$$A \in \operatorname{Lim} \underset{\sim}{A} \quad \text{ssse} \quad A \subset \operatorname{Li} \underset{\sim}{A}$$

costituisce una convergenza topologica, ma soltanto nell'ambito del sottospazio di 2^X composto dagli insiemi chiusi, mentre nello stesso sottospazio

$$A \in \operatorname{Lim} \underset{\sim}{A} \quad \text{sse} \quad \operatorname{Ls} \underset{\sim}{A} \subset A$$

è solamente una convergenza pseudotopologica.

2. Vari limiti di famiglie di insiemi.

Sia A una famiglia di sottoinsiemi di X. La griglia $A^{\#}$ di A è la famiglia degli insiemi di X che interseca tutti gli elementi di A.

Abbiamo che

$$\operatorname{Ls}^{\tau}_{F} \underset{\sim}{A} = \bigcap_{F \in F} \operatorname{Cl}_{\tau} \bigcup_{i \in F} A_i$$

(2.1)

$$\operatorname{Li}^{\tau}_{F} \underset{\sim}{A} = \bigcap_{H \in F^{*}} \operatorname{Cl} \bigcup_{i \in H} A_i$$

I limiti sono insiemi chiusi. Osserviamo inoltre che

(I) $\tau \subset \sigma$, allora $\operatorname{Ls}^{\tau} \supset \operatorname{Ls}^{\sigma}$, $\operatorname{Li}^{\tau} \supset \operatorname{Li}^{\sigma}$

(II) $F \subset G$, allora $\operatorname{Ls}_F \supset \operatorname{Ls}_G$, $\operatorname{Li}_F \subset \operatorname{Li}_G$

(III) $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, allora $\operatorname{Ls} \underset{\sim}{A} \subset \operatorname{Ls} \underset{\sim}{B}$, $\operatorname{Li} \underset{\sim}{A} \subset \operatorname{Li} \underset{\sim}{B}$

Se la topologia rispetto alla quale si sonsiderano questi limiti è quella discreta ι, allora i limiti diventano gli usuali limiti insiemistici.

Se tutti gli insiemi sono "singleton", allora il limite inferiore diventa il limite del filtro generato da

$$\{A_i : i \in F\}_{F \in \mathcal{F}}$$

mentre il limite superiore diventa "l'aderenza" di quel filtro.

Sia $\underset{\sim}{f} = \{f_i\}_{i \in I}$ una famiglia di funzioni a valori reali estesi definite su uno spazio topologico (Y,σ) e sia $\mathcal{F}$ un filtro su I. Definiamo [18] [13] [5] il limite inferiore e il limite superiore mediante:

(2.2)

$$(\mathrm{li}^{\sigma}_{\mathcal{F}}\, \underset{\sim}{f})(y) = \sup_{Q \in \mathcal{N}_{\sigma}(y)} \sup_{F \in \mathcal{F}} \inf_{i \in F} \inf_{y' \in Q} f_i(y')$$

$$(\mathrm{ls}^{\sigma}_{\mathcal{F}}\, \underset{\sim}{f})(y) = \sup_{Q \in \mathcal{N}_{\sigma}(y)} \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{i \in F} \inf_{y' \in Q} f_i(y')$$

Sia ν la topologia usuale di $\mathbb{R}$. Allora

(2.3)

$$\mathrm{epi}(\mathrm{li}^{\sigma}\, \underset{\sim}{f}) = \mathrm{Ls}^{\sigma \times \nu}\, \mathrm{epi}\, \underset{\sim}{f}$$

$$\mathrm{epi}(\mathrm{ls}^{\sigma}\underset{\sim}{f}) = \mathrm{Li}^{\sigma \times \nu}\, \mathrm{epi}\, \underset{\sim}{f},$$

dove

$$\mathrm{epi}\, f = \{(y,r) : r \geq f(y)\}$$

e l'epigrafico .

Se la funzione indicatrice χ_A di un insieme A è definita da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in A \\ +\infty & \text{se} \quad x \notin A \end{cases}$$

Si nota che

(2.4)
$$\mathrm{li}^{\sigma}\, \chi_{\underset{\sim}{A}} = \chi_{\mathrm{Ls}^{\sigma}\underset{\sim}{A}}\ , \quad \mathrm{ls}^{\sigma}\, \chi_{\underset{\sim}{A}} = \chi_{\mathrm{Li}^{\sigma}\underset{\sim}{A}}$$

Per ogni i e I sia $A_i \subset X \times Y$, cioé A_i è una relazione

$$A_i \rightrightarrows Y$$

Consideriamo due topologie τ su X e σ su Y e un filtro F su I.

<u>L'iperlimite</u> di $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i \in I}$

$$Lh_F^{\sigma/\tau}\ \underset{\sim}{A} \tag{2.5}$$

è composto dalle coppie (x,y) tali che, per ogni $Q \in \mathcal{N}_\sigma(y)$ esistono $V \in \mathcal{N}_\tau(x)$ e $F \in F$ tali che per ogni $x' \in V$ e $i \in F$, $A_i x' \cap Q \neq \emptyset$. Equivalentemente, usando le notazioni della teoria delle relazioni, $A_i^{-1}Q \supset V$.

Si osserva che

$$Lh^{\sigma/\iota} = Li^{\iota\times\sigma}$$

e anche

$$(Lh_F^{\sigma/\tau}\ \underset{\sim}{A})x = Li^{\sigma}_{F\times\mathcal{N}_\tau(x)}\ A_i x'$$

Per una famiglia $\underset{\sim}{f} = \{f_i\}_{i\in I}$ di funzioni a valori reali estesi definita su uno spazio topologico (X,τ) definiamo <u>l'iperlimite</u>

$$(lh_F^\tau \underset{\sim}{f})(x) = \inf_{Q\in N_\tau(x)}\ \inf_{F\in F}\ \sup_{i\in F}\ \sup_{x'\in Q}\ f_i(x') \tag{2.6}$$

Osserviamo che(per la topologia usuale ν di $\mathbb{R}$)

$$Lh_F^{\nu/\tau} \mathrm{epi}\ f = \mathrm{epi}(lh_F^\tau\ f)$$

I limiti (2.2) e (2.6) sono casi speciali dei G-limiti; questi ultimi sono definiti partendo dai T limiti corrispondenti tramite formule come la (2.3).