

CENNI SULLE GEOMETRIE ASSOCIATE A GRUPPI SEMPLICI FINITI SPORADICI:

IL CASO DEI GRUPPI DI MATHIEU

Alcuni gruppi semplici sporadici sono stati ottenuti con costruzioni essenzialmente geometriche. Il caso forse più appariscente è quello dei gruppi di Fischer e di Conway. Ma è noto che in tale chiave possono vedersi molti altri gruppi sporadici, a cominciare da quelli di Mathieu. Questi furono scoperti originariamente da Mathieu studiando i gruppi di permutazioni quadruplamente o quintuplamente transitivi. Ma sono anche ottenibili come stabilizzatori di opportune strutture definite a partire da un'unica costruzione geometrica, cui quella che produce i gruppi di Conway è strettamente legata; del resto i primi due gruppi di Mathieu possono essere ritenuti con una seconda costruzione geometrica, simile alla precedente, e in questo contesto vi sono connessioni col gruppo J_1 di Janko. (Cfr. [29] e [14]).

Fatti come questi, e l'esempio dell'eccellente prova data sui gruppi semplici classici dalla teoria degli edifici (e delle BN-coppie), fanno sospettare che possano esservi qui in gioco cose più profonde, da scoprire.

Comunque, per saperne di più, è indispensabile un lungo lavoro preliminare di raccolta, organizzazione e analisi di dati: scoperta, studio e classificazione delle varie geometrie associabili ai vari gruppi sporadici. E qui il lavoro è solo agli inizi: anche se già si conoscono interpretazioni geometriche per più della metà dei gruppi sporadici, per il momento ciò non ci dà molto di più che una prima lista di esempi; le connessioni finora note tra questi, pur non essendo poche, sembrano però ancora, per lo più, o troppo legate alle specificità delle particolari costruzioni con cui sono stati prodotti i vari gruppi perché se ne possano immediatamente trarre molte conseguenze, oppure troppo esterne per suggerire qualcosa di chiaro. Ma, appunto, si è solo agli inizi.

Rimando per il materiale finora disponibile (o, meglio: a me noto) alla parte conclusiva di [7] e agli esempi di [9]. E, inoltre, all'articolo di W.M.Kantor [19], all'articolo di M.Ronan e S. Smith [23], agli articoli di A.M.Cohen [12] e [13], e all'articolo di Buekenhout [10]. E anche all'articolo di A.Neuumaier [20].

Avverto che uno stesso gruppo può avere più interpretazioni geometriche. Per esempio, ne sono note due (una di rango 3 e una di rango 2) per il gruppo di Hall-Janko J_2 , due per il gruppo sporadico di Suzuki Sz , ben quattro per il gruppo di Janko J_1 (due di rango 3 e due di rango 2). Ma su ciò avrò occasione di tornare più avanti.

L'armamentario concettuale di cui ci si è dotati è la teoria della geometria di Tits-Buekenhout. Si incontrano per lo più geometrie strettamente lineari (ovviamente pure, dal momento che se ne disegnano diagrammi speciali); le uniche eccezioni per ora sono: la geometria prodotta da M.Ronan e S.Smith per il gruppo di Suzuki Sz (cfr. articolo sopra citato), la geometria prodotta da W.M.Kantor per il gruppo di Lyons-Sims (cfr. articolo citato) e la geometria associata al primo gruppo di Conway (cfr. [7] § 12): su esse anche (IP.1) viene a cadere (Avverto che analoga anomalia presenta la geometria associata da A. Neumaier al gruppo $\text{Aut}(Sz)$. Cfr. articolo sopra citato).

Il legame richiesto fra il gruppo e la geometria è:

(G*) Il gruppo agisce sulla geometria come gruppo di automorfismi speciali transitivo sull'insieme delle camere.

Qui mi limiterò a trattare, come esempio, il caso dei gruppi di Mathieu. Rimando, per le dimostrazioni e per tutti i dettagli che ometterò, a [14].

Sia Ω la retta proiettiva su $F_{23} = GF(23)$. Ovvero: Ω è la sequenza di simboli: $\infty, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 21, 22$. Il gruppo $\text{PSL}_2(23)$ coincide col gruppo $L_2(23)$ di tutte le trasformazioni di Ω in sé del tipo

$$x \rightarrow (ax+b)/(cx+d) \quad (a,b,c,d \in F_{23}, \quad e \quad ad-bc = 1)$$

(ovvio il senso di somme, prodotti, divisioni quando vi sia coinvolto il simbolo ∞). Si pone poi $\Omega' = F_{23} = \Omega - \{\infty\}$, $Q = \{x^2 \mid x \in F_{23}\}$, $N = \Omega - Q$, $Q' = Q - \{0\}$, $N' = N - \{\infty\}$. $L_2(23)$ ha per generatori le tre operazioni:

$$\alpha : x \rightarrow x+1, \quad \beta : x \rightarrow 2x, \quad \gamma : x \rightarrow -x^{-1}.$$

Il gruppo M_{24} può essere definito come il sottogruppo del gruppo simmetrico S_{24} (sui 24 simboli che compongono Ω) generato da α, β, γ , e dalla permuta-

zione:

$$\delta : \begin{cases} x \rightarrow x^3/9 & \text{se } x \in Q \\ x \rightarrow 9x^3 & \text{se } x \in N \end{cases}$$

Consideriamo ora l'insieme $P(\Omega)$ dei sottoinsiemi di Ω . $P(\Omega)$, munito dell'operazione di differenza simmetrica (somma nell'anello booleano delle parti di Ω) è uno spazio vettoriale \mathcal{V} su $GF(2)$. Il gruppo S_{24} resta allora identificato col gruppo delle trasformazioni lineari permutazionali di \mathcal{V} . Sicché M_{24} è un gruppo di trasformazioni lineari di \mathcal{V} . Consideriamo il sottospazio \mathcal{C} di \mathcal{V} (detto *codice binario di Golay*) generato dai 24 insiemi N_i ($i \in \Omega$) ove è:

$N_\infty = \Omega$ e $N_i = N-i = \{n-i | n \in N\}$ se $i \neq \infty$. Il sottospazio \mathcal{C} ha una struttura assai interessante. Ha dimensione 12, e i suoi elementi diversi da \emptyset e Ω si distribuiscono in tre classi:

- 1) *Ottadi*. Costano di 8 elementi: ogni quintupla di elementi di Ω appartiene ad esattamente un'ottade. Ci sono esattamente 759 ottadi.
- 2) *Dodecadi*. Costano di 12 elementi, risultano dalla differenza simmetrica di due ottadi intersecantisi su una coppia di elementi, e sono 2576 in tutto.
- 3) *Complementari (in Ω) di ottadi*. E non vi sono altri elementi in \mathcal{C} .

Sia poi data un'ottade $A = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ e sia $A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ per $1 \leq i \leq 8$ e $A_0 = \emptyset$. Sia $(i;j)_{\text{ott}}$ il numero delle ottadi che intersecano A_i esattamente su A_j (per $0 \leq j \leq i \leq 8$), e $(i;j)_{\text{dod}}$ il numero delle dodecadi che intersecano A_i esattamente su A_j . La lista dei valori di $(8;j)_{\text{ott}}$ è:

30 0 16 0 4 0 0 0 1

e quella dei valori di $(8;j)_{\text{dod}}$ è:

0 0 16 0 24 0 16 0 0 .

Per di più risulta, per ogni i con $0 \leq i < 8$ e per ogni j con $0 \leq j \leq i$:

$$(i;j)_{\text{ott}} = (i+1;j)_{\text{ott}} + (i+1;j+1)_{\text{ott}}$$

$$(i;j)_{\text{dod}} = (i+1;j)_{\text{dod}} + (i+1;j+1)_{\text{dod}}$$

Si ha poi anche che ogni elemento di \mathcal{Y} è congruo modulo \mathcal{E} o ad un unico elemento di \mathcal{Y} di cardinalità al più 3 oppure a ciascuno di 6 insiemi di cardinalità 4, a due a due distinti. In questo secondo caso, l'unione di due qualunque di questi 6 insiemi è un'ottade. Diremo *sestetto* una sestupla di quaterne a due a due disgiunte tale che l'unione di due qualunque di esse è un'ottade. Una terna di ottadi a due a due disgiunte sarà detta un *trio*. Un *duum* (cfr. [14]) è una coppia di dodecadi disgiunte.

Nota - Forse sarà superfluo, ma ad ogni modo, onde evitare fraintendimenti, avverto che quando dovrò riferirmi agli ordinari insiemi di 3,4,...n,... elementi userò sempre i suffissi "-pla" o "-na" (come in: tripla, terna, quadrupla, quaterna, ...), e riserverò i suffissi "-ade" o "-etto" (come in: ottade, sestetto,...) ai sensi speciali stabiliti sopra.

Nel seguito col termine *stabilizzatore* intendo sempre che l'insieme stabilizzato è stabilizzato nel suo complesso. Quando voglia intendere lo stabilizzatore elemento - per - elemento, lo dirò esplicitamente.

Diciamo poi che un gruppo rappresentato come gruppo di permutazioni su m insiemi disgiunti X_1, \dots, X_m è (K_1, \dots, K_m) -*transitivo* su X_1, \dots, X_m , nell'ordine, se presi comunque K_i elementi $a_{i,1}, \dots, a_{i,K_i}$ in X_i (per $1 \leq i \leq m$) ed altri K_i elementi $b_{i,1}, \dots, b_{i,K_i}$ in X_i (per $i=1, \dots, m$), esiste un elemento p del gruppo che porta $a_{i,j}$ in $b_{i,j}$ (per $i=1, \dots, m$ e $j=1, \dots, K_i$).

Si hanno i seguenti risultati:

(m.1) M_{24} è lo stabilizzatore in S_{24} (gruppo delle permutazioni di Ω) del codice di Golay \mathcal{E} .

(m.2) M_{24} è quintuplamente transitivo su Ω .

- (m.3) M_{24} è transitivo sulle ottadi. Lo stabilizzatore in M_{24} di un'ottade è un'estensione $2^4 A_8$ del 2-gruppo elementare abeliano 2^4 di ordine 16 mediante A_8 , e si spezza su A_8 . Il gruppo A_8 è autonormalizzante in $2^4 A_8$. I coniugati di A_8 in $2^4 A_8$ danno gli stabilizzatori dei 16 elementi nel complementare dell'ottade. A_8 , in quanto gruppo di automorfismi interni di 2^4 , è un gruppo di trasformazioni lineari di uno spazio 4-dimensionale su $GF(2)$. Nei fatti: $A_8 \cong PSL_4(2)$. Il gruppo $2^4 A_8$ è (6,1), (3,2) e (1,3) transitivo sull'ottade e sul suo complementare.
- (m.4) M_{24} è transitivo sulle dodecadi. Lo stabilizzatore in M_{24} di una dodecade è M_{12} che è (5,0), (3,1), (1,3) e (0,5) transitivo sulla dodecade e sul suo complementare. Lo stabilizzatore di un duum è un'estensione M_{12}^2 di M_{12} mediante il gruppo di ordine 2. Lo stabilizzatore in M_{12} di un punto della dodecade (stabilizzata da M_{12}) è M_{11} .
- (m.5) (M_{24} è transitivo sui singoletti, le coppie e le terne, per (m.2)).
 Lo stabilizzatore in M_{24} di un singoletto è M_{23} (che è (1,4) transitivo sul singoletto e sul suo complementare, per (m.2)). Lo stabilizzatore in M_{24} di una coppia è un'estensione M_{22}^2 di M_{22} mediante il gruppo di ordine 2; per la (m.2), è (2,3) transitivo sulla coppia e sul suo complementare. Ma è anche (1,4) transitivo sulla coppia e sul suo complementare. Lo stabilizzatore in M_{24} di una coppia elemento-per-elemento è M_{22} , ed è quadruplemente transitivo sul complementare della coppia. Lo stabilizzatore in M_{24} di una terna è un'estensione $M_{21} S_3$ di M_{21} mediante il gruppo simmetrico S_3 . È (1,4) e (2,3) transitivo sulla terna e sul suo complementare. Lo stabilizzatore in M_{24} di una terna elemento per elemento è il gruppo M_{21} .
- (m.6) M_{24} è transitivo sui sestetti. Lo stabilizzatore di un sestetto è un'estensione $(2^6 \cdot 3) S_6$ mediante il gruppo simmetrico S_6 di un sottogruppo normale $2^6 \cdot 3$, estensione mediante il gruppo d'ordine 3 del 2-gruppo abeliano elementare 2^6 di ordine 64. Il gruppo $2^6 \cdot 3$ è lo stabilizzatore del sestetto elemento-per-elemento ed è (2,1,1,0,0,0) e (3,1,0,0,0,0) transitivo sulle quaterne del sestetto. Infine M_{24} è transitivo sui trii. Lo stabi-

lizzatore di un trio è un estensione $2^6(S_3 \times \text{PSL}_3(2))$ del gruppo 2^6 mediante $S_3 \times \text{PSL}_3(2)$ (S_3 è il gruppo simmetrico su 3 elementi).
 Lo stabilizzatore del trio elemento-per-elemento è un estensione $2^6 \text{PSL}_3(2)$ del gruppo 2^6 mediante $\text{PSL}_3(2)$, ed è $(2,1,1)$ e $(3,1,0)$ transitivo sulle tre ottadi del trio.

Il sistema delle ottadi permette di interpretare i gruppi M_{24}, M_{23}, M_{22} ed M_{21} come gruppi di automorfismi di sistemi di Steiner $S(5,8,24)$, $S(4,7,23)$, $S(3,6,22)$ ed $S(2,5,21)$ rispettivamente, e le proprietà delle dodecadi permettono di associare M_{12} ed M_{11} a due sistemi di Steiner $S(5,6,12)$ ed $S(4,5,11)$, rispettivamente.

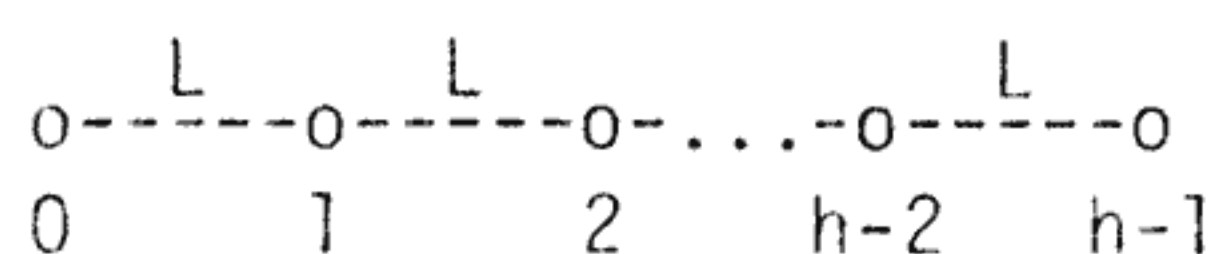
Richiamo la definizione di sistema di Steiner. Siano h, k, n tre numeri con $h \leq k \leq n$. Un sistema di Steiner di parametri h, k ed n è una coppia $\Sigma = (S, \mathcal{S})$ ove S , detto insieme dei punti, ha cardinalità n ed \mathcal{S} , detto insieme dei blocchi o delle k -adi, è una famiglia di sottoinsiemi di S di cardinalità k tale che ogni sottoinsieme di S di cardinalità h è incluso in esattamente un elemento di \mathcal{S} . E' usanza indicare un sistema di Steiner di parametri h, k, n con la notazione $S(h, k, n)$.

E' ovvio che il sistema delle ottadi (di \mathcal{C}) definisce su Ω un sistema di Steiner di parametri $5, 8, 24$.

Rammento che i sistemi di Steiner di parametri $2, k, n$ sono gli spazi lineari su n punti in cui tutte le rette hanno k punti (brevemente: spazi lineari d'ordine k su n punti).

Ovvio cosa sia un automorfismo di un sistema di Steiner.

Dato un sistema di Steiner Σ di parametri h, k, n su un insieme di punti S possiamo definire su esso una geometria di rango h , assumendo $\{0, 1, \dots, h-1\}$ come insiemi di tipi, i sottoinsiemi di S di cardinalità j ($0 \leq j < h-1$) come j -varietà e le k -adi come $(h-1)$ -varietà, e definendo infine l'incidenza nel modo ovvio, mediante l'inclusione. E' presto visto che si ottiene così una geometria $\Gamma(\Sigma)$ di diagramma:





e che Σ può essere univocamente ricostruito da $\Gamma(\Sigma)$. Il diagramma di $\Gamma(\Sigma)$ può anzi essere disegnato con più precisione, introducendo marche opportune.

Indichiamo con:

$\begin{matrix} o & \xrightarrow{c_o} & o \\ i & & j \end{matrix}$ il fatto che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono triangoli.

e con $\begin{matrix} & L_{r,s} & \\ o & \xrightarrow{\quad} & o \\ i & & j \end{matrix}$ il fatto che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono spazi lineari d'ordine r su s punti. Allora $\Gamma(\Sigma)$ ha diagramma:

$\begin{matrix} o & \xrightarrow{c_o} & o & \xrightarrow{c_o} & o & \dots & o & \xrightarrow{c_o} & o & \xrightarrow{c} & o & \xrightarrow{L_{k',n'}} & o \\ 0 & & 1 & & 2 & & h-4 & & h-3 & & h-2 & & h-1 \end{matrix}$ (ove $k'=k-h+2$ ed $n'=n-h+2$)

La geometria $\Gamma(\Sigma)$ è poi strettamente lineare, per la (gd.12). Ed è evidentemente pura. E' poi ovvio che ogni automorfismo di Σ individua un automorfismo speciale di $\Gamma(\Sigma)$. Osservo ora che dalle considerazioni svolte nel Cap. 7 si ha che in una geometria pura Γ di diagramma:

$\begin{matrix} o & \xrightarrow{\pi} & o & \xrightarrow{\pi} & o & \dots & o & \xrightarrow{\pi} & o \\ 0 & & 1 & & 2 & & h-2 & & h-1 \end{matrix}$

le bandiere 0-ridotte sono le varietà (e la bandiera \emptyset); sicché dalla (gd.7), l'azione su Γ di un suo automorfismo speciale α è individuata dall'azione di α sulle 0-varietà. Per questo, e per la possibilità di ricostruire univocamente Σ da $\Gamma(\Sigma)$, possiamo identificare il gruppo degli automorfismi di Σ col gruppo degli automorfismi speciali di $\Gamma(\Sigma)$.

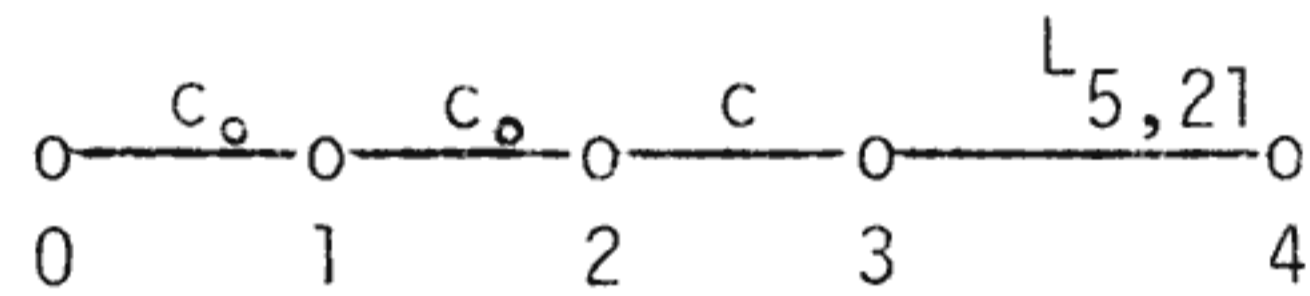
Sia ora G un gruppo di automorfismi di Σ (dunque: automorfismi speciali di $\Gamma(\Sigma)$); è immediato riconoscere che G è transitivo sulle camere di $\Gamma(\Sigma)$ se e solo se è h -transitivo sull'insieme S dei punti di Σ (0-varietà di $\Gamma(\Sigma)$).

E' poi ovvio che, data una bandiera F in una geometria Γ e un gruppo G di automorfismi speciali di Γ , lo stabilizzatore G_F di F in G individua sul residuo Γ_F di F un gruppo di automorfismi speciali. E se G è transitivo sulle camere di Γ , tale è G_F sulle camere di Γ_F .

Sicché, se ora G è un gruppo di automorfismi di Σ , e se $X \in S$ ha cardinalità i (con $1 \leq i < h-2$), lo stabilizzatore elemento-per-elemento G_X di X in G è lo stabilizzatore della bandiera.

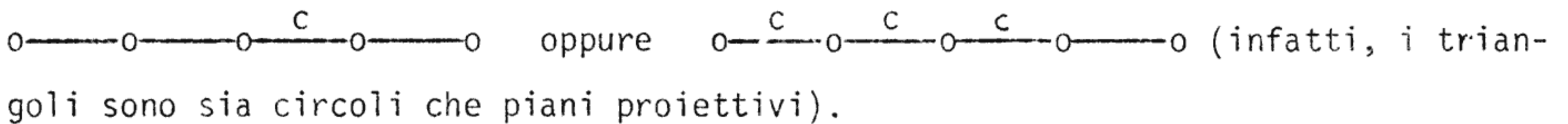
$F = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_1, x_2, \dots, x_i\}\}$ (dato un qualunque ordinamento x_1, x_2, \dots, x_i di X). Pertanto G_X individua sul residuo $\Gamma(\Sigma)_F$ di F in $\Gamma(\Sigma)$ un gruppo di automorfismi speciali, transitivo sulle camere se tale era G sulle camere di $\Gamma(\Sigma)$. Si vede poi immediatamente che $\Gamma(\Sigma)_F$ è identificabile con la geometria $\Gamma(\Sigma_X)$ associata al sistema di Steiner $\Sigma_X = (S-S, \mathfrak{S}_X)$, di parametri $h-i, k-i, n-i$, ove è $\mathfrak{S}_X = \{Y-X \mid Y \supseteq X \text{ e } Y \text{ è una } k\text{-ade in } \Sigma\}$.

Tornando ora ai gruppi di Mathieu, sappiamo che il sistema delle ottadi di \mathcal{E} definisce un sistema di Steiner $\Sigma_{\mathcal{E}}$ di parametri $5, 8, 24$, e che (cfr.(m.1)) M_{24} è il gruppo degli automorfismi di $\Sigma_{\mathcal{E}}$. Inoltre M_{24} è transitivo sulle ottadi e 5-transitivo sui punti di $\Sigma_{\mathcal{E}}$ (cfr. (m.3) ed (m.2)). Sicché M_{24} è il gruppo degli automorfismi speciali di $\Gamma(\Sigma_{\mathcal{E}})$ ed è transitivo sulle camere di $\Gamma(\Sigma_{\mathcal{E}})$. La geometria $\Gamma(\Sigma_{\mathcal{E}})$ ha il diagramma

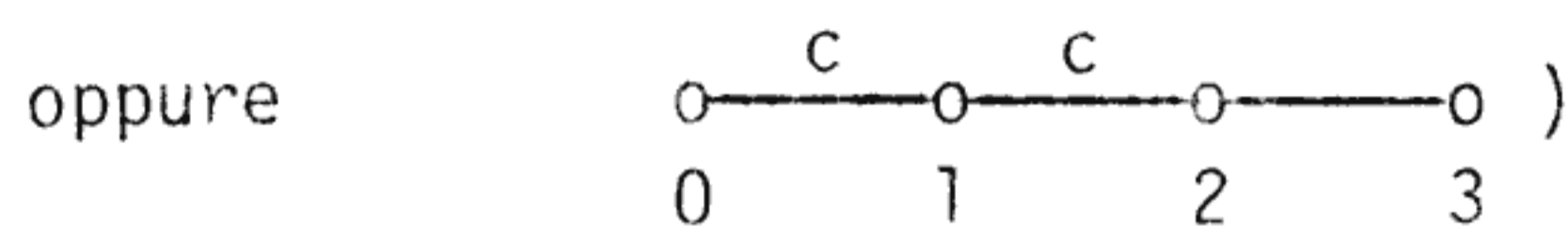
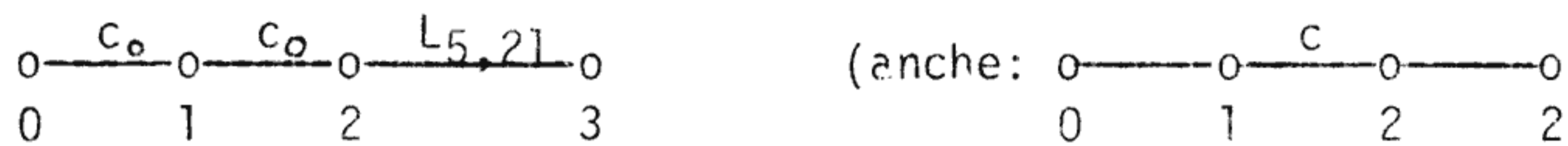


Ma è presto visto gli spazi lineari d'ordine 5 su 21 punti sono i piani proiettivi d'ordine 4.

Sicché il diagramma di $\Gamma(\Sigma_{\mathcal{E}})$ può anche mettersi in una delle due forme:



Sappiamo dalla (m.5) che il gruppo di Mathieu M_{23} è lo stabilizzatore di un (qualunque) punto x di $\Sigma_{\mathcal{E}}$. Sicché costituisce un gruppo di automorfismi del sistema di Steiner $(\Sigma_{\mathcal{E}})_x$ di parametri $4, 7, 23$, ed è quadruplamente transitivo sui punti di tale sistema. Il diagramma di $\Gamma((\Sigma_{\mathcal{E}})_x)$ ($=\Gamma(\Sigma_{\mathcal{E}})_x$) è:



Ovvio a questo punto come vanno le cose per M_{22} (si usi ancora la (m.5)): resta associato a un sistema di Steiner $S(3,6,22)$, e risulta triplemente transitivo sui

i trii, come incidenza l'appartenenza. Otteniamo uno spazio lineare parziale e, per (m.6) o (m.3), M_{24} agisce su tale spazio come gruppo d'automorfismi speciali, transitivo sulle camere (coppie punto-retta incidenti).

In tale spazio ogni retta contiene 3 punti e da ogni punto escono 15 rette (ciò risulta facilmente dalle proprietà di \mathcal{C}). Tale spazio ha anzi una struttura abbastanza interessante. Diciamo che uno spazio lineare parziale è un (g, d_n, d_ℓ) -agone (cfr. [9]) se g (detto gonalità) è il più piccolo numero di lati in un poligono ordinario estraibile dallo spazio in questione, se d_p , detto diametro di punto e definito come la massima distanza di un punto x da un punto o una retta dello spazio, non dipende da x , e analogamente per d_ℓ (detto diametro di retta). Rammento che la distanza tra due elementi, punti o rette, di uno spazio parziale lineare è intesa come nei complessi di camere: la distanza di una faccia A da una faccia B è la più piccola tra le lunghezze di gallerie da A a B .

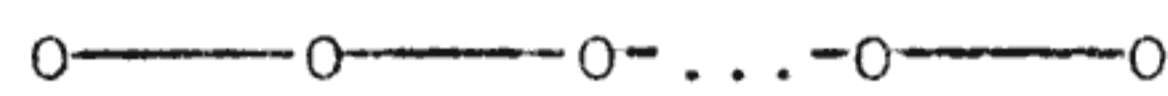
Nota - Un piano affine è un $(3,3,4)$ -gono, per esempio).

Ciò premesso, lo spazio lineare parziale ora associato ad M_{24} è un $(4,6,6)$ -gono (cfr. [9], Ex.6). Qui mi limito a mostrare che la gonalità è 4 (lascio a chi legge la verifica che diametro di retta e diametro di punto sono entrambi 6). Sia $\{A_1, A_2, \dots, A_6\}$ un sestetto. Poniamo $A_{i,j}$ uguale all'ottade $A_i \cup A_j$ ($1 \leq i < j \leq 6$). Consideriamo la quaterna di ottadi $A_{1,2}, A_{3,6}, A_{2,4}, A_{5,6}$. Costituiscono i vertici di un quadrilatero i cui lati sono dati dai trii $\{A_{1,2}, A_{4,5}, A_{3,6}\}$, $\{A_{3,6}, A_{1,5}, A_{2,4}\}$, $\{A_{2,4}, A_{1,3}, A_{5,6}\}$, $\{A_{5,6}, A_{3,6}, A_{1,2}\}$. Si vede poi subito che non esistono triangoli. Sicché la gonalità è appunto quattro.

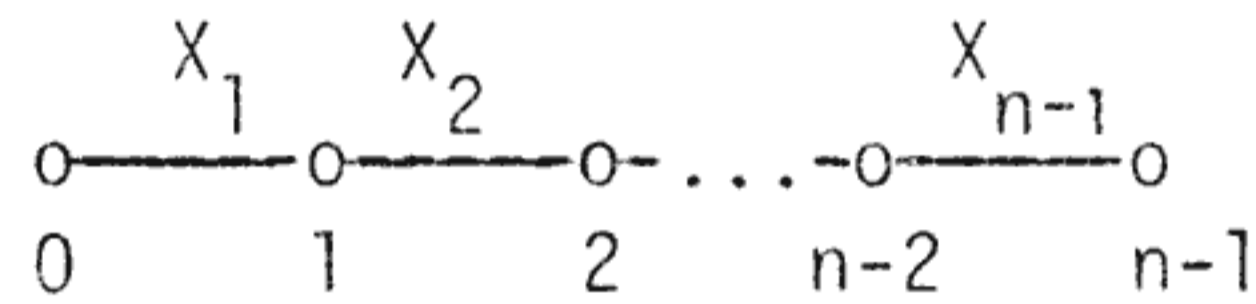
Un altro esempio. Sappiamo che M_{24} è transitivo sui sestetti e i trii. Prendiamo i sestetti come punti e i trii come rette, e diciamo che un sestetto è incidente a un trio se il sestetto, come partizione di Ω , costituisce un raffinamento del trio. Otteniamo una geometria con 1771 punti e 3795 rette (cfr. pag. 230 di [14]). Ogni retta ha 7 punti e da ogni punto escono 15 rette. Si ottiene un $(3,5,5)$ -agone (cfr. [9], Ex. 20). M_{24} è transitivo sulle sue camere.

Ma si possono dare semplici costruzioni per produrre nuove interpretazioni geometriche da altre interpretazioni già date. La via più banale è quella di cancellare le varietà il cui tipo sta in un dato insieme di tipi.. Occorrono qui alcuni preliminari.

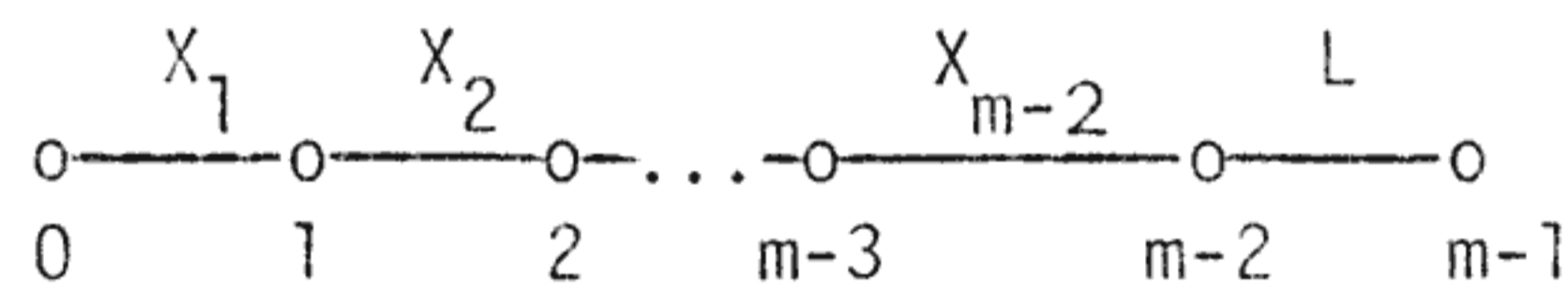
Sia \mathcal{G} un grafo e D un insieme di vertici di \mathcal{G} . D sia dirà *fortemente convesso* se contiene tutti i cammini semplici congiungenti in \mathcal{G} due qualunque elementi di D (intendo per *semplice* un cammino senza ripetizioni di vertici). Sia ora Γ una geometria pura e sia D un insieme fortemente convesso in $\Delta(\Gamma)$. Allora la geometria Γ^D (cfr. Cap. 5) è pura (rimando, per la dimostrazione, a [22]). In particolare: se $\Delta(\Gamma)$ ha la forma:



cancellando le varietà il cui tipo appartiene ad un tratto iniziale (oppure finale) di $\Delta(\Gamma)$ ottengo ancora una geometria pura. Per di più, se Γ ha diagramma speciale



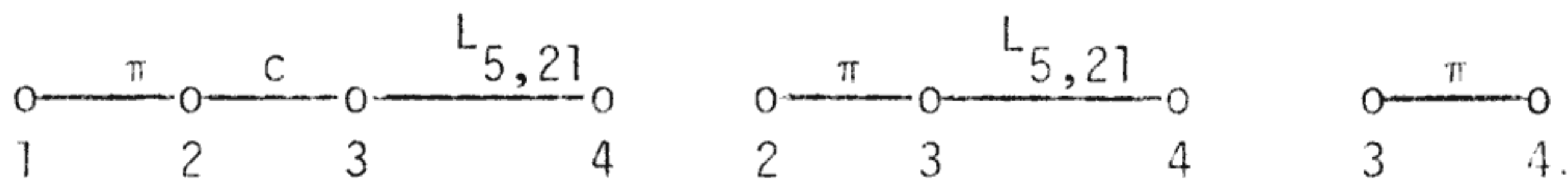
(ove X_1, X_2, \dots, X_{n-1} sono marche che denotano particolari classi di spazi lineari, senza escludere che $X_i = L$, naturalmente) allora cancellando le varietà di tipo $i \geq m$ (per un dato $m \leq n-1$) otteniamo ancora una geometria pura di diagramma:



(per un esempio di questo procedimento: Cap. 5, (gd.3), diagramma (AL_n)).

E' poi ovvio che se G è un gruppo di automorfismi di una geometria pura Γ , transitivo sulle camere di Γ , e se D è un insieme fortemente convesso in $\Delta(\Gamma)$, allora G è un gruppo di automorfismi speciali di Γ^D , transitivo sulle sue camere.

Possiamo dunque associare M_{24} alle geometrie di diagrammi:



ottenute da $\Gamma(\Sigma_{\mathcal{G}})$ cancellando, rispettivamente, le 0-varietà, le 0- ed 1-varietà,

e, le 0-, le 1- e le 2-varietà. Sulla terza di queste geometrie si può dire molto di più di quanto non risulti dalla figura. Consta dello spazio parziale lineare i cui punti sono le quaterne e le cui rette sono le ottadi. Considerando due ottadi intersecantisi su quattro punti si ricava che la gonaltà di questo spazio è 3. E' facile verificare che si tratta di un (3,6,5)-agone. Lascio la verifica a chi legge.

Nota - La definizione data sopra di (g, d_p, d_ℓ) -agone è leggermente più ampia di quella data da Buekenhout in [9]; egli richiede infatti che sia anche $d_p \leq g+2$ e $d_p \leq d_\ell$. L'esempio ora ottenuto soddisfa però tale restrizione previo scambio delle rette coi punti.

Analogo procedimento applicato alla geometria in precedenza associata ad M_{22} porta ad associare M_{22} ad un (3,4,4)-agone: il (3,4,4)-agone dell'Esempio 3 di [9] è appunto questo.

Non è difficile indicare le contropartite gruppali delle precedenti costruzioni. La cosa può essere vista in via del tutto generale.

Sia $\Gamma=(V,I,t)$ una geometria e G un gruppo di automorfismi speciali di Γ , transitivo sulle camere. Fissiamo una camera C di Γ in ruolo di camera fondamentale, e siano x_1, x_2, \dots, x_n le varietà di C (supponiamo che $\{1, 2, \dots, n\}$ sia l'insieme dei tipi). Sia G_i lo stabilizzatore di x_i in G . Per ogni varietà x , sia g un elemento di G che porta $x_{t(x)}$ in x . Associamo ad x il laterale $gG_{t(x)}$ di $G_{t(x)}$. Resta così definita una biezione tra le varietà di Γ e i laterali sinistri dei sottogruppi G_i ($i = 1, \dots, n$) (Cfr. anche Appendice). Posto

$\bar{G} = \bigcap_{i=1}^n G_i$, alle camere di Γ restano associati i laterali sinistri di \bar{G} . E l'incidenza tra varietà si traduce nel fatto che i corrispondenti laterali abbiano intersezione non vuota. Dalla proposizione 1.4.1 di [26] si ha che:

i) Il sistema dei sottogruppi $\bar{G}_i = \bigcap_{j \neq i} G_j$ genera G .

ii) Per ogni $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, sia $\bar{G}_J = \bigcap_{i \notin J} G_i$ (in particolare: $\bar{G}_\emptyset = \bar{G}$). Per

ogni scelta di $J, J', J'' \subseteq \{1, \dots, n\}$, risulta $(\bar{G}_J, \bar{G}_{J'}) \cap (\bar{G}_J, \bar{G}_{J''}) = \bar{G}_J (\bar{G}_{J'} \cap \bar{G}_{J''})$.

(c.2) Un automorfismo quasi speciale di un complesso di camere magro che fissi una camera è l'automorfismo identico.

Si noti che non tutti gli automorfismi quasi speciali nel senso ora detto sono automorfismi speciali (nel senso fissato per i complessi di Coxeter). Infatti, in un complesso di Coxeter di diametro finito, l'automorfismo *opposto* ϕ^{op} (cfr. [26], Cap. 2) è quasi speciale (perché $\phi^{op}(C) \cap C = \emptyset$ per ogni camera C). Ma non è speciale. Dalla (c.2) si ha così subito che la composizione di due automorfismi quasi speciali non è necessariamente quasi speciale; infatti, sia ancora ϕ^{op} l'automorfismo opposto in un complesso di Coxeter, sia $C' = \phi^{op}(C)$ per qualche camera C , e sia ϕ un automorfismo speciale che porta C' su C . Allora $\phi\phi^{op}$ fissa C , ma non è l'identità, non essendo speciale. Sicché, per (c.2), ϕ^{op} non è nemmeno quasi speciale.

E' presto visto che un automorfismo quasi speciale che porti una camera C in una camera C' adiacente a C fissa la faccia $C \cap C'$, e perciò porta C' in C . Diciamo *riflessioni* gli automorfismi quasi speciali che scambiano due camere adiacenti. E' ovvio che le riflessioni possono essere caratterizzate come quegli automorfismi quasi speciali che fissano una faccia di codimensione 1 (o corango 1, se così si preferisce dire); precisamente: fissano le faccie comuni alle coppie di camere adiacenti che scambiano.

Dalla (c.2) si ha subito che le riflessioni sono involuzioni. Si ha poi:

(c.3) Data una coppia di camere adiacenti C, C' in un complesso di camere magro, c'è al più una riflessione che scambia C e C' .

Siano infatti r ed r' due riflessioni che scambiano C e C' . L'automorfismo $r^{-1}r'$ fissa $C \cap C'$ elemento per elemento. Sicché, fissando C (e C') fissa ogni faccia di C . Sia ora A una faccia del complesso. Proviamo che $r^{-1}r'$ fissa A . La cosa si prova per induzione sulla distanza $d(A, C)$ di A da C . Se $d(A, C) = 0$ la cosa si è già provata. Sia $d(A, C) > 0$ e sia $C = C_0, C_1, \dots, C_m \supseteq A$ una galleria minimale da C ad A . Per ipotesi induttiva, $r^{-1}r'$ fissa tutte le faccie di C_{m-1} , sicché fissa $C_{m-1} \cap C_m$ elemento per elemento, e pertanto fissa C_m e tutte le sue faccie. Sicché fissa A . Ne segue dunque che $r^{-1}r' = 1$. Sic-

