Teorema 4.4.

Se $\underset{\sim}{f}$ è θ/ρ-equi-semicontinua sul dominio di $li^{\theta}\ \underset{\sim}{f}$, allora

$$li^{\rho}\ \underset{\sim}{f} \leq li^{\theta}\ \underset{\sim}{f}\ .$$

Questi teoremi forniscono delle condizioni sufficienti per l'inversione delle disuguaglianze usuali:

(4.2) Se $\theta \subset \rho$, allora
$$li^{\theta}\ \underset{\sim}{f} \leq li^{\rho}\ \underset{\sim}{f}$$
$$ls^{\theta}\ \underset{\sim}{f} \leq ls^{\rho}\ \underset{\sim}{f}$$

che si ottengono da (2.3).

Si osserva che $\dfrac{\theta \times \nu}{\rho \times \nu}$ tipo di epi $\underset{\sim}{f}$ implica θ/ρ-equi-semicontinuità, mentre l'inverso vale per le funzioni equilimitate.

5. Qualche applicazione all'ottimizzazione [8]

(Vedi [6],[19], [1] per i risultati simili sotto ipotesi più forti)

Teorema 5.1.

Se $\underset{\sim}{f}$ superconverge ad f, cioé se

(5.1) $$ls^{\tau}_{F}\ \underset{\sim}{f} \leq f,$$

allora per i valori minimi vale

(5.2) $$\lim\sup_{F}\ \inf(\underset{\sim}{f}) \leq \inf(f)$$

Prova

La topologia caotica 0 è la meno fine di tutte le topologie, perciò

$$ls^{0}\ \underset{\sim}{f} \leq ls^{\tau}\ \underset{\sim}{f} \leq \underset{\sim}{f}\ ,$$

e siccome

$$ls^0_F \underset{\sim}{f}(y) = \sup_{F\in F} \inf_{i\in F} \inf_{y'\in Y} f_i(y') = \lim\sup_F \inf (\underset{\sim}{f})$$

segue la tesi.

Lemma 5.2.

Se $\underset{\sim}{f}$ subconverge ad f, cioé se

$$li^\tau_F \underset{\sim}{f} \geq f \tag{5.3}$$

e $r \in \mathbb{R}$, allora per gli insiemi di livello vale

$$L^\tau_F \{x : f_i(x) \leq r\} \subset \{x : f(x) \leq r\} \tag{5.4}$$

Prova

Come sempre ν indica la topologia naturale di $\mathbb{R}$, mentre ι indica quella discreta. Poiché $\tau \times \nu \subset \tau \times \iota$, allora si ha

$$Ls^{\tau\times\iota} \text{ epi } \underset{\sim}{f} \subset Ls^{\tau\times\nu} \text{ epi } \underset{\sim}{f} .$$

Si verifica facilmente che

$$Ls^\tau \{x : f_i(x) \leq r\} = (Ls^{\tau\times\iota} \text{epi } \underset{\sim}{f})^{-1} r$$

La formula (5.3) (grazie a (2.3)) equivale a

$$Ls^{\tau\times\iota} \text{ epi } \underset{\sim}{f} \subset \text{epi } f = \{x : f(x) \leq r\} .$$

Da ciò segue la (5.4).

Teorema 5.2

Se $\underset{\sim}{f}$ epi-converge ad f (cioé superconverge e subconverge nello stesso tempo), allora per gli insiemi dei minimi vale

$$Ls^\tau_F \text{ Min}(\underset{\sim}{f}) \subset \text{Min}(f)$$

dove

$$\mathrm{Min}(f) = \{x : f(x) \leq \inf(f)\}$$

Prova

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che

$$\inf(f_i) < \inf(f) + \varepsilon$$

quando $i \in F$ (teorema 5.1). Dunque

$$\mathrm{Ls}\ \mathrm{Min}(f_i) \subset \mathrm{Ls}\ \{x : f_i(x) \leq \inf(f) + \varepsilon\} \subset$$

$$\subset \{x : f(x) \leq \inf(f) + \varepsilon\}$$

grazie al Lemma 5.2. Ora basta osservare che

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \{x : f(x) \leq \inf(f) + \varepsilon\} = \mathrm{Min}(f)$$

In altre parole, il Teorema 5.3 stabilisce che ogni punto d'accumulazione di minimi di $\{f_i\}_{i\in I}$ è un minimo della funzione limite f.

Per ottenere un risultato che garantisca per ogni minimo x di f l'esistenza di una famiglia di minimi di $\{f_i\}_{i\in I}$ convergente verso x, si ha bisogno di una condizione supplementare sul comportamento di $\{f_i\}_{i\in I}$.

Diciamo che una famiglia $\underset{\sim}{f} = \{f_i\}_{i\in I}$ filtrata da $\mathcal{F}$ <u>cresce decisivamente in</u> x, se per ogni $Q \in N(x)$ esiste $V \in N(x)$, $\varepsilon > 0$ e $F \in \mathcal{F}$ tali che per $i \in F$ si ha

(5.5) $\quad Q \cap \mathrm{Min}\,(f_i) = \emptyset \Longrightarrow \inf_V f_i > \inf\,(f_i) + \varepsilon$

Teorema 5.4.

Supponiamo che $\underset{\sim}{f}$ superconverge ad f e la famiglia dei valori minimi subconverge, cioé

$$\liminf_{\mathcal{F}} \inf(\underset{\sim}{f}) \geq \inf(f)$$

e se $\underset{\sim}{f}$ cresce decisivamente (su Min(f)), allora

$$\text{Li Min}(\underset{\sim}{f}) \supset \text{Min}(f)$$

Prova

La seguente famiglia di funzioni

$$\hat{f} = \{\hat{f}_i\}_{i \in I} \quad , \quad \hat{f}_i(x) = f_i(x) - \inf(f_i)$$

superconverge a $\hat{f}(x) = f(x) - \inf(f)$. Infatti, sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $Q \in N(x)$ esiste $f \in F$ tale che per $i \in F$,

$$\inf_Q f_i \leq f(x) + \varepsilon \qquad e \ \inf(f_i) \geq \inf(f) - \varepsilon$$

allora

$$\inf_Q (f_i - \inf(f_i)) \leq f(x) - \inf(f) + 2\varepsilon$$

La condizione (5.5) equivale a :

per ogni $Q \in N(x)$ esiste $V \in N(x)$, $\varepsilon > 0$, $F \in F$ tali che per $i \in F$ la proprietà

$$\text{epi } f_i \cap V \times (\inf(f_i) - \varepsilon , \inf(f_i) + \varepsilon) \neq \emptyset$$

implica

$$\text{epi } f_i \cap Q \times \{\inf(f_i)\} \neq \emptyset$$

In altre parole, epi $\hat{f}_i \cap V \times (-\varepsilon,\varepsilon) \neq \emptyset$ implica epi $\hat{f}_i \cap Q \times \{0\} \neq \emptyset$.

Ma quest'ultima è precisamente la condizione che epi $\underset{\sim}{f}$ sia di tipo $\frac{\tau \times \nu}{\tau \times \iota}$ in $(x,0)$, dove τ è la topologia su X che stiamo considerando.

Grazie al teorema 4.1, abbiamo che

$$(\text{Li}^{\tau\times\iota} \text{ epi } \hat{\underset{\sim}{f}})^{-1}\, 0 = (\text{Li}^{\tau\times\nu} \text{ epi } \hat{\underset{\sim}{f}})^{-1}\, 0$$

e per ipotesi questo insieme include

$$(\text{epi } \hat{f})^{-1}(0) = \{x : f(x) \leq \inf(f)\} = \text{Min}(f).$$

Osserviamo infine che

$$\mathrm{Li}^{\tau\times\iota}\, \mathrm{epi}\, \hat{\underset{\sim}{f}})^{-1}\, 0 = \mathrm{Li}^{\tau}\, \{x : f_i(x) \leq \inf(f_i)\}_{i\in I} = \mathrm{Li}^{\tau}\mathrm{Min}(\underset{\sim}{f})$$

6. Appplicazione del confronto dei limiti alla differenziazione [7].

L'iperderivata (3.5) costituisce una generalizzazione della derivata direzionale di Clarke [12][16]. Se supponiamo che la topologia θ su $X \times \mathbb{R}$ sia di tipo $\sigma \times \nu$, dove ν è la topologia usuale di $\mathbb{R}$, e che la funzione f sia σ-semicontinua inferiormente in x, allora possiamo trascrivere (3.5) nel modo seguente

$$(6.1) \quad f^{\uparrow}(x)h = \sup_{Q\in N_\tau(h)} \inf_{V\in N_{\sigma\nu(\mathrm{epi}\, f)^{-1}\nu}(x)} \sup_{\substack{x'\in V \\ t<t_0}} \inf_{h'\in Q} (*)$$

dove $(*) = \frac{1}{t}\left[f(x' + th') - f(x')\right]$ e

dove $(\mathrm{epi}\, f)^{-1}\nu$ è la meno fine topologia per la quale f è semicontinua superiormente. Ora la derivata di Clarke si può definire come

$$(6.2) \quad f^{\circ}(x)h = \inf_{\substack{V\in N_{\sigma\nu(\mathrm{epi}\, f)^{-1}\nu} \\ t_0 > 0}} \sup_{\substack{x'\in V \\ t<t_0}} \frac{1}{t}\left[f(x'+th') - f(x')\right]$$

Per semplificare la notazione, poniamo $\rho = \sigma\, \nu(\mathrm{epi}\, f)^{-1}\nu$. Ci si chiede quali siano le condizioni sufficienti per l'uguaglianza

$$(6.3) \quad f^{\uparrow}(x)h = f^{\circ}(x)h$$

Una condizione è stata fornita da Rockafellar [17]. Una funzione f è detta direzionalmente lipschitiziana in x rispetto h se esistono $Q \in N_\tau(h)$, $V \in N_\rho(x)$, $t_0 > 0$ ed $M \in \mathbb{R}$ tali che

$$(6.4) \quad f(x' + th') - f(x') \leq Mt \qquad , t < t_0,\ x' \in V,\ h' \in Q .$$