Osserviamo infine che

$$\mathrm{Li}^{\tau\times\iota}\ \mathrm{epi}\ \hat{\underset{\sim}{f}})^{-1}\ 0 = \mathrm{Li}^{\tau}\ \{x : f_i(x) \leq \inf(f_i)\}_{i\in I} = \mathrm{Li}^{\tau}\mathrm{Min}(\underset{\sim}{f})$$

6. Appplicazione del confronto dei limiti alla differenziazione [7].

L'iperderivata (3.5) costituisce una generalizzazione della derivata direzionale di Clarke [12][16]. Se supponiamo che la topologia θ su $X \times \mathbb{R}$ sia di tipo $\sigma \times \nu$, dove ν è la topologia usuale di $\mathbb{R}$, e che la funzione f sia σ-semicontinua inferiormente in x, allora possiamo trascrivere (3.5) nel modo seguente

$$(6.1)\quad f^{\uparrow}(x)h = \sup_{Q\in N_\tau(h)}\ \inf_{V\in N_{\sigma v(\mathrm{epi}\ f)^{-1}\nu}(x)}\ \sup_{\substack{x'\in V\\ t<t_o}}\ \inf_{h'\in Q}\ (*)$$

dove $(*) = \frac{1}{t}\left[f(x' + th') - f(x')\right]$ e

dove $(\mathrm{epi}\ f)^{-1}\nu$ è la meno fine topologia per la quale f è semicontinua superiormente. Ora la derivata di Clarke si può definire come

$$(6.2)\quad f^{\circ}(x)h = \inf_{\substack{V\in N_{\sigma v(\mathrm{epi}\ f)^{-1}\nu}\\ t_o>0}}\ \sup_{\substack{x'\in V\\ t<t_o}}\ \frac{1}{t}\left[f(x'+th') - f(x')\right]$$

Per semplificare la notazione, poniamo $\rho = \sigma\ v(\mathrm{epi}\ f)^{-1}\nu$. Ci si chiede quali siano le condizioni sufficienti per l'uguaglianza

$$(6.3)\quad f^{\uparrow}(x)h = f^{\circ}(x)h$$

Una condizione è stata fornita da Rockafellar [17]. Una funzione f è detta <u>direzionalmente lipschitiziana in x rispetto h</u> se esistono $Q \in N_\tau(h)$, $V \in N_\rho(x)$, $t_o > 0$ ed $M \in \mathbb{R}$ tali che

$$(6.4)\quad f(x' + th') - f(x') \leq Mt \quad , t < t_o,\ x' \in V,\ h' \in Q .$$

Se f è direzionalmente lipschitiziana in x rispetto h, allora vale (6.3).

Poiché

$$f^{\dagger}(x)h = \mathrm{ls}^{\tau}_{N_\rho(x)\times N(0)} \quad , \quad f^{\circ}(x) = \mathrm{ls}^{\iota}_{N_\rho(x)\times N(0)} \quad ,$$

sarà sufficiente richiedere che la famiglia delle funzioni

$$\{ \frac{1}{t} [f(x' + t\ .) - f(x')] \}_{t>0, x' \in X}$$

sia τ/ι equi-semicontinua in h. Questo equivale alla seguente condizione:

(6.5) Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $Q \in N_\tau(h)$, $V \in N_\rho(x)$, $t_0 > 0$ tali che

$$f(x' + th) - f(x' + th') \leq \varepsilon t, \quad t < t_0,\ x' \in V,\ h' \in Q.$$

Teorema 6.1.

La formula (6.5) implica (6.3).

Ad esempio, se g è una funzione localmente lipschitiziana ed A è un poliedro (in uno spazio normato), allora $g + \delta_A$ soddisfa (6.5) ma non (6.4).

7. Limiti di intersezione [8], [7]

Siano $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i\in I}$, $\underset{\sim}{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ famiglie di sottoinsiemi di Z filtrate da F e sia θ una topologia su Z. In generale si ha

$$\text{(7.1)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{Li}(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \subset \mathrm{Li}\ \underset{\sim}{A} \cap \mathrm{Li}\ \underset{\sim}{B} \\ &\mathrm{Ls}(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \subset \mathrm{Ls}\ \underset{\sim}{A} \cap \mathrm{Ls}\ \underset{\sim}{B} \end{aligned}$$