CAPITOLO 2

(BN-COPPIE ED EDIFICI)

DEFINIZIONI E COSTRUZIONI

La precedente rassegna di esempi ci indica come fondamentali le proprietà (B.1)-(B.4), per l'aspetto geometrico, e le (BN.1)-(BN.3) per l'aspetto gruppale; infine, la proprietà (G) come connettiva di questi due aspetti. Ma prima di risolversi a trasformare tali proprietà in definizioni, occorre chiarire in che misura le assunzioni di finitezza fatte nella (B.1) e nella (BN.3) influenzano la teoria di cui, nella precedente rassegna di esempi, ho esibito qualche parte. La influenzano, in effetti, ma esclusivamente nella pretesa di produrre i complessi di camere semplicemente come complessi di bandiere, riconducento tutto all'incidenza di varietà. E , benché tale pretesa sia stata incorportata nel senso stesso che si è attribuito al termine "complesso di camere", essa interviene in modo essenziale solo nella definizione dei complessi di Coxeter, così come questa è stata fissata nelle pagine precedenti. Entra anche nella ricostruzione, su un sistema di parabolici, di un complesso di camere verificante le (B.1)-(B.4), nel senso che la ricostruzione si riduce a stabilire una corrispondenza biunivoca tra parabolici massimali e varietà (sottospazi) e a trovare il corrispettivo dell'incidenza tra varietà nel fatto che l'intersezione dei corrispettivi parabolici sia un parabolico. Ma possiamo vedere in ciò solo una semplificazione, autorizzata dal fatto che avevamo assunto che il complesso di camere da ricostruire fosse un complesso di bandiere; tutto quanto dovevamo fare era solo stabilire un isomorfismo tra la costruzione prodotta sui parabolici e il complesso di partenza. E la possibilità di ciò non dipendeva in alcun modo dalle ipotesi di finitezza incorporate nella (BN.3) e nella (B.1). Le cose cambierebbero aspetto quando, presa in un gruppo G una coppia di sottogruppi verificante le (BN.1)-(BN.3), volessimo costruire direttamente un complesso di camere sui parabolici, partendo solo dalla incidenza tra parabolici massimali definita secondo la clausola:

> due parabolici massimali sono detti incidenti se la loro intersezione è un parabolico.

Si presenterebbero allora, nel caso di R infinito, difficoltà analoghe a quelle che si incontrano sui gruppi di Coxeter. Vale la pena di esaminare la cosa in dettaglio, sia nel caso dei gruppi di Coxeter che nel caso di complessi di camere costruiti su parabolici.

Cominciamo dai gruppi di Coxeter. Dato un gruppo di Coxeter S sulle riflessioni s_i ($i \in I$), si sono scelte come varietà i laterali dei sottogruppi $S^i = S_{I-\{i\}}$. Due varietà (di tali laterali) si dicevano incidenti se avevano intersezione non vuota. Si vorrebbe così poter associare alle bandiere i laterali dei sottogruppi S_J ($J \subseteq I$). In particolare, alle camere verrebbero associati gli elementi di S (laterali di $S_\emptyset$). Richiamo qui i punti essenziali del procedimento con cui si mostra la possibilità di una tale corrispondenza; avvertirò quando interviene l'ipotesi che I sia finito. Intanto, assegnamo ad ogni varietà xS^i come *tipo* l'indice i. Si vede facilmente che varietà di ugual tipo sono incidenti (se e) solo se coincidono. Dato poi un sottogruppo S_J e $x \in S$, dovremmo fare corrispondere a S_J la bandiera $\{xS^i \mid i \notin J\}$; ovvero: l'insieme di tutte le varietà contenenti xS_J. Allo scopo occorrerà solo mostrare che, preso un insieme di varietà $\{x_i S^i \mid x \in J'\}$, a due a due incidenti, l'intersezione di tali varietà è un laterale del tipo xS_J, per un opportuno $x \in S$ e per $J = I - J'$. Dopodiché sarà ovvio che ogni varietà contenente xS_J è del tipo xS^i per $i \in J'$ (cioè: è una delle varietà nell'insieme di partenza). Tutto ciò che occorre mostrare è che, ferme le ipotesi ora assunte su $\{x_i S^i \mid i \in J'\}$, risulta $\emptyset \neq \cap_{i \in J'} x_i S^i$ (dopodiché, si sceglierà x in $\cap_{i \in J'} x_i S^i$, e il resto verrà subito). Si usa un lemma: dati $\bar{J}, \bar{J}', \bar{J}'' \subseteq I$, risulta: $S_{\bar{J}} \cap (S_{\bar{J}'} . S_{\bar{J}''}) = (S_{\bar{J}} \cap S_{\bar{J}'}) \cdot (S_{\bar{J}} \cap S_{\bar{J}''})$.

La dimostrazione non sfrutta l'ipotesi che I sia finito (rimando per una traccia all'esercizio 1 del cap. IV di [4]). Da tale relazione si ricava che, dati tre sottinsiemi $\bar{J}, \bar{J}'$ e $\bar{J}''$ di J e tre elementi x, x' e x'' di S, se i laterali $xS_{\bar{J}}$, $x'S_{\bar{J}'}$ e $x''S_{\bar{J}''}$ hanno a due a due intersezione $\neq \emptyset$, allora $\emptyset \neq xS_{\bar{J}'} \cap x'S_{\bar{J}'} \cap x''S_{\bar{J}''}$ (lascio a chi legge il gusto di ricostruirsi la dimostrazione; questa comunque non dipende dalla struttura di S, se non per il tramite del precedente lemma).

Sia ora $\{x_j S^j \mid j \in J'\}$ un insieme di varietà a due a due incidenti. Se I è finito, allora J' è finito, perché varietà distinte di ugual tipo non sono incidenti.

(Questo è l'unico punto in cui interviene l'ipotesi che I sia finito). Allora è $\cap_{j\in J'} x_j S^j \neq \emptyset$. La cosa ora segue dalla proprietà precedente, per induzione sulla cardinalità di J', e sfruttando il fatto che, se $\emptyset \neq x'S_{\bar{J}'} \cap x''S_{\bar{J}''}$, risulta $x'S_{\bar{J}'} \cap x''S_{\bar{J}''} = xS_{\bar{J}' \cap \bar{J}''}$ per qualche $x \in x'S_{\bar{J}'} \cap x''S_{\bar{J}''}$. Nel caso che I sia infinito il ragionamento cade. Dò un controesempio. Sia I l'insieme degli interi positivi. Consideriamo la camera $\{x_i S^i \mid i \in I\}$, ove $x_i = \prod_{k=1}^{i} s_k$. Che di una camera si tratti risulta dal fatto che $\prod_{k=i+1}^{j} s_k \in S^i \cap (\prod_{k=i+1}^{j} s_k) S^j$ per $i < j$. Ma è $\cap_{i\in I} x_i S^i = \emptyset$. Cade così la possibilità di vedere le bandiere come laterali di sottogruppi del tipo S_J $(J \subseteq I)$. Resta dunque da decidere se ridefinire il senso di "complesso di camere" in modo da riottenere la corrispondenza desiderata, o se non si debba piuttosto rinunciare a tale corrispondenza nel caso di rango infinito. Ma la prima alternativa è obbligata. Infatti, nel caso di rango infinito, la relazione di incidenza sopra stabilita tra laterali dei sottogruppi S^i nemmeno definisce un complesso di camere. Infatti, sia I come sopra, sia C la camera sopra definita, e sia p una permutazione di I, di periodo infinito. Sia C' la camera costruita con lo stesso criterio della C, ma ordinando I secondo l'ordine indotto da p. Non c'è alcuna galleria che connetta C e C'. La via d'uscita consiste allora nel prendere in considerazione non *tutte* le bandiere, ma per l'appunto solo quelle costituite dalle stelle delle varietà contenenti laterali di sottogruppi del tipo $S_J (J \subseteq I)$. Per quanto ora visto, nel caso finito non cambia nulla, e, nel caso generale perdiamo solo bandiere infinite. Ma prima di esaminare in dettaglio le modifiche da apportare nel caso generale, preferisco discutere la questione sui parabolici di una coppia (B,N) di sottogruppi di un gruppo G sulla quale valgono le (BN.1)-(BN.3). Come nel caso dei gruppi di Coxeter, la possibilità di associare biunivocamente parabolici e bandiere dipende dal fatto che l'intersezione di un insieme di parabolici massimali a due a due incidenti sia un parabolico.

Più in dettaglio. Si prova intanto (ovviamente senza ricorrere all'ipotesi che R sia finito) che:

(bn.4) Siano P e P' due parabolici fondamentali e sia $gPg^{-1} \subseteq P'$. Allora è $g \in P'$.

(Rimando al cap. IV di [4] per una dimostrazione).

Sia ora $\{P^i \mid i \in J\}$ un insieme di parabolici massimali, con $P^i = g_i B W^{r_i} B g_i^{-1}$, e $P = \bigcap_{i \in J} P^i$ sia parabolico. Sarà allora $P = gBW_{\bar{J}}Bg^{-1}$, per opportuni $g \in G$ e $\bar{J} \subseteq R$. Dalla (bn.4) si ha che $(g_i^{-1})g \in BW^{r_i}B$ per ogni $i \in J$. Da ciò si ha $P^i = gBW^{r_i}Bg^{-1}$. E si ottiene che $\bar{J} = R - \{r_i \mid i \in J\}$. Da ciò, usando di nuovo la (bn.4), si ricava che ogni parabolico massimale contenente P è uno dei P^i $(i \in J)$. Sicché $\{P^i \mid i \in J\}$ è la stella dei parabolici massimali contenenti P. Sicché la corrispondenza tra bandiere e parabolici è stabilita se solo si riesce a provare che l'intersezione di un insieme di parabolici massimali a due a due incidenti è un parabolico. Ma allo scopo è necessario sfruttare l'ipotesi che R sia finito. Vediamo come. Anche qui avvertirò quando l'ipotesi di finitezza interviene. Occorre intanto definire il *tipo* di un parabolico massimale: si assegnerà come tipo al parabolico massimale gBW^rBg^{-1} la riflessione r, o un suo indice in un sistema di indici per R. Con ragionamenti analoghi a quelli svolti qui sopra, sfruttando la (bn.4), si prova che parabolici massimali di ugual tipo sono incidenti (se e) solo se coincidono.

Consideriamo poi i parabolici del tipo wBW_JBw^{-1} per $J \subseteq R$ e $w \in W$. Siccome questo sistema di parabolici dovrà poi costituire l'*appartamento fondamentale*, lo indico fin da ora con il termine "appartamento fondamentale". Possiamo stabilire un isomorfismo tra l'appartamento fondamentale, ordinato mediante l'inclusione insiemistica, e il sistema dei laterali dei sottogruppi di W del tipo W_J $(J \subseteq R)$, ordinato mediante l'inclusione. Ovvero: un isomorfismo tra il complesso di Coxeter di W e l'appartamento fondamentale (il che giustifica, almeno in parte, la terminologia adottata). L'isomorfismo si costruisce associando a wBW_JBw^{-1} il laterale wW_J. La corrispondenza è ben posta. Sia infatti $wBW_JBw^{-1} = w'BW_{J'}B(w')^{-1}$. Dalla (bn.4) si ha subito $((w')^{-1})w \in BW_{J'}B$. Da cui $BW_JB = BW_{J'}B$ e, infine, $W_J = W_{J'}$. La $w'W_{J'} = wW_J$ è ora ovvia. E' poi presto visto che la corrispondenza è biunivoca. Resta così stabilito l'isomorfismo desiderato.

Possiamo ora provare che, dati tre parabolici $g_iBW_{J_i}Bg_i^{-1}$ $(i=1,2,3)$, se essi si intersecano a due a due su parabolici, allora l'intersezione di tutte e tre è un parabolico. Intanto, coniugando con g_1^{-1}, possiamo ricondurci al caso in cui $g_1=1$. Sia ora $P = g_2BW_{J_2}Bg_2^{-1} \cap g_3BW_{J_3}Bg_3^{-1}$. Per le ipotesi assunte sui $g_iBW_{J_i}Bg_i^{-1}$, P è un parabolico. Sicché risulta $P=gBW_JBg^{-1}$ per opportuni $g \in G$ e $J \subseteq R$. Per la (bn.4) risulta $(g_i^{-1})g \in BW_{J_i}B$ per $i=2,3$. Possiamo allora sostituire g_2 e g_3 con g. Per la decomposizione di Bruhat, possiamo porre g nella forma $g=b\bar{w}b'$ per opportuni $b,b' \in B$ e $\bar{w} \in N$. Coniugando con b^{-1} ci riconduciamo al caso $g=\bar{w}$. E che $BW_{J_1}B \cap \bar{w}BW_{J_2}B\bar{w}^{-1} \cap \bar{w}BW_{J_3}B\bar{w}^{-1} \neq \emptyset$ segue ora dall'isomorfismo tra l'appartamento fondamentale e il complesso di Coxeter di W, e da quanto visto in precedenza sui gruppi di Coxeter.

Sia ora $\{P^i | i \in J\}$ un insieme di parabolici massimali a due a due incidenti. Siccome parabolici massimali distinti di ugual tipo non sono mai incidenti, se R è finito allora J è finito (e questo è l'unico punto in cui interviene l'ipotesi che R sia finito). Allora, usando la proprietà provata poco sopra, e ragionando per induzione sulla cardinalità di J, otteniamo che $\bigcap_{i \in J} P^i$ è parabolico.

Nel caso che R sia infinito, invece, l'isomorfismo tra l'appartamento fondamentale e il complesso di Coxeter di W mostra che si riproducono sui parabolici gli stessi inconvenienti che nei gruppi di Coxeter. Dovremmo dunque rinunciare a considerare tutte le bandiere, e dovremmo scartare alcune bandiere infinite (tutte quelle *non* costituite da stelle di parabolici massimali contenenti un dato parabolico).

Dobbiamo dunque rinunciare ad assumere come punto di partenza, per l'armamentario di definizioni, il concetto di complesso delle bandiere definite da una relazione di incidenza. Una soluzione ovvia: assumere un sottocomplesso del complesso delle bandiere. Per il resto, tutto resta identico. Dovremmo comunque conservare le bandiere costituite da coppie di varietà; per poter ancora trovare un'equivalente per l'incidenza di due varietà nel fatto che dette varietà appartengono ad una stessa bandiera. Ma a questo punto è più semplice assumere ciò direttamente come definizione di incidenza, escludendo l'incidenza dal repertorio dei concetti fondamentali (questa è la via seguita da Tits in [26]). Ci rimane allora un insieme non vuoto V (i cui elementi diremo *vertici*, o anche *varietà*, o *elementi* o *sot-*

Tutto quanto detto su edifici nel primo capitolo resta valido. In particolare restano valide le (b.1)-(b.3)). Per di più:

(b.5) Un edificio è un complesso di bandiere finite.

Si ha infatti dalle (B.3), (b.2) e (b.4) che date in un edificio tre faccie A,B,C a due a due incidenti, $A\cup B\cup C$ è una faccia (si applichi (B.3) alle faccie $A\cup B$ e C). Da ciò la (b.5) segue subito.

DEFINIZIONE DI BN-COPPIA. - Dati due sottogruppi B ed N di un gruppo G, diciamo che B ed N formano una *BN-coppia* se verificano le condizioni (BN.1),(BN.2) (cfr. cap. 1) e la condizione (BN^*.3), ottenuta depennando nella (BN.3) il requisito che R sia finito.

Tutto quanto detto su BN-coppie nel primo capitolo resta valido. In particolare restano valide le (bn.1)-(bn.3).

Sulla connessione tra edifici e BN-coppie, ora. Sia G un gruppo che agisce come gruppo di automorfismi su un edificio $\Gamma = (\mathcal{K},\mathcal{U})$ soddisfacendo la condizione (G). Quanto detto nel primo capitolo mostra come associare a Γ una BN-coppia su G. Indicheremo una tale BN-coppia col simbolo $(B(\Gamma,C_0),N(\Gamma,\Sigma_0))$ per evidenziarne la dipendenza dalla scelta di un appartamento fondamentale Σ_0 di Γ e di una camera fondamentale C_0 in Σ_0. La costruzione data nel cap. 1 mostra anche come ricostruire Γ direttamente sui parabolici di $(B(\Gamma,C_0),N(\Gamma,\Sigma_0))$. Basterà sostituire il termine "bandiera" col termine "faccia". la (g.1) garantisce la fedeltà della ricostruzione; e la dimostrazione della (g.1) non fa alcun uso dell'ipotesi che $\mathcal{K}$ sia un complesso di bandiere. Ma si può far di più. Sia data una BN-coppia (B,N) su un gruppo G. Assumiamo come vertici i parabolici massimali, come faccie i parabolici (o meglio, le stelle di parabolici massimali per parabolici dati), come camere dunque i boreliani, e come appartamenti i coniugati del complesso $\Sigma_0^{con.}=\{w\, BW_J Bw^{-1}\,|\,w\in W, J \subseteq R\}$ (detto appartamento fondamentale). La struttura così ottenuta è un edificio, che indicheremo con $\Gamma^{con.}_{B,N} =(\mathcal{K}^{con.}_{B,N},\mathcal{U}^{con.}_{B,N})$ e G agisce su $\Gamma^{con.}_{B,N}$ per coniugazione, soddisfando la (G). Possiamo allora considerare la BN-coppia definita da $\Gamma^{con}_{B,N}$ Σ_0 e B su G, e risulta: $B(\Gamma^{con.}_{B,N},B) = B$

ed $N(\Gamma^{con.}_{B,N}, \Sigma^{con}_{o}) = \bar{N}$ ove $\bar{N} = N\bar{T}$ ed è $\bar{T} = \bigcap_{w \in W} wBw^{-1}$ (ovvio che $N \cap B = T \subseteq \bar{T} \trianglelefteq \bar{N}$, e che $\bar{N}/\bar{T} \cong N/T$).

Dõ qui una dimostrazione di quanto sopra asserito. Verifichiamo intanto che $\Gamma^{con.}_{B,N}$ è un complesso di camere. E' intanto ovvio che ogni faccia (parabolico) appartiene a (include) almeno una camera (boreliano): per definizione di parabolico. E' poi presto visto che due boreliani (camere) sono adiacenti se e solo se generano un parabolico del tipo $gB\langle r\rangle Bg^{-1}$, per qualche $r \in R$. Siano ora B_1, B_2 due boreliani. A meno di coniugazioni, possiamo sempre supporre $B_1 = B$. Sarà allora $B_2 = gBg^{-1}$ per qualche $g \in G$. Per la decomposizione di Bruhat, è $g = b\bar{w}b'$ per opportuni $b, b' \in B$ e $\bar{w} \in N$. Coniugando con b^{-1} ci riconduciamo al caso in cui $B_1 = B$ e $B_2 = \bar{w}B\bar{w}^{-1}$. Siamo così all'interno di $\Gamma^{con.}_{o}$. E la possibilità di connettere B_1 e B_2 con una galleria segue dall'isomorfismo tra $\Gamma^{con.}_{o}$ e il complesso di Coxeter di W, dimostrato in precedenza. Proviamo ora che $\Gamma^{con.}_{B,N}$ è grasso. Consideriamo le camere B, rBr e $brBrb^{-1}$ ($b \in B$ ed $r \in R$). Per la (BN.3.a), è $rBr \subseteq B \cup BrB = B\langle r\rangle B$. Sicché queste tre camere passano tutte per la faccia $B\langle r\rangle B$. E' poi $brBrb^{-1} \neq B \neq rBr$, per (BN.3.b). Poniamo che fosse $brBrb^{-1} = rBr$ per ogni $b \in B$. Allora, per (bn.4), $\bar{r}^{-1}b\bar{r} \in B$ per ogni $b \in B$ e per ogni rappresentante $\bar{r}$ di r in N. Sicché $rBr \subseteq B$. Il chè contraddice la (BN.3.b). Ne segue che $brBrb^{-1} \neq rBr$ per qualche $b \in B$. E, per coniugazione, abbiamo subito che, $\Gamma^{con.}_{B,N}$ è grasso. La (B.2) segue subito dall'isomorfismo tra $\Gamma^{con.}_{o}$ ed il complesso di Coxeter di W. La (B.3) è ovvia (per coniugazione, e usando la decomposizione di Bruhat, ci si può sempre ricondurre al caso di due camere in $\Sigma^{con.}_{o}$). Resta da provare la (B.4). Possiamo ricondurci al caso che la camera sia B e uno dei due appartamenti sia $\Gamma^{con.}_{o}$. Sia P la faccia di cui nell'ipotesi della (B.4), e $\Sigma = g\,\Sigma^{con.}_{o}\,g^{-1}$ l'altro appartamento. Siccome P appartiene a Σ e $\Sigma^{con.}_{o}$, abbiamo $wBW_JBw^{-1} = P = gw_1\,BW_{J_1}Bw_1^{-1}g^{-1}$ per opportuni $w, w_1 \in W$ e $J, J_1 \subseteq R$. Siccome B è una camera anche per Σ, è $B = gw_2Bw_2^{-1}g^{-1}$ per qualche $w_2 \in W$. Dalla (bn.4) abbiamo allora $gw_2 \in B$ e $w^{-1}gw_1 \in BW_JB$. Da ciò, intanto, $gw_1BW_{J_1}Bw_1^{-1}g^{-1} = gw_1BW_JBw_1^{-1}g^{-1}$. Sicché $W_J = W_{J_1}$ (per l'isomorfismo tra il complesso di Coxeter di W e $\Sigma_o^{con.}$). Si ha allora $w_2^{-1}w_1 \in Bw(BW_JB)$. Da cui, per l'unicità della decomposizione di Bruhat (cfr. "Groupes et Algebres de Lie", cap. IV, n.2.5, Prop. 2) risulta $w_1 \in w_2wW_J$. E' allora $P=wBW_JBw^{-1} = gw_2wBW_JBw^{-1}w_2^{-1}g^{-1}$. Coniughiamo ora Σ con $w_2^{-1}g^{-1}$. Portiamo così Σ su $\Sigma_o^{con.}$, tenendo fisso B perché $gw_2 \in B$, e portando P in $wBW_JBw^{-1} = P$. Sicché: fissiamo anche P. E' poi presto visto che la coniugazione mediante un elemento di G, se fissa una faccia, allora ne fissa tutti i vertici. E con ciò la (B.4) è provata, assieme alla seconda parte della (G). La prima parte della (G) è ovvia. Resta ora da provare che lo stabilizzatore di B in G è B e lo stabilizzatore $\Sigma_o^{con.}$ in G è $\bar{N} = N\bar{T}$ ove $\bar{T} = \bigcap_{w\in W} wBw^{-1}$. Che lo stabilizzatore di B in G sia B segue subito dalla (bn.4). Sia ora $g(\Sigma_o^{con.})g^{-1} = \Sigma_o^{con.}$.Esiste allora una funzione $f : W \to W$ tale che $gwBw^{-1}g^{-1} = f(w)Bf(w)^{-1}$.

Per la (bn.4), risulta $g=f(1)b$ per qualche $b\in B$ (uso qui la convenzione di indicare con uno stesso simbolo gli elementi di W e i loro rappresentanti in N). Da ciò $f(1)bwBw^{-1}b^{-1}f(1)^{-1} = f(w)Bf(w)^{-1}$ per ogni $w\in W$, e pertanto $f(w)^{-1}f(1)bw\in B$ per ogni $w\in W$. Cioè: $f(w)^{-1}f(1)b\in Bw^{-1}$. Da ciò, per l'unicità della decomposizione di Bruhat, $f(w)^{-1}f(1) = w^{-1}$. Sicché $f(w) = f(1)w$. Si ha allora $f(1)wBw^{-1}f(1)^{-1} = f(1)bwBw^{-1}b^{-1}f(1)^{-1}$, per ogni $w\in W$. Infine, $wBw^{-1} = bwBw^{-1}b^{-1}$, per ogni $w\in W$. Da ciò: $wbw^{-1}\in B$ per ogni $w\in W$, per la (bn.4). In definitiva: $b\in \bigcap_{w\in W} w^{-1}Bw$. Ed è $g\in N\bar{T}$. Quel poco che resta ora da provare non presenta più difficoltà.

Tutta la dimostrazione precedente dipende in modo essenziale dalla (bn.4), e la (bn.4) è equivalente alla (BN.3.b), sotto le (BN.1), (BN.2) e (BN.3.a). Si è già detto infatti che (bn.4) segue dalle (BN.1), (BN.2) e (BN^*.3). Viceversa, valga (bn.4), e sia per assurdo $rBr = B$. Allora è $r\in B$ per (bn.4). E ciò contraddice le restanti ipotesi (BN.1)-(BN.3.a).

E' però possibile dare un'altra costruzione che prescinde dalla (BN.3.b), ed offre dunque maggiori speranze di potersi adattare ai casi non grassi.

L'idea è semplice. Salta agli occhi la differenza tra la costruzione prodotta nel caso dei complessi di Coxeter e la costruzione di $\Sigma_{B,N}^{con.}$. Nel primo caso si usano i laterali, nel secondo i coniugati. E' immediatamente visto che questo secondo metodo non può adattarsi ai gruppi di Coxeter. Viceversa, il primo metodo è affatto generale. Sia data infatti una famiglia $\{X^i | i\in I\}$ di sottogruppi di un gruppo .Si ponga $X_J = \cap_{i \notin J} X^i$. Si assumano come faccie i laterali (sinistri per fissare le idee) dei sottogruppi X_J, e come relazione d'ordine la duale dell'inclusione. Si ha un complesso di faccie e vertici (i vertici sono dati dai laterali sinistri dei sottogruppi $X_{I-\{i\}} = X^i$). E' poi un semplice esercizio mostrare che il complesso così ottenuto è un complesso di camere se e solo se $X = \langle X_{\{i\}} | i\in I\rangle$. La costruzione qui descritta è appunto quella seguita nel caso dei complessi di Coxeter. Trasportandola al caso di una BN-coppia (B,N) in un gruppo G, assumiamo come faccie i laterali dei parabolici fondamentali (anziché i parabolici); e come appartamento fondamentale $\Sigma_0^{\text{lat.}}$ il sistema di laterali $\{wBW_JB \mid w\in W, J \subseteq R\}$. I vertici sono i laterali dei parabolici fondamentali massimali. A B resta assegnato il ruolo di camera fondamentale. Gli appartamenti saranno poi i sistemi del tipo $g\,\Sigma_0^{\text{lat.}}$, per $g\in G$. Otteniamo così un nuovo complesso strutturato in appartamenti $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}} = (K_{B,N}^{\text{lat.}}, \mathcal{U}_{B,N}^{\text{lat.}})$. *La dimostrazione che* $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ *è un edificio* non si discosta nelle linee essenziali da quella data nel caso di $\Gamma_{B,N}^{\text{con.}}$. *Con* la notevole differenza, però, che dovendo ora operare su laterali e non su coniugati, non abbiamo più alcuna necessità della (bn.4). Si evita così il ricorso alla (BN.3.b), salvo che quando si deve dimostrare che $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ è grasso, naturalmente. Per il resto, ciò di cui abbiamo bisogno nella dimostrazione è essenzialmente la Prop. 2 del num. 2.5 del Cap. IV di "Groupes et Algebres de Lie", che costituisce una diretta generalizzazione dell'unicità della decomposizione di Bruhat [26], Cap. IV, num. 2.3, Teorema 1), e questa prescinde dalla (BN.3.b). Rimando comunque al num. 3.2.6 di "Buildings of Spherical Type ..." per la dimostrazione diretta del fatto che $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ è un edificio.

E' poi ovvio quale sia l'azione di G su $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$: G vi agisce per moltiplicazione (a sinistra).

Qui mi limito a poche osservazioni.

Intanto, che la costruzione ora data per $\Gamma^{lat.}_{B,N}$ sia effettivamente un caso particolare della costruzione generale descritta prima, segue facilmente dall'isomorfismo tra $\Gamma^{lat.}_{o}$ ed il complesso di Coxeter di W. Vediamo quest'ultimo punto. L'isomorfismo si costruirà facendo corrispondere wW_J a wBW_JB. Occorre vedere che la corrispondenza è ben posta. Infatti, sia $w'BW_{J'}B = wBW_JB$. Per l'unicità della decomposizione di Bruhat, è $(w')^{-1}w \in W_{J'}$. Da ciò si ha $wBW_{J'}B = w'BW_{J'}B$. Sicché si ottiene $BW_JB = BW_{J'}B$. Di nuovo per l'unicità della decomposizione di Bruhat, risulta $W_J = W_{J'}$. Infine $wW_J = w'W_{J'}$, perché $(w')^{-1}w \in W_{J'}$. La corrispondenza è dunque ben posta (noto che nemmeno qui si è dovuta usare la (BN.3.b)). Quanto resta da provare si ottiene con argomentazioni elementari.

Le due costruzioni (sui laterali e sui parabolici) danno lo stesso risultato. E' infatti $\Gamma^{con.}_{B,N} \cong \Gamma^{lat.}_{B,N}$ (indirettamente, ciò restituisce una dimostrazione del fatto che il complesso $\Gamma^{lat.}_{B,N}$ è un edificio).

L'isomorfismo viene costruito associando al parabolico gBW_JBg^{-1} il laterale gBW_JB del parabolico fondamentale BW_JB. Ovvio poi quale debba essere l'effetto di ciò sugli appartamenti. Ovvio ancora che tale corrispondenza porta $\Sigma^{con.}_{o}$ su $\Sigma^{lat.}_{o}$ e B su B. Proviamo che la corrispondenza è ben posta. Sia $gBW_JBg^{-1} = g'BW_{J'}B(g')^{-1}$. Per la (bn.4) è $g^{-1}g' \in BW_JB$. Da ciò si ha subito $BW_JB = BW_{J'}B$. Infine, $gBW_JB = gBW_{J'}B = g(g^{-1}g')BW_{J'}B$ (perché $g^{-1}g' \in BW_JB = BW_{J'}B$). Sicché $gBW_JB = g'BW_{J'}B$. La dimostrazione che la corrispondenza è biunivoca si ottiene con mezzi elementari. Tutto il resto è ovvio.

Concludendo, la costruzione sui parabolici e quella sui laterali danno lo stesso risultato. La prima appare come più naturale, sugli esempi. Ma necessita di ipotesi più forti della seconda. La seconda è più generale.

Prima di riassumere quanto sin qui visto, è necessario ancora un po' di terminologia. Sia (B,N) una BN-coppia in un gruppo G. La coppia (B,N) si dice *saturata* se $T\ (= N \cap B) = \bigcap_{w \in W} wBw^{-1}$. Data una BN-coppia (B,N), si ponga $\bar{T} = \bigcap_{w \in W} wBw^{-1}$, $\bar{N} = N\bar{T}$.

Allora $(B,\bar{N})$ è una BN-coppia saturata (la cosa è pressoché ovvia), e viene detta la *saturazione* di (B,N); è inoltre $\bar{N}/\bar{T} = \bar{W} \cong W = N/T$. Date due BN-coppie (B,N) e (B',N') di uno stesso gruppo G, esse si dicono *coniugate* se è $B' = gBg^{-1}$ ed $N' = gNg^{-1}$ per qualche $g \in G$. Intendiamo poi per *edificio coordinatizzato* una terna (Γ,Σ,C) ove Γ è un edificio, Σ un appartamento di Γ e C una camera in Σ. La coppia (C,Σ) sarà detta una *coordinatizzazione* di Γ. (Queste due ultime definizioni non sono reperibili nella letteratura; però qui tornano comode. La scelta del termine "coordinatizzazione" è suggerita dalla considerazione di cosa diviene una coordinatizzazione (C,Σ) nella geometria proiettiva di uno spazio vettoriale). Dirò che due edifici coordinatizzati (Γ,Σ,C) e (Γ',Σ',C') sono *isomorfi* se esiste un isomorfismo di Γ su Γ' che porti Σ su Σ' e C su C'. Ciò premesso:

(g.4) Data una BN-coppia (B,N) su un gruppo G, restano definiti due edifici coordinatizzati $(\Gamma^{con.}_{B,N}, \Sigma^{con}_{o}, B)$ e $(\Gamma^{lat.}_{B,N}, \Sigma^{lat.}_{o}, B)$, tra loro isomorfi. Il gruppo G agisce per coniugazione su $\Gamma^{con.}_{B,N}$ e per moltiplicazione (a sinistra) su $\Gamma^{lat.}_{B,N}$ e per moltiplicazione (a destra) su $\Gamma^{lat.}_{B,N}$, in entrambi i casi soddisfacendo alla (G). Viceversa, dato un edificio coordinatizzato (Γ,Σ,C) e un gruppo G che agisce su Γ come gruppo di automorfismi soddisfacendo alla (G), resta definita su G una BN-coppia (B,N), ove B è lo stabilizzatore di C ed N lo stabilizzatore di Σ (brevemente: (B,N) è la stabilizzatrice della coordinatizzazione (C,Σ)). E risulta $(\Gamma^{con.}_{B,N}, \Sigma^{con.}_{o}, B) \cong (\Gamma,\Sigma, C) \cong (\Gamma^{lat.}_{B,N}, \Sigma^{lat.}_{o}, B)$. Infine, data una BN-coppia (B,N) in un gruppo G, le BN-coppie stabilizzatrici in G delle coordinatizzazioni (B,Σ^{con}_{o}) e $(B,\Sigma^{lat.}_{o})$, di $\Gamma^{con.}_{B,N}$ e $\Gamma^{lat.}_{B,N}$ rispettivamente, coincidono, e danno la saturazione di (B,N). Date due BN-coppie saturate (B',N') e (B,N) in uno stesso gruppo G, risulta $\Gamma^{con.}_{B,N} = \Gamma^{con.}_{B',N'}$ (equivalentemente $\Gamma^{lat.}_{B,N} = \Gamma^{lat.}_{B'N'}$) se e solo se (B,N) e (B',N') sono coniugate. Un edificio individua pertanto su un gruppo G che agisca su esso come gruppo di automorfimi soddisfacendo la (G), una classe completa di BN-coppie saturate coniugate. La scelta di una particolare BN-coppia in tale classe corrisponde alla scelta di una coordinatizzazione dell'edificio. La scelta di una di tali classi complete di BN-coppie saturate coniugate equivale alla scelta di un particolare edificio cui associare G.

C'è poco di quanto elencato qui sopra che già non si sia visto. E quel poco che c'è in più si dimostra con poche battute. Per esempio: che due BN-coppie saturate siano coniugate se defiriscono (o provengono da) lo stesso edificio segue subito dal fatto che dare una BN-coppia è lo stesso che dare una coordinatizzazione dell'edificio, e la condizione (G) dice in sostanza che il gruppo agisce transitivamente sulla famiglia delle coordinatizzazioni.

La scelta del termine "coordinatizzazione" si rivela qui abbastanza chiarificatrice. L'esempio delle geometrie proiettive di spazi vettoriali indica nella coordinatizzazione la contropartita sugli edifici della scelta di un sistema di riferimento (cioè: una sequenza, *ordinata,* di assi coordinati). Vista in questa luce, la richiesta formulata nella (G) è più che ragionevole: vi si pretende in fondo null'altro che la transitività sull'insieme dei sistemi di riferimento.

Può essere utile tradurre il contenuto della (g.4) in termini di funtori, aggiunzioni, ecc. Non si tratterebbe però di un banale esercizio. Se non altro perché le usuali definizioni di morfismo tra complessi di camere mal si piegano a questa esigenza. Bisognerebbe modificarle opportunamente. Ma allora occorrerebbe esaminare tutte le conseguenze di tali modifiche. Il concetto di morfismo ne uscirebbe forse chiarificato (e non è che di ciò non vi sia bisogno). Ma non si tratterebbe più di un esercizio appunto.

Il succo che si può trarre dalla (g.4) è che un gruppo dotato di BN-coppie contiene intrinsecamente le proprie interpretazioni geometriche (quelle canoniche, potremmo dire). Ciò tanto più in quanto le BN-coppie possono essere spesso individuate senza la mediazione di un edificio che le produca come stabilizzatrici di una coordinatizzazione.

Per esempio: in un gruppo di Chevalley finito G definito su un campo finito F_q di caratteristica p (ove q p^n), si può scegliere un p-sottogruppo di

Sylow $\mathcal{U}$ e porre $B = N_G(\mathcal{U})$; si ha che l'estensione B di $\mathcal{U}$ si spezza nel prodotto normale di $\mathcal{U}$ e di un complemento T di $\mathcal{U}$ in B. Posto allora $N = N_G(T)$, si ha che B ed N costituiscono una BN-coppia saturata (ed è $T = N \cap B$). Non è difficile vedere che tutte le BN-coppie costituite su G in questo modo sono coniugate.

Nota. - L'edificio $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ poteva anche costruirsi sui laterali destri, naturalmente. Si passa dall'una costruzione all'altra mediante la corrispondenza: $gBW_JB \leftrightarrow BW_JBg^{-1}$. La costruzione sui laterali sinistri è però più naturale quando il prodotto di due applicazioni f e g (prima f e poi g) lo si scriva da destra a sinistra, come gf, come appunto faccio in queste note.