

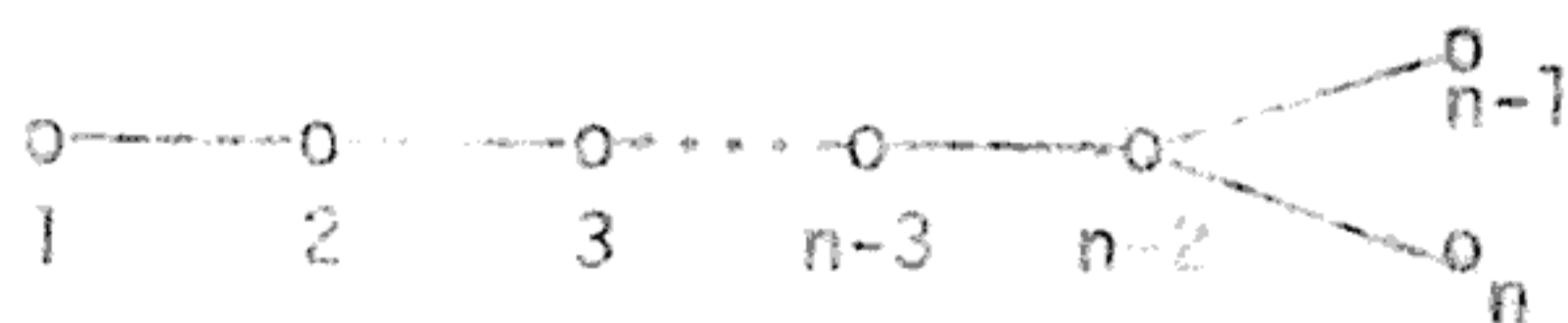
CAPITOLO 4

GENERALIZZAZIONI DEL CONCETTO DI EDIFICIO

Gli autori risultano nei capitoli I, se mostrano la profondità della teoria delle BN. ... anche i limiti in estensione: si direbbe che non ... applicare la teoria a cose troppo distanti dai gruppi di Chevalley. E' dunque ragionevole studiare qualche indebolimento del concetto di edificio.

L'idea più ovvia è di lasciare cadere la richiesta che i complessi da considerare siano grassi. Intanto tale ipotesi raramente interviene in modo diretto nelle precedenti costruzioni e dimostrazioni. Interviene principalmente nella costruzione di $\Gamma_{B,N}^{con}$. Ma la si può evitare sostituendo $\Gamma_{B,N}^{con}$ con $\Gamma_{B,N}^{lat}$. Interviene bensì indirettamente, quasi ovunque, tramite la (b.2) del Cap. 1. Ma potremmo sempre assumere la (b.2) come assioma.

Ma, soprattutto, vi sono geometrie riemanniane in tutto simili ad edifici, salvo che non sono grassi. Si è già visto un esempio: lo spazio polare \mathcal{Q}_ϕ di una forma bilineare simmetrica ϕ di indice n su uno spazio vettoriale di dimensione $2n$ su un campo di caratteristica $\neq 2$ o $\neq n$ e di più. La classe degli spazi polari finiti non degeneri di rango ≥ 3 è strettamente legata alla classe degli edifici di tipo (D'_n) . Si è già visto che un complesso orifiamma $\mathcal{O}(\mathcal{Q})$ di uno spazio polare finito non degenero \mathcal{Q} di rango ≥ 3 è un edificio di tipo (D'_n) . Ma la costruzione può invertirsi. Sia dato un edificio \mathcal{O} di diagramma (D_n) . Assumiamo di avere numerato da 1 a n i vertici del diagramma, come in figura:



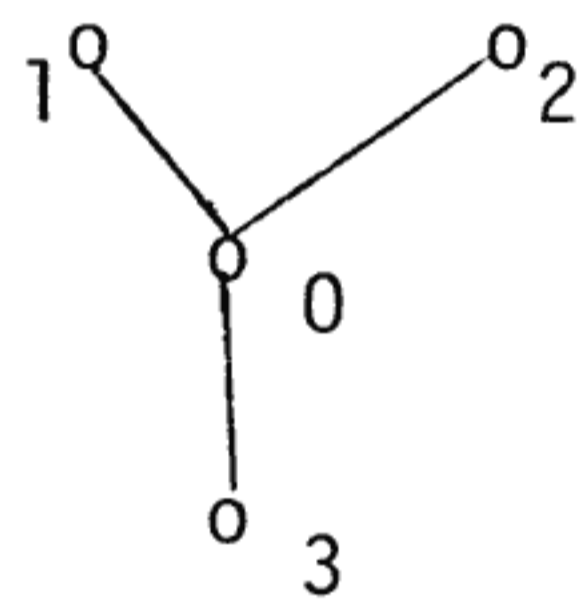
Mutiamo l'attribuzione dei tipi e assegnamo n come nuovo tipo alle varietà già di tipo n od $n-1$. Manca di assegnare un tipo alle altre varietà. Introduciamo poi come nuove varietà $\{n, n-1\}$ e $\{n, n-1, n-2\}$ e le addiere di tipo $\{n, n-1\}$ in \mathcal{O} . È similato come l'incidenza tra varietà di tipo \mathcal{O} (intesa come incidenza tra bande e varietà, quando occorre). Assumiamo che nella ripartimenti il risultato di

questa costruzione sugli appartamenti di \mathcal{O} . Otteniamo un complesso di camere $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, strutturato in appartamenti. Valgono le (B.2)-(B.4) su $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, ma non la (B.1). Per di più, gli appartamenti di $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ sono complessi di Coxeter nel diagramma (C_n) (con l'usuale numerazione di vertici). Di fatto: $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ è (isomorfo a) uno spazio polare fine (non degenerare perché \mathcal{O} è grasso). Vedremo ciò più avanti. E' poi immediato verificare che:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) &\cong \mathcal{O} && \text{per ogni edificio } \mathcal{O} \text{ di tipo } (D_n). \\ \mathfrak{A}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})) &\cong \mathfrak{A} && \text{per ogni spazio polare fine (non degenerare) } \mathfrak{A} \text{ di} \\ &&& \text{rango } \geq 3. \end{aligned}$$

(Nota che per dare queste costruzioni e per stabilire questi isomorfismi non c'è bisogno di sfruttare il fatto che \mathcal{O} è grasso e \mathfrak{A} è non degenerare).

V'è un altro esempio simile. Sia \mathcal{O} un edificio di tipo (D_4) , e numeriamo i vertici del diagramma come in figura:



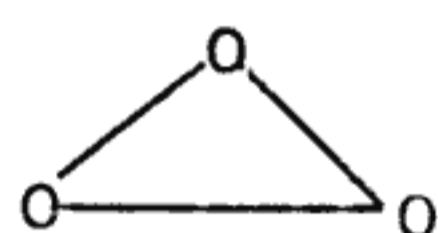
Mutiamo l'attribuzione dei tipi, assegnando alle varietà di \mathcal{O} di tipo $i > 0$ come nuovo tipo 3. Manteniamo il tipo 0 alle varietà di tipo 0. Introduciamo due nuove classi di varietà: le bandiere di \mathcal{O} di tipo $\{i,j\}$ per $1 \leq i < j \leq 3$, cui attribuiamo il tipo 2, e le bandiere di \mathcal{O} di tipo $\{1,2,3\}$, cui assegnamo 1 come tipo. Assumiamo come incidenza la vecchia incidenza di \mathcal{O} (ma solo tra facce o varietà corrispondenti a nuove varietà di tipi distinti). Assumiamo come nuovi appartamenti il risultato di questa costruzione sugli appartamenti di \mathcal{O} . Otteniamo un nuovo complesso $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ strutturato in appartamenti, cui manca solo la grassezza per essere un edificio. Gli appartamenti di $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ sono complessi di Coxeter nel diagramma (F_4) :



Potremo allora definire un *edificio debole* (cfr. [26], Cap. III) come struttura $\Gamma = (K, \mathcal{U})$, ove K è un complesso di camere e \mathcal{U} una famiglia di sottocomplessi di K , detti *appartamenti*, tale che valgano le (B.2)-(B.4).

Vi sono però difficoltà. Non è facile sviluppare molta teoria su questa definizione. Tutto quanto v'è di struttura in Γ è concentrato nel sistema degli appartamenti. Ma le (B.2)-(B.4) da sole non implicano che gli appartamenti siano complessi di Coxeter. Sicché sulla loro struttura sappiamo solo che sono complessi di camere magri. E ciò è troppo poco. Per esempio, vorremmo ancora poter definire il diagramma di Γ , e dovremmo poterlo ricostruire dagli appartamenti, esaminando in essi i residui di bandiere cui manchino due varietà per essere camere, come per i complessi di Coxeter. E potremmo ora pretendere che il diagramma a sua volta individuasse gli appartamenti a meno di isomorfismi (*). Il che comporterebbe che, ogni qual volta si abbiano diagrammi associabili a complessi di Coxeter, gli appartamenti siano appunto complessi di Coxeter. Il ché, caduta la (B.1), non accade. Il controesempio è banale. Ogni complesso di camere magro, strutturato con sé stesso come unico appartamento, è un edificio debole nel senso ora definito. Ma in uno stesso diagramma di Coxeter vi possono essere molti complessi di camere magri che non sono di Coxeter, e ciò basta.

Come esempio, consideriamo il diagramma:



Sappiamo dalla classificazione dei complessi di Coxeter finiti che il complesso di Coxeter in questo diagramma è infinito. Vi sono tuttavia complessi di camere magri finiti che producono questo diagramma. Basta considerare una triangolazione T di un toro o di una bottiglia di Klein tale che per ogni vertice di T escano esattamente 6 triangoli e i triangoli di T siano colorabili in bianco e in nero in modo che triangoli adiacenti abbiano colori opposti. Scegliamo allora i vertici di T come varietà di tipo 0, i triangoli bianchi come varietà di tipo 1 e quelli neri come varietà di tipo 2. Definiamo poi una incidenza tra

(*) Ammetto però che si tratta di una richiesta molto esigente, forse più del dovuto.

tali varietà stabilendo che un vertice e un triangolo siano incidenti se sono incidenti nel senso solito, e che due triangoli si dicano incidenti se sono adiacenti. E' presto visto che si ottiene così un complesso di camere magro, e che il residuo di ogni varietà è un triangolo. Come appunto volevamo. A titolo di notizia: si possono costruire triangolazioni T , verificanti le ipotesi date, con 7,8,9,10,12 vertici, e anche N vertici, per ogni N della forma UV con $u, v \geq 3$, e forse per ogni N . In definitiva, siamo condotti alla seguente definizione:

Un *edificio generalizzato* è una struttura $\Gamma = (K, \mathcal{U})$ ove K è un complesso di camere e \mathcal{U} una famiglia di sottocomplessi di K , detti *appartamenti*, tale che: gli appartamenti sono complessi di Coxeter, e valgono le condizioni (B.3) e (B.4) del Cap. I.

Nota - Gli edifici deboli detti qui sopra "generalizzati" non ricevono in [26] alcuna denominazione particolare che li evidenzia tra gli altri edifici deboli. Nell'articolo di Tits [28] vengono invece chiamati addirittura edifici; e con buone ragioni, perché c'è poco della teoria degli edifici che non si estenda agli edifici deboli qui sopra detti edifici generalizzati. La terminologia che qui adottato è solo una banale via di mezzo tra queste due opzioni.

Più o meno tutto di quanto sin qui detto sugli edifici resta valido per gli edifici generalizzati. In particolare restano valide le (b.1)-(b.6) (la (b.2) divenendo parte della definizione). Possiamo parlare di diagramma, funzioni di tipo, automorfismi speciali. Sia poi dato un gruppo G di automorfismi speciali di un edificio generalizzato, transitivo sull'insieme delle coordinatizzazioni. Possiamo scegliere una coordinatizzazione (C, Σ) , e considerarne la coppia stabilizzatrice (B, N) . Come nel primo esempio del Cap. I, possiamo dimostrare che valgono su (B, N) le condizioni (BN.1), (BN.2), (bn.1) e (BN.3.a). Ciò suggerisce di definire una *BN-coppia generalizzata* come una coppia (B, N) di sottogruppi di un gruppo G , tale che: $\langle B, N \rangle = G$, posto $T = B \cap N$ è $T \triangleleft N$ e posto, $W = N/T$, il gruppo W è un gruppo di Coxeter e, detto R un sistema di riflessioni per W , vale la condizione (BN.3.a).

Tutto quanto detto sui nessi tra edifici e BN-coppie si trasporta ad edifici generalizzati e BN-coppie generalizzate, salvo rinunciare alla costruzione

$\Gamma_{B,N}^{con.}$, sostituendola con $\Gamma_{B,N}^{lat.}$. Dato però un edificio generalizzato coordinatizzato (Γ, Σ, C) , e un gruppo G che agisca su Γ come gruppo di automorfismi speciali transitivo sull'insieme delle coordinatizzazioni di Γ , e indicata con (B, N) la BN-coppia generalizzata stabilizzatrice di (C, Σ) , non possiamo esibire l'isomorfismo tra (Σ, Γ, C) e $(\Gamma_{B,N}^{lat.}, \Sigma_0^{lat.}, B)$ considerando gli stabilizzatori in G di faccie di Γ . La costruzione dell'isomorfismo è più indiretta, mediata dal complesso di Coxeter $K(W)$ di W . Come nell'esempio 1 del Cap. 1, si mostra che $\Sigma \cong K(W)$. Come nel Cap. 2, si mostra che $\Sigma_0^{lat.} \cong K(W)$. In tali isomorfismi, il semplice delle faccie di Σ incluse in C (brevemente: delle faccie di C) corrisponde al semplice costituito dai sottogruppi di W del tipo $W_J (J \subseteq R)$ (ovvero: al semplice delle faccie della camera 1 di $K(W)$), e questo corrisponde al semplice dei parabolici fondamentali (ovvero: al semplice delle faccie della camera B di $\Sigma_0^{lat.}$). Con ciò, è poi facile costruire l'isomorfismo desiderato, estendendo la corrispondenza contemporaneamente su $\Gamma_{B,N}^{lat.}$ per moltiplicazione a sinistra e su Γ mediante l'azione di G . Tralascio i dettagli, ormai facili. Qui mi limito ad osservare come questa costruzione poggia in modo essenziale sul gruppo di Weyl W , e quindi sul fatto che gli appartamenti (ci sono e) possono prodursi come complessi su opportuni gruppi (qui, di Coxeter).

Ignoro se il termine "BN-coppia generalizzata" ora introdotto sia reperibile nella letteratura. Ad ogni modo, qui torna comodo. Do alcuni esempi di BN-coppie generalizzate.

Intanto, un esempio banale: sia G estensione di un sottogruppo normale B mediante un gruppo di Coxeter W . E sia N un qualunque sottogruppo di G tale che $N/(B \cap N) \cong W$. Allora (B, N) dà una BN-coppia generalizzata che non è una BN-coppia. La saturazione di (B, N) è (B, G) . Tale esempio è meno artificiale di quel che sembri. Sia infatti (B, N) una BN-coppia di diagramma (A_n) , in un gruppo G . Vedremo più oltre che $\Gamma_{B,N}^{lat.}$ è una geometria proiettiva, eventualmente degenera. E siccome G è transitivo sull'insieme delle camere di $\Gamma_{B,N}^{lat.}$, allora $\Gamma_{B,N}^{lat.}$ o è una geometria proiettiva ordinaria o è la geometria proiettiva discreta. Nel

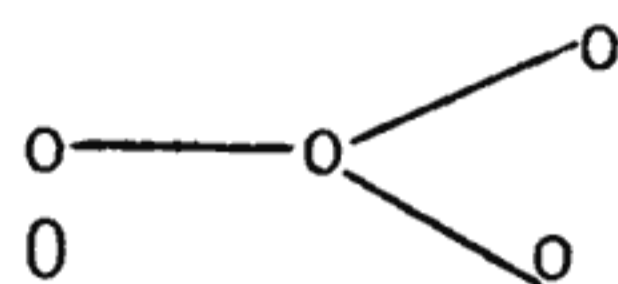
primo caso, $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ è grasso, sicché (B,N) è una BN-coppia. Nel secondo caso è $B \triangleleft G$, e G/B è il gruppo di Coxeter di diagramma (A_n) .

Sia invece data in un gruppo G una BN-coppia generalizzata (B,N) di diagramma (C_n) . Allora, come vedremo nel seguito, $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ è uno spazio polare. E per la transitività di G sull'insieme delle camere di $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$, una delle seguenti condizioni vale su $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$:

- 1) E' lo spazio polare magro.
- 2) E' uno spazio polare grasso.
- 3) E' uno spazio polare fine non degenerare.
- 4) I sottospazi massimali individuano geometrie proiettive discrete, ma da ogni sottospazio di codimensione 1 escono più di due sottospazi massimali.

Nel primo caso è $B \triangleleft G$, e G/B è il gruppo di Coxeter di diagramma (C_n) . Nel secondo caso (B,N) è addirittura una BN-coppia. Passiamo al terzo caso. Se $n=2$, è difficile dire in generale qualcosa su (B,N) . Supponiamo ora $n \geq 3$. La corrispondenza tra spazi polari fini non degeneri ed edifici di diagramma (D_n) mostra che $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}} = \mathcal{L}(\mathcal{O})$ per un opportuno edificio \mathcal{O} di diagramma (D_n) . E' poi presto visto che ogni automorfismo di \mathcal{O} induce sul diagramma di \mathcal{O} un automorfismo, di modo che il gruppo \bar{G} di tutti gli automorfismi di \mathcal{O} può rappresentarsi sul diagramma come un sottogruppo del gruppo G_{dg} degli automorfismi del diagramma. Il nucleo di tale rappresentazione è il gruppo G_{sp} degli automorfismi speciali di \mathcal{O} , che ovviamente è normale in \bar{G} . Usando i risultati del Cap. IV di [26] si può provare, con un po' di pazienza, che \bar{G} induce sul diagramma il gruppo G_{dg} . Sicché \bar{G} è estensione di G_{sp} mediante G_{dg} . Supponiamo ora $n \neq 4$. In tal caso G_{dg} ha ordine 2. E' poi presto visto che \bar{G} restituisce su $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ il gruppo di tutti gli automorfismi (ora necessariamente speciali, perché (C_n) non ha automorfismi propri), e che \bar{G} è transitivo sull'insieme delle coordinatizzazioni di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$. La stabilizzatrice in \bar{G} di una coordinatizzazione di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ è una BN-coppia generalizzata, che non è una BN-coppia perché $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ non è grasso. La BN-coppia generalizzata di partenza (B,N) dovrà essere rappre-

sentabile su una sotto-BN-coppia (generalizzata) opportuna di una di quelle ora individuate in \bar{G} . Nel caso di $n=4$, invece, G_{dg} è il gruppo simmetrico S_3 . Mettiamo allora in evidenza un vertice esterno del diagramma (D_4) , marcandolo con 0 come in figura:



con l'intesa che nella costruzione di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ le varietà di tipo 0 saranno poste in ruolo di punti. Sia G_0 lo stabilizzatore di 0 in G_{dg} , e consideriamo l'estensione \bar{G}_0 di G_{sp} mediante G_0 . Il gruppo \bar{G}_0 restituisce su $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ il gruppo di tutti gli automorfismi. E ora tutto è come prima. E' utile confrontare queste costruzioni con concetti più consueti, nel caso di $n=3$. Siccome (D_3) è lo stesso che (A_3) , l'edificio \mathcal{O} è ora una geometria proiettiva non degenera di dimensione 3 (anche ciò risulterà da quanto dirò più avanti). Lo spazio polare $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ si ottiene prendendo come nuovi piani le reti di rette di \mathcal{O} su un piano di \mathcal{O} e le stelle di rette di \mathcal{O} per un punto di \mathcal{O} (ovvero: i punti e i piani di \mathcal{O} sono i piani di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$), come rette di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ i fasci di rette di \mathcal{O} su un piano di \mathcal{O} per un suo punto (ovvero: le rette di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ sono le coppie costituite da un piano di \mathcal{O} e da un punto di \mathcal{O} incidenti), e come punti di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ le rette di \mathcal{O} . Si vede facilmente che gli appartamenti di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ corrispondono ai tetraedri di \mathcal{O} . Il gruppo \bar{G} di tutti gli automorfismi di \mathcal{O} (ovvero: il gruppo degli automorfismi di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$) è il gruppo costituito da tutte le collineazioni e tutte le 'polarità' di \mathcal{O} (intendo ora polarità come collineazione da \mathcal{O} al suo duale). Da ora pochi cenni sul caso in cui $n \geq 4$. In tal caso dal num. 8.4.3 di [26] si ha che $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ può pensarsi come lo spazio polare \mathcal{L}_ϕ di una forma bilineare simmetrica non degenera ϕ di indice di Witt n in uno spazio vettoriale V di dimensione $2n$. Mi limito a notare che il gruppo delle collineazioni di V_∞ che conservano l'ortogonalità \perp_ϕ non è transitivo sull'insieme delle coordinatizzazioni di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$. Infatti possiamo sempre prendere una opportuna base u_1, \dots, u_{2n} di V in modo da portare la matrice di ϕ nella forma:

edifici, di diagramma (A_n) e (C_n) rispettivamente. Gli edifici di diagramma (D_n) sono i complessi orifiamma di spazi polari fini non degeneri di rango n .

Che gli spazi proiettivi siano edifici generalizzati di diagramma (A_n) si è già visto, in sostanza, nell'esempio 1 del Cap.1: lo studio ivi svolto su V_∞ è infatti facilmente generalizzabile a geometrie proiettive arbitrarie, anche degeneri (purché di dimensione finita). Che gli spazi polari diano luogo ad edifici generalizzati di diagramma (C_n) si è già visto nell'esempio 2 del Cap. 1. Rimando ai Cap. VI e VII di [26] per una dimostrazione del fatto che gli edifici di diagramma (A_n) e (C_n) sono geometrie proiettive e spazi polari, rispettivamente. Riporterò più oltre una versione leggermente diversa di tale dimostrazione. In ogni caso, supposto di avere numerati i tipi da 0 ad $n-1$ in modo naturale, da sinistra a destra nel diagramma, si assumeranno le varietà di tipo d come sottospazi d -dimensionali, e si identificheranno con gli insiemi delle varietà di tipo 0 (punti) ad esse incidenti. La parte della (b.10) che riguarda (D_n) si è praticamente già vista nell'inizio di questo capitolo (non v'era alcun bisogno della grassezza, infatti). La parte della (b.10) che riguarda edifici e casi non degeneri è ovvia.

Rimando al num. 10.13 di [26] e all'articolo di A.M.Cohen [11] per gli edifici generalizzati di diagramma (F_4) . Non mi è nota una caratterizzazione elementare per gli edifici generalizzati nei diagrammi $(E_6), (E_7), (E_8)$ ed $(H_3), (H_4)$, ove si intende elementare' una caratterizzazione che faccia riferimento solo a classiche proprietà di incidenza su punti, sottospazi, ... o a costruzioni esprimibili in questo linguaggio, senza dover fare riferimento a diagrammi e, tantomeno, ad appartamenti. Per una caratterizzazione parzialmente elementare degli edifici generalizzati nei diagrammi $(E_6), (E_7)$ ed (E_8) rimando alla parte finale dell'articolo di Tits [28], citato poco più sopra. In tale articolo si forniscono anche caratterizzazioni simili per gli edifici generalizzati negli altri diagrammi di tipo sferico, ad eccezione dei diagrammi (H_3) ed (H_4) , che anche per questo aspetto si rivelano dunque eccezionali (cfr. (b.7) del Cap. III). Sugli edifici generalizzati nei diagrammi $(E_6), (E_7)$ ed (E_8)

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

(0_n ed I_n sono le matrici nulla ed identica, $n \times n$). Poniamo poi $v_i = u_i$ per $i \neq n+1, 2n$; e $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ e $v_{2n} = u_{2n} + u_1$. Le sequenze (u_1, \dots, u_{2n}) e (v_1, \dots, v_{2n}) individuano le armature di due appartamenti Σ e Σ' di \mathbb{P}_ϕ , contenenti entrambi la camera $C = \{ \langle u_1 \rangle, \langle u_1, u_2 \rangle, \dots, \langle u_1, \dots, u_n \rangle \}$. Non v'è alcuna collineazione di V_∞ che porti Σ in Σ' tenendo fissa C e conservando l'ortogonalità (ciò si vede con un po' di calcoli).

Tralascio di discutere il quarto caso. Vediamo piuttosto un altro esempio.

Sia \mathcal{O} un edificio di tipo (D_4) , e \bar{G} il gruppo dei suoi automorfismi. Dalla costruzione dell'edificio generalizzato $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ si vede facilmente che \bar{G} dà un gruppo di automorfismi speciali di $\mathcal{M}(\mathcal{O})$, transitivo sulle coordinatizzazioni di $\mathcal{M}(\mathcal{O})$. La stabilizzatrice di una tale coordinatizzazione dà in \bar{G} una BN-coppia generalizzata di diagramma (F_4) , che non è una BN-coppia perché $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ non è grasso.

Gli esempi precedenti non autorizzano certo conclusioni. Resta comunque l'impressione che le BN-coppie generalizzate, quando non siano banali, siano in qualche modo imparentate ad edifici; quindi non ci saremmo allontanati molto dalle BN-coppie. Pur con tutte le dovute cautele, analoga impressione può trarsi dai seguenti risultati.

Come ho fatto finora, col termine *geometria proiettiva* (o spazio proiettivo) mi riferisco anche alle geometrie proiettive degeneri (in cui cioè vi sono rette con due soli punti). Si ha:

(b.10) Gli edifici generalizzati di diagramma (A_n) sono le geometrie proiettive di dimensione n . Gli edifici generalizzati di diagramma (C_n) sono gli spazi polari di rango n . Gli edifici generalizzati di diagramma (D_n) sono i complessi orifiamma di spazi polari fini di rango n . Le geometrie proiettive non degeneri e gli spazi polari grassi corrispondono agli

tornerò più oltre. Qui voglio invece fare notare come, nel caso degli edifici, la forma dei diagrammi (E_6) , (E_7) , (E_8) e (D_n) (quando $n \geq 4$) racchiuda un'informazione insospettatamente ricca; essenzialmente per la presenza nel diagramma di un vertice da cui escono tre lati. Illustrerò qui il succo della questione. Occorrono però alcune definizioni preliminari.

Intanto è ovvio cosa si intenderà per *residuo* di una faccia F in un complesso di camere K ; generalizzando quanto stabilito su complessi di Coxeter, diremo residuo di F in K la stella delle faccie di K contenenti F . Nel caso che K sia un complesso di bandiere (in particolare: se K sostiene un edificio generalizzato di rango finito) possiamo identificare il residuo di F con il sistema delle varietà incidenti ad F e non appartenenti ad F , munito della relazione di incidenza indotta su esso dall'incidenza definita su K . Indicheremo il residuo di F con $St_K(F)$ (oppure con $R_K(F)$ o anche con K_F ; usando di preferenza queste ultime due notazioni quando, sempre che sia possibile, vogliamo vedere il residuo di F come sistema di varietà). Si ha che:

(b.11) Il residuo di una faccia F in un edificio generalizzato $\Gamma = (K, \mathcal{U})$ sostiene un edificio generalizzato $\Gamma_F = (St_K(F), \mathcal{U}_F)$ ove è $\mathcal{U}_F = \{St_\Sigma(F) \mid \Sigma \in \mathcal{U} \text{ e } F \in \Sigma\}$. Data una funzione di tipo τ su Γ , il diagramma di Γ_F si ottiene dal diagramma $D(\Gamma)$ di Γ cancellando i vertici in $\tau(F)$. Le funzioni di tipo di Γ_F sono le restrizioni a Γ_F delle funzioni di tipo di Γ .

(Rimando per la dimostrazione al cap. III di [26]). La (b.11) ha importanza notevole. Su di essa si appoggia ogni argomentazione per induzione sul rango quando si abbia a che fare con edifici generalizzati di rango finito).

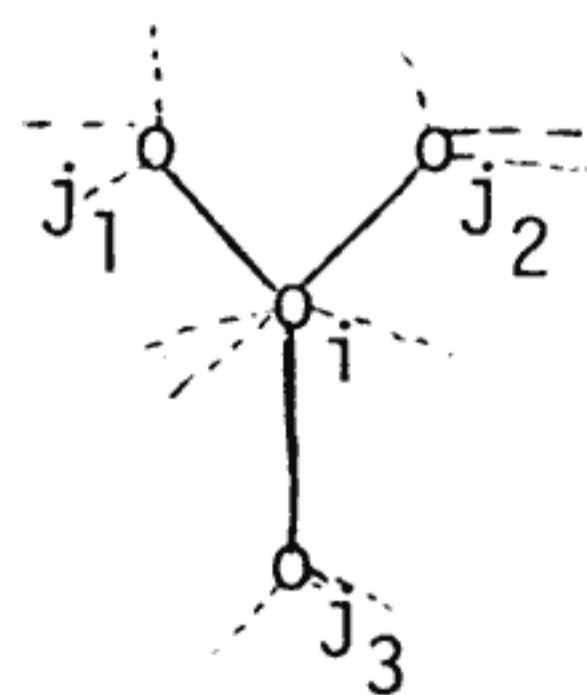
Ciò premesso, dalle (b.10) e (b.11) si ha subito che, se i e j sono congiunti in $D(\Gamma)$ da un lato semplice, il residuo di una faccia F di cotipo $\{i, j\}$ è un piano proiettivo (non degenerare se Γ è un edificio). E dati tre vertici i, j, k in $D(\Gamma)$ tali che i e j e k siano congiunti da lati semplici in $D(\Gamma)$, ma i e k non siano congiunti da alcun lato in $D(\Gamma)$, il residuo di una bandiera F di cotipo $\{i, j, k\}$ è (sempre per (b.10) a (b.11)) uno spazio proiettivo 3-dimensionale (desarguesiano se Γ è un edificio).

Assumiamo ora che Γ sia un edificio di rango finito $n \geq 3$, irriducibile, e tale che tutti i lati di $D(\Gamma)$ siano semplici e non vi siano 3-cicli in $D(\Gamma)$ (come appunto accade per i diagrammi $(E_6), (E_7), (E_8), (D_n)$ ed (A_n)). [curiosamente questa ipotesi compare altrove : cfr. (gd.19) del cap. 7].

Per ogni scelta dei tipi i, j congiunti in $D(\Gamma)$, per ogni bandiera F di tipo $\{i, j\}$, Γ_F è un piano proiettivo desarguesiano. Infatti, sia k un tipo $\neq i, j$ e congiunto ad i o a j in $D(\Gamma)$. Un tal k esiste perché $n \geq 3$ e $D(\Gamma)$ è irriducibile. Inoltre k è congiunto ad uno solo dei due tipi i e j , perché $D(\Gamma)$ non contiene 3-cicli. Poniamo che k sia congiunto a j . Allora non è congiunto ad i , perché $D(\Gamma)$ non contiene 3-cicli. Sicché, se x è la varietà in F di tipo k , $\Gamma_{F-\{x\}}$ è uno spazio proiettivo 3-dimensionale, non degenere (e perciò desarguesiano) perché Γ è un edificio. Ma Γ_F è un piano di tale spazio. Sicché Γ_F è desarguesiano. Indichiamo ora con K_{ij}^F il corpo che coordinatizza Γ_F , quando si pongano le varietà di tipo i in ruolo di punti. Proviamo ora che il corpo K_{ij}^F non dipende da F , ma solo da i e j . La cosa si prova per induzione su n . Se $n = 3$ è ovvia, perché le ipotesi assunte su $D(\Gamma)$ mostrano che è, in tal caso, $D(\Gamma) = (A_3)$. Sia dunque $n > 3$. Sia k un tipo distinto da i e j e congiunto in $D(\Gamma)$ ad i o j . Supponiamo che k sia congiunto a j (e quindi non ad i). Siano F ed F' due bandiere di tipo $\{i, j\}$, e siano x, x' le varietà di tipo k in F ed F' , rispettivamente. Con lo stesso ragionamento impiegato per ricavare la (p.5) del Cap. 1, si prova che esiste una sequenza $x = x_0, y_0, x_1, \dots, x_{m-1}, y_m, x_m = x'$ di varietà, di tipo k ed h alternativamente, ciascuna incidente alla successiva. Per ogni $t = 0, 1, \dots, m-1$, scegliamo due bandiere G_t e \bar{G}_t di cotipo $\{h, k, i, j\}$, incidenti alle bandiere $\{x_t, y_t\}$ e $\{y_t, x_{t+1}\}$, rispettivamente, e scegliamo una bandiera G_m di cotipo $\{h, k, i, j\}$ incidente a $\{y_m, x_m\}$. Poniamo poi $F_t = G_t \cup \{x_t, y_t\}$ ed $\bar{F}_t = \bar{G}_t \cup \{y_t, x_{t+1}\}$. Per quanto visto sopra, passando al residuo di $G_t \cup \{y_t\}$ si ottiene che è $K_{ij}^{\bar{F}_t} = K_{ij}^{\bar{F}_t}$. Passando al residuo di x_t e applicando l'ipotesi induttiva se $D(\Gamma) - \{k\}$ è connesso, altrimenti applicando la (b.6) del Cap. III, si ha che $K_{ij}^F = K_{ij}^{F_0}$, $K_{ij}^{\bar{F}_t} = K_{ij}^{F_{t+1}}$ e $K_{ij}^{F_m} = K_{ij}^{F'}$. In definitiva: $K_{ij}^F = K_{ij}^{F'}$.
 Scriveremo dunque K_{ij} anziché K_{ij}^F .

Nota - Ho riportato tutto il ragionamento per esteso, in quanto mostra uno stile di argomentazione che diviene assai frequente quando si passi dalla teoria degli edifici alle geometrie di Buekenhout (o di Tits-Buekenhout, o di Tits, come sono talvolta chiamate).

E' ora immediato verificare che, ferme le ipotesi precedenti, dati tre tipi i, j, k in $D(\Gamma)$, con i congiunto a j e j congiunto a k , risulta $K_{ij} = K_{jk}$. Ora, se per ogni vertice di $D(\Gamma)$ escono al più due lati, nelle ipotesi assunte risulta $D(\Gamma) = (A_n)$ (ed allora r è una geometria-proiettiva ordinaria) oppure $D(\Gamma)$ è un ciclo di lunghezza almeno 4. In entrambi i casi, è possibile stabilire un verso di percorrenza su $D(\Gamma)$, e K_{ij} dipende solo dal verso individuato dalla coppia ordinata (i, j) . Supponiamo invece che vi siano in $D(\Gamma)$ vertici da cui escano più di due lati. E sia i un tal vertice, congiunto con j_0, \dots, j_m , ove $m \geq 2$. Risulta $K_{j_0, i} = K_{i, j_t}$ e $K_{j_t, i} = K_{j_0, i}$ per ogni $t = 1, \dots, m$. Ma è anche $K_{j_h, i} = K_{i, j_k}$ per $h, k = 1, \dots, m$, con $h \neq k$. Infine $K_{j_0, i} = K_{i, j_0}$. Da ciò si ha subito che K_{ij} non dipende da i e da j , nemmeno dall'ordine in cui sono presi. In conclusione: i piani che si rinvengono sui lati di $D(\Gamma)$ (ovvero: che sono residui di bandiere di cotipo $\{i, j\}$ con i e j congiunti in $D(\Gamma)$) sono tutti coordinatizzati da uno stesso corpo K , che coordinatizza sia il piano che il suo duale. Da ciò, con un po' di pazienza, si prova che K è un campo. Nei fatti, basta provare la cosa per $D(\Gamma) = (D_4)$ (e per ciò rimando al num. 6.12 di [26]). Do podiché: basterà scegliere in $D(\Gamma)$ un nodo del tipo:



e passare al residuo di una bandiera di cotipo $\{i, j_1, j_2, j_3\}$.

In definitiva: ferme le ipotesi precedenti su Γ , se $D(\Gamma) \neq (A_3)$ e se $D(\Gamma)$ non è un ciclo, allora i piani che si rinvengono ai lati di $D(\Gamma)$ sono piani pa

scaliani. (In particolare: se $D(\Gamma) = (E_6), (E_7), (E_8), (D_n)$ con $n \geq 4, \dots$).

Nota - Vi sono dunque casi in cui il diagramma racchiude informazioni molto ricche. Vedremo in seguito altri casi simili. Naturalmente, non è sempre così.

Se conveniamo di dare senso anche al simbolo (G^2) , indichiamo con esso il diagramma (riducibile):

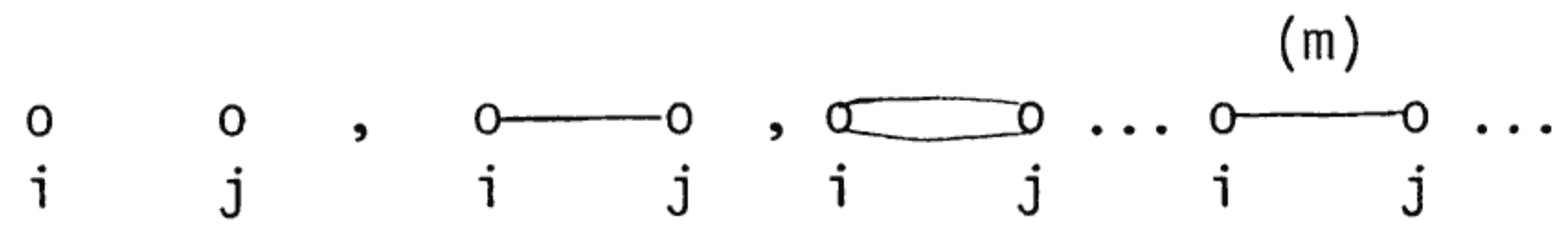
o o

la (b.11) mostra che i residui di faccie di cotipo $\{i, j\}$ ($i, j \in D(\Gamma)$, $i \neq j$) in un edificio generalizzato sono edifici generalizzati in diagrammi (G^m) ($m \geq 2$) (cioè, poi: edifici generalizzati di rango 2). Conviene dunque esaminare il caso di rango 2 con un po' di cura.

Cominciamo col definire *spazio parziale lineare* uno spazio di punti e rette tale che per due punti passa al più una retta, due rette si intersecano su al più un punto, ogni retta ha almeno due punti e da ogni punto escono almeno due rette, e due punti possono sempre congiungersi con un'opportuna spezzata (equivalentemente: due rette possono sempre ...).

E' ovvio che uno spazio parziale lineare può essere visto come un complesso di camere di rango 2. (Le varietà sono i punti e le rette, l'incidenza è quella usuale). I sottocomplessi magri sono allora gli m -agoni ordinari ("ordinari" qui intende: che non presentano ripetizioni di lati o vertici). Se $m \geq 3$, diciamo *m -agone generalizzato* uno spazio parziale lineare che non contenga r -agoni ordinari per $r < m$, e tale che per ogni coppia di camere C, C' esista un m -agone ordinario che contenga C e C' . Diciamo poi 2-agone generalizzato, o *digone generalizzato*, uno spazio di punti e rette, con almeno due punti e due rette, in cui tutti i punti sono incidenti a tutte le rette. Se si rammenta che i complessi di Coxeter di rango 2 sono gli m -agoni ordinari, è quasi immediato verificare che gli edifici generalizzati di rango 2 sono gli m -goni generalizzati.

E si comprende ora come il diagramma $D(\Gamma)$ di un edificio generalizzato Γ possa definirsi anche mediante i residui in Γ di bandiere di cotipo $\{i, j\}$, pur che la ripartizione in tipi sia già stata assegnata, in qualche modo. Precisamente, con notazioni quali:



intenderemo che i residui in Γ di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono, rispettivamente digoni generalizzati, piani proiettivi, spazi polari di rango 2, ... m-agoni generalizzati, ...

La (b.11) garantisce la coerenza di queste convenzioni con quelle precedentemente stabilite.