CAPITOLO 7
GEOMETRIE DI TITS-BUEKENHOUT
(GEOMETRIE PURE)

L'esempio portato nel Cap. 5 per mostrare che il diagramma di base del residuo Γ_F di una bandiera F di una geometria Γ non è necessariamente il grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ sul cotipo di F, mostra un'altra patologia, che la Proprietà d'Intersezione (IP.2) non basta ad escludere (infatti la (IP.2) vale su tale esempio): può capitare cioè che, dati due tipi i e j, il residuo di una bandiera di cotipo $\{i,j\}$ sia talvolta un digono generalizzato, talaltra no. Dirò *miste* le geometrie che presentano questo comportamento patologico. Si tratta di eccezioni fastidiose nella teoria, benché affatto innocue nella pratica. Innocue perché implicitamente escluse dalle usuali convenzioni adottate nella scrittura di diagrammi.

Nota - Va da sé che si potrebbero modificare dette convenzioni sì da poter disegnare diagrammi anche per geometrie miste. Ma dubito che la cosa possa avere un qualche interesse. L'esempio 1) del Cap. 5 mostra invece che vi possono essere geometrie non miste, nel senso ora definito, e tuttavia 'relativamente miste' rispetto ad un dato sistema di marche per diagrammi speciali (nell'esempio 1: marche per i diagrammi di Coxeter). Ignoro cosa di interessante possa dirsi in generale su questi fatti.

Limitiamoci ora alla considerazione di geometrie strettamente lineari.

Una geometria strettamente lineare è detta *pura* se non è mista; equivalentemente se appartiene al diagramma speciale ottenuto marcando con π i lati del suo diagramma di base (cfr. (gd.5), Cap. 6). Equivalentemente: una geometria strettamente lineare Γ è pura sse per ogni bandiera F il diagramma di base di Γ_F è il grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ sul cotipo di F.

Nota - La definizione di geometria pura non avrebbe alcuna necessità, per essere data, dell'assunzione che le geometrie considerate siano strettamente lineari. Tale assunzione è però indispensabile per ottenere i risultati seguenti. Noto ancora che nel caso di geometrie pure, possiamo considerare il diagramma di base come caso limite di diagramma speciale: quello ottenuto con le due marche (ora le più generali, per (gd.5)): $\underset{i}{\circ}\overset{\pi}{\text{——}}\underset{j}{\circ}$ e $\underset{i}{\circ}\quad\underset{j}{\circ}$.

Sono note varie caratterizzazioni per le geometrie pure. Ne cito qui due, abbastanza semplici.

Rimando all'esempio 1 del Cap. 5 o a [8] per la definizione di insieme i-*ridotto* di vertici di un grafo $\mathcal{G}$, ove i è un vertice di $\mathcal{G}$, e per il senso della locuzione X *separa* Y da i (in $\mathcal{G}$). Si ha:

(gd.15) Una geometria strettamente lineare Γ è pura se e solo se, per ogni tipo i le bandiere i-ridotte in Γ sono quelle di tipo i-ridotto in $\Delta(\Gamma)$.

(Lascio la dimostrazione a chi legge: è facile). La (gd.15) facilita molto il compito di trovare le bandiere i-ridotte: infatti rintracciare in $\Delta(\Gamma)$ gli insiemi i-ridotti è cosa di nessuna difficoltà.

L'importanza di poter classificare le bandiere i-ridotte è evidente dalla (gd.7) del Cap. 6: le bandiere i-ridotte corrispondono biunivocamente alle i-ombre. E il sistema delle i-ombre dice l'aspetto che assume la geometria quando la si voglia vedere come sistema di punti, rette, sottospazi,... assumendo le i-varietà come punti.

(gd.16) Una geometria strettamente lineare $\Gamma = (V,I,t)$ è pura se e solo se per nessuna coppia di tipi distinti i e j congiunti in $\Delta(\Gamma)$ esistono mai quattro distinte varietà x,x',y,y' con $t(x) = t(x') = i$ e $t(y) = t(y') = j$ e $xIyIx'Iy'Ix$.

(Cfr. L'enunciato della (gd.13)). La (gd.16) discende immediatamente dal num.9.11 di [8]. Può anche ottenersi come corollario dal seguente teorema:

(gd.17) Sia $\Gamma = (V,I,t)$ una geometria pura. Per ogni tipo i e per ogni scelta delle bandiere F e G con F i-ridotta, risulta $\sigma_i(F) \subseteq \sigma_i(G)$ se e solo se FIG e t(F) separa t(G) da i in $\Delta(\Gamma)$.

(Rimando a [8]).

Osservo intanto che la (gd.17) implica che le bandiere i-ridotte sono quelle di tipo i-ridotto. Sicché, per (gd.15), possiamo anche caratterizzare le geometrie pure come quelle geometrie strettamente lineari su cui vale l'asserto della (gd.17).

L'utilità della (gd.17) è evidente: le separazioni su $\Delta(\Gamma)$ sono facili a vedersi. E' possiamo ricostruire senza difficoltà il sistema delle i-ombre (inclusioni comprese) dal sistema delle bandiere i-ridotte. Possiamo anche definire una funzione di tipo sul sistema delle i-ombre (Cfr. anche Cap. 5, esempio 1), assegnando alla i-ombra X come tipo la cardinalità della componente connessa di i nel grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ sul cotipo della bandiera i-ridotta F di i-ombra X. Si assegna ad X il tipo 0 se $i \in t(F)$). Si ha allora che, definita mediante l'inclusione un'incidenza sul sistema delle i-ombre:

(gd.18) Il sistema delle i-ombre di una geometria pura e irriducibile Γ di rango n è una geometria pura di digramma:

$$\underset{0}{\circ}\overset{\pi}{\text{———}}\underset{1}{\circ}\overset{\pi}{\text{———}}\underset{2}{\circ}\text{—}\cdots\text{—}\underset{n-2}{\circ}\overset{\pi}{\text{———}}\underset{n-1}{\circ}$$

(Rimando a [22] per la dimostrazione). Nei casi concreti diviene un banale esercizio (usando la (gd.17)) specificare meglio le marche da segnare sui lati del diagramma della geometria delle i-ombre di Γ, note quelle sui lati del diagramma di Γ. Si sono già visti vari esempi di questo metodo: la costruzione di $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ e $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ da $\mathcal{G}$ (parte iniziale del Cap. 4), le costruzioni date nell'esempio 1 del Cap. 6. In alcuni casi, ma forse non in tutti è anche possibile ricostruire univocamente la geometria dello spazio delle due i-ombre (si veda ancora, per ciò; l'Esempio 1 del Cap. 5, e l'isomorfismo $\mathcal{G}(\mathcal{B}(\mathcal{G})) \cong \mathcal{G}$ (Cap. 4)).

In definitiva possiamo associare ad una geometria pura irriducibile Γ di rango n una n-pla di geometrie pure di rango n con diagramma di base lineare (abbiamo tante geometrie siffatte quanti sono i sistemi di i-ombre, e dunque tante quanti i tipi di Γ).

L'ipotesi che Γ sia irriducibile, nella (gd.18) si spiega col fatto che, se Γ fosse riducibile, lo spazio delle sue i-ombre coinciderebbe con quello della geometria $\Gamma^{D(i)}$ ove $D(i)$ è la componente connessa di i in $\Delta(\Gamma)$. Questo peraltro, è ancora una geometria pura; sicché il risultato della (gd.18) vale su di essa (per una condizione sufficiente su $D \subseteq \Delta(\Gamma)$ affinché Γ^D sia una geometria pura e abbia come diagramma di base il grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ su D, rimando ancora a [22].Cfr. anche più avanti, Cap 7).

Termino con:

(gd.19) Una geometria strettamente lineare è pura se il suo diagramma di base non contiene 3-cicli.

(Rimando per la dimostrazione a [21]).