cioè: occorre avere già dimostrato la (b.2)). Rimando per questo a [26], nn. 2.7-2.9 e 3.14.