3. Coni approssimanti.

Sia X uno spazio lineare e τ una topologia su X (non necessariamente compatibile con la struttura lineare dello spazio).

L'omotetia di un sottoinsieme C di X è la relazione

$$(3.1) \qquad (x,t) \to \frac{1}{t}(C-x), \qquad t > 0, x \in X.$$

Definiamo un cono tangente (di C in x) come

$$T_C^\tau(x) = \operatorname{Li}^\tau_{t\to 0} \frac{1}{t}(C-x),$$

il cono contingente

$$K_C^\tau(x) = \operatorname{Ls}^\tau_{t\to 0} \frac{1}{t}(C-x),$$

il cono interno

$$I_C^\tau(x) = (\operatorname{Ls}^\tau_{t\to 0} \frac{1}{t}(C^c - x))^c .$$

Sia θ un'altra topologia su X. Definiamo il cono ipertangente (di C in X) come

$$\tau_C^{\tau/\theta}(x) = \operatorname{Li}^\tau_{\substack{x\in C, x' \xrightarrow{\theta} x \\ t \to 0}} \frac{1}{t}(C - x')$$

(per diversi casi speciali vedi [16], [17], [12]).

In altre parole, $h \in \tau_C^{\tau/\theta}(x)$ se e solo se per ogni $Q \in \mathcal{N}_\tau(h)$ esistono $V \in \mathcal{N}_\theta(x)$ e $t_o > 0$ tali che per ogni $x' \in V \cap C$ e $t_o \geq t > 0$ si ha

$$(x' + tQ) \cap C \neq \emptyset$$

Teorema 3.1. ([7] [15])

Sia (X,θ) uno spazio topologico e vettoriale e sia τ tale che l'addizione è continua e la moltiplicazione è continua per ogni t fissato. Se $\theta \subset \tau$, allora $\tau_C^{\tau/\theta}(x)$ è convesso.

Se C è una relazione ad esempio

$$C : X \rightrightarrows Y$$

e τ , σ sono topologie in X e Y rispettivamente, allora possiamo definire il <u>cono di Hadamard</u> di C in (x,y):

$$H_C^{\tau/\sigma}(x,y) = \mathop{Lh}_{t\to o}^{\tau/\sigma} \frac{1}{t} (C -(x,y)) .$$

Dalla definizione segue che $k \in (H_C^{\tau/\sigma}(x,y))h$ se e solo se per ogni $Q \in \mathcal{N}_\tau(k)$ esistono $V \in \mathcal{N}_\sigma(h)$ e t_o tali che

$$(3.1) \qquad Q \cap \frac{1}{t} (C(x+th') - y) \neq \emptyset \qquad\qquad \text{per } t < t_o, \ h' \in V.$$

La formula (3.1) assomiglia molto alla definizione di derivata di Hadamard (dove k rappresenta il valore di tale derivata nella direzione h).

Tutte le definizioni qui presentate di coni approssimanti, riformulate per le applicazioni, diventano formule per derivate di vari tipi. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione, Y uno spazio vettoriale; <u>l'omotetia di</u> f in (x,f(x)) è l'applicazione

$$(t,h) \to \frac{f(x+th)-f(x)}{t} ,$$

cioé il <u>rapporto incrementale.</u>

Ricordiamo che un'applicazione A di uno spazio vettoriale topologico (X,τ) in uno spazio topologico (Y,σ) è la <u>derivata di Hadamard</u> se per ogni funzione $p : \mathbb{R}_+ \to X$ tale che $\lim_{t\to o} p(t) = h$ si ha

$$\lim_{t\to o} \frac{f(x+tp(t)) - f(x)}{t} = Ah$$

Di solito si chiede anche che A sia lineare e continua.

<u>Teorema 3.2</u> ([7])

Se (X,τ) è uno spazio vettoriale metrico, allora il cono di Hadamard di f in (x,f(x)) è il grafico della derivata di Hadamard di f in x.

I coni approssimanti applicati agli epigrafici ci permettono di ritrovare una varietà di derivate unilaterali, in particolare quella di Clarke. Visto che l'omotetia dell'epigrafico di una funzione è l'epigrafico del suo rapporto incrementale, abbiamo diversi tipi di <u>epi-derivate (tangenti, cotangenti, di Hadamard)</u>

$$(3.2)\quad f^{T}(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}(h)} \ \inf_{t_o} \ \sup_{t<t_o} \ \inf_{h'\in Q} \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

$$(3.3)\quad f^{K}(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}(h)} \ \sup_{t_o} \ \inf_{t<t_o} \ \inf_{h'\in Q} \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

$$(3.4)\quad f^{H}(x)h = \inf_{Q\in\mathcal{N}(h)} \ \inf_{t_o} \ \inf_{t<t_o} \ \sup_{h'\in Q} \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

Infine, l'<u>epi-iperderivata</u>

$$(3.5)\quad f^{\dagger}(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}_{\tau}(h)} \ \inf_{\substack{W\in N_{\theta}(x,f(x)) \\ t_o}} \ \sup_{\substack{(x',r')\in W\cap \mathrm{epi}\, f \\ t<t_o}} \ \inf_{h'\in Q} \quad (*)$$

dove $\qquad (*) = \frac{1}{t}\left[f(x'+th') - r'\right]$

4. <u>Confronto di limiti</u> ([7], [8])

Sia $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X filtrata da F su I. Se $\tau \subset \sigma$ sono topologie su X, allora

$$Li^{\tau}\underset{\sim}{A} \quad Li^{\sigma}\underset{\sim}{A}\,, \qquad\qquad Ls^{\tau}\underset{\sim}{A} \quad Ls^{\sigma}\underset{\sim}{A}\,.$$

Diciamo che $\underset{\sim}{A}$ è di <u>tipo</u> τ/σ <u>in</u> x se, per ogni $V\in\mathcal{N}_{\sigma}(x)$ esistono $Q\in N_{\tau}(x)$ e $F\in F$ tali che, per $i\in F$

$$Q\cap A_i \neq \emptyset \Longrightarrow V\cap A_i \neq \emptyset$$