CONVERGENZE: APPLICAZIONI ALLA DIFFERENZIAZIONE GENERALIZZATA E ALL'OTTIMIZZAZIONE

Szymon Dolecki

(Accademia Polacca delle Scienze, Varsavia)

Lo scopo di queste note è far vedere come, usando alcuni semplici fatti della teoria delle convergenze, si riottengono in modo molto chiaro risultati le cui giustificazioni erano finora offuscate da molti tecnicismi.

1. Oggetti dello studio

Data una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di uno spazio topologico, si dice che x è nel limite $\lim_{n\to\infty} x_n$ (oppure, che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad x), se, per ogni intorno Q di x, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subset Q$.

Tale nozione si riferisce al comportamento delle successioni "quando n tende all'infinito". Il "tendere all'infinito" è un concetto relativo ad una struttura d'ordine (in questo caso, dei numeri naturali); esso si ritrova nell'idea di filtro, che è una sua, particolarmente riuscita, generalizzazione [2].

Sia X un insime. Una famiglia non vuota F di sottoinsiemi di X è detta filtro se essa non contiene il sottoinsieme vuoto e se

$$A \cap B \in F \quad \text{se e solo se} \quad A \in F \quad \text{e} \quad B \in F .$$

La famiglia di tutti i soprainsiemi delle code

$$\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\ldots\}$$

di una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un filtro, detto filtro elementare della successione.

Diciamo che un filtro F in uno spazio topologico X converge ad $x \in X$, se per ogni intorno Q di x esiste $F \in F$ tale che $F \subset Q$. In altre parole, un filtro converge ad x se ogni intorno di x è contenuto in questo filtro. Diciamo allora che x appartiene al limite di F e scriviamo

$x \in \mathrm{Lim}\, F$.

Notiamo che "Lim" definisce un'applicazione dell'insieme ϕX (di tutti i filtri su X) in 2^X (famiglia di tutti i sottoinsiemi di X):

$$\mathrm{Lim} : \phi X \to 2^X .$$

Tenendo conto che $F \leq G$ (diciamo che G è *più fine* di F, $F \leq G$, quando F è incluso in G) definisce una struttura d'ordine su ϕX e che l'inclusione definisce una struttura d'ordine su 2^X, risulta che

(i) $\qquad \mathrm{Lim}$ è monotona.

Il filtro *discreto* di x,

$$N_\iota(x) = \{A \in 2^X : x \in A\}$$

soddisfa

(ii) $\qquad x \in \mathrm{Lim}\, N_\iota(x)$.

Per ogni filtro F si ha

(iii) $\qquad \mathrm{Lim}\, F = \bigcap_{G \supset F} \left(\bigcup_{H \supset G} \mathrm{Lim}\, H \right)$

Si verifica inoltre che, per ogni famiglia di filtri $\{F_i\}_{i \in I}$, si ha

(iv) $\qquad \mathrm{Lim} \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Lim}\, F_i$

Per formulare un'altra proprietà del limite, consideriamo un'applicazione

$$\mathcal{M} : X \to \phi X$$

ed un filtro $F \in \phi X$. Il *limite inferiore di* M *lungo* F è il filtro

$$\mathrm{Li}_F M$$

definito dalla posizione:

$Q \in \mathrm{Li}_F M$ se e solo se esiste $F \in F$ tale che per $x \in F$ si ha $Q \in M(x)$.

Abbiamo che

(v) Se $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$ e per ogni $x' \in X$, $x' \in \operatorname{Lim} \mathcal{M}(x)$, allora

$$x \in \operatorname{Lim}(\operatorname{Li}_{\mathcal{F}} \mathcal{M}) \ .$$

Le proprietà (i)-(v) servono da assiomi a varie nozioni di <u>convergenza</u> [4] [3] [11] [9].

Un'applicazione di ϕX in 2^X è una <u>convergenza</u> se soddisfa (i), una <u>convergenza in senso stretto</u> se verifica (i), (ii). Se inoltre verifica (iii) è una <u>convergenza pseudotopologica</u>, mentre se vale anche (iv) si ha una <u>convergenza pretopologica.</u> Se aggiungiamo anche l'assioma (v) otteniamo una <u>convergenza topologica.</u>

Oggetto delle nostre considerazioni saranno le convergenze dei filtri su 2^Z, dove (Z,τ) è uno spazio topologico.

Sia $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di Z e sia $\mathcal{F}$ un filtro su I. Chiaramente, $\mathcal{F}$ induce su 2^Z il filtro composto dalle soprafamiglie di $\{A_i : i \in F\}$, $F \in \mathcal{F}$, e viceversa, ogni filtro su 2^Z può essere rappresentato come una famiglia filtrata.

Il <u>limite superiore</u> di $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, che indicheremo

$$\operatorname{Ls} \underset{\sim}{A} = \operatorname{Ls}^{\tau}_{\mathcal{F}} \underset{\sim}{A} \quad ,$$

è composto dagli elementi z tali che, per ogni intorno $Q \in \mathcal{N}_\tau(z)$ ed ogni $F \in \mathcal{F}$ esiste $i \in F$ tale che $Q \cap A_i \neq \emptyset$

Il <u>limite inferiore</u>

$$\operatorname{Li} \underset{\sim}{A} = \operatorname{Li}^{\tau}_{\mathcal{F}} \underset{\sim}{A}$$

è l'insieme degli z tali che, per ogni $Q \in \mathcal{N}_\tau(z)$ esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $Q \cap A_i \neq \emptyset$ per ciascun i in F (vedi [14]).

Si noti [4] che il limite definito da

$$A \in \operatorname{Lim} \underset{\sim}{A} \quad \text{ssse} \quad A \subset \operatorname{Li} \underset{\sim}{A}$$

costituisce una convergenza topologica, ma soltanto nell'ambito del sottospazio di 2^X composto dagli insiemi chiusi, mentre nello stesso sottospazio

$$A \in \operatorname{Lim} \underset{\sim}{A} \quad \text{sse} \quad \operatorname{Ls} \underset{\sim}{A} \subset A$$

è solamente una convergenza pseudotopologica.

2. Vari limiti di famiglie di insiemi.

Sia A una famiglia di sottoinsiemi di X. La griglia $A^{\#}$ di A è la famiglia degli insiemi di X che interseca tutti gli elementi di A.

Abbiamo che

$$\operatorname{Ls}_F^{\tau} \underset{\sim}{A} = \bigcap_{F \in F} \operatorname{Cl}_{\tau} \bigcup_{i \in F} A_i$$

(2.1)

$$\operatorname{Li}_F^{\tau} \underset{\sim}{A} = \bigcap_{H \in F^*} \operatorname{Cl} \bigcup_{i \in H} A_i$$

I limiti sono insiemi chiusi. Osserviamo inoltre che

(1) $\tau \subset \sigma$, allora
$$L_s^{\tau} \supset L_s^{\sigma}$$
$$L_i^{\tau} \supset L_i^{\sigma}$$

(11) $F \subset G$, allora
$$\operatorname{Ls}_F \supset \operatorname{Ls}_G$$
$$\operatorname{Li}_F \subset \operatorname{Li}_G$$

(111) $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, allora
$$\operatorname{Ls} \underset{\sim}{A} \subset \operatorname{Ls} \underset{\sim}{B}$$
$$\operatorname{Li} \underset{\sim}{A} \subset \operatorname{Li} \underset{\sim}{B}$$

Se la topologia rispetto alla quale si sonsiderano questi limiti è quella discreta ι, allora i limiti diventano gli usuali limiti insiemistici.

Se tutti gli insiemi sono "singleton", allora il limite inferiore diventa il limite del filtro generato da

$$\{A_i : i \in F\}_{F \in F}$$

mentre il limite superiore diventa "l'aderenza" di quel filtro.

Sia $\underset{\sim}{f} = \{f_i\}_{i \in I}$ una famiglia di funzioni a valori reali estesi definite su uno spazio topologico (Y,σ) e sia F un filtro su I. Definiamo [18] [13] [5] il limite inferiore e il limite superiore mediante:

(2.2)

$$(li^{\sigma}_{F}\, \underset{\sim}{f})(y) = \sup_{Q \in N_{\sigma}(y)} \sup_{F \in F} \inf_{i \in F} \inf_{y' \in Q} f_i(y')$$

$$(ls^{\sigma}_{F}\, \underset{\sim}{f})(y) = \sup_{Q \in N_{\sigma}(y)} \inf_{F \in F} \sup_{i \in F} \inf_{y' \in Q} f_i(y')$$

Sia ν la topologia usuale di $\mathbb{R}$. Allora

(2.3)

$$epi(li^{\sigma}\, \underset{\sim}{f}) = Ls^{\sigma \times \nu}\ epi\ \underset{\sim}{f}$$

$$epi(ls^{\sigma}\underset{\sim}{f}) = Li^{\sigma \times \nu}\ epi\ \underset{\sim}{f},$$

dove

$$epi\ f = \{(y,r) : r \geq f(y)\}$$

e l'epigrafico .

Se la funzione indicatrice χ_A di un insieme A è definita da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \in A \\ +\infty & se \quad x \notin A \end{cases}$$

Si nota che

(2.4) $$li^{\sigma}\, \chi_{\underset{\sim}{A}} = \chi_{Ls^{\sigma}\underset{\sim}{A}}\ ,\ ls^{\sigma}\, \chi_{\underset{\sim}{A}} = \chi_{Li^{\sigma}\underset{\sim}{A}}$$

Per ogni $i \in I$ sia $A_i \subset X \times Y$, cioé A_i è una relazione

$$A_i \overset{\rightarrow}{\rightarrow} Y$$

Consideriamo due topologie τ su X e σ su Y e un filtro F su I.
<u>L'iperlimite</u> di $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i \in I}$

(2.5) $$Lh_F^{\sigma/\tau} \underset{\sim}{A}$$

è composto dalle coppie (x,y) tali che, per ogni $Q \in \mathcal{N}_\sigma(y)$ esistono $V \in \mathcal{N}_\tau(x)$ e $F \in F$ tali che per ogni $x' \in V$ e $i \in F$, $A_i x' \cap Q \neq \emptyset$. Equivalentemente, usando le notazioni della teoria delle relazioni, $A_i^{-1} Q \supset V$.

Si osserva che

$$Lh^{\sigma/\iota} = Li^{\iota \times \sigma}$$

e anche

$$(Lh_F^{\sigma/\tau} \underset{\sim}{A})x = Li^{\sigma}_{F \times \mathcal{N}_\tau(x)} A_i x'$$

Per una famiglia $\underset{\sim}{f} = \{f_i\}_{i \in I}$ di funzioni a valori reali estesi definita su uno spazio topologico (X,τ) definiamo <u>l'iperlimite</u>

(2.6) $$(lh_F^\tau \underset{\sim}{f})(x) = \inf_{Q \in N_\tau(x)} \inf_{F \in F} \sup_{i \in F} \sup_{x' \in Q} f_i(x')$$

Osserviamo che (per la topologia usuale ν di $\mathbb{R}$)

$$Lh_F^{\nu/\tau} \operatorname{epi} f = \operatorname{epi}(lh_F^\tau f)$$

I limiti (2.2) e (2.6) sono casi speciali dei G-limiti; questi ultimi sono definiti partendo dai T limiti corrispondenti tramite formule come la (2.3).

3. Coni approssimanti.

Sia X uno spazio lineare e τ una topologia su X (non necessariamente compatibile con la struttura lineare dello spazio).
L'omotetia di un sottoinsieme C di X è la relazione

$$(3.1) \qquad (x,t) \to \frac{1}{t}(C-x), \qquad t > 0,\ x \in X .$$

Definiamo un cono tangente (di C in x) come

$$T_C^\tau(x) = \mathrm{Li}^\tau_{t\to o} \frac{1}{t}(C-x),$$

il cono contingente

$$K_C^\tau(x) = \mathrm{Ls}^\tau_{t\to o} \frac{1}{t}(C-x),$$

il cono interno

$$I_C^\tau(x) = (\mathrm{Ls}^\tau_{t\to o} \frac{1}{t}(C^c - x))^c .$$

Sia θ un'altra topologia su X. Definiamo il cono ipertangente (di C in X) come

$$\tau_C^{\tau/\theta}(x) = \mathrm{Li}^\tau_{\substack{x\in C,\, x' \xrightarrow{\theta} x \\ t \to o}} \frac{1}{t}(C - x')$$

(per diversi casi speciali vedi [16],[17],[12]).
In altre parole, $h \in \tau_C^{\tau/\theta}(x)$ se e solo se per ogni $Q \in \mathcal{N}_\tau(h)$ esistono $V \in \mathcal{N}_\theta(x)$ e $t_o > 0$ tali che per ogni $x' \in V \cap C$ e $t_o \geq t > 0$ si ha

$$(x' + tQ) \cap C \neq \emptyset$$

Teorema 3.1. ([7] [15])

Sia (X,θ) uno spazio topologico e vettoriale e sia τ tale che l'addizione è continua e la moltiplicazione è continua per ogni t fissato. Se $\theta \subset \tau$, allora $\tau_C^{\tau/\theta}(x)$ è convesso.

Se C è una relazione ad esempio

$$C : X \rightrightarrows Y$$

e τ , σ sono topologie in X e Y rispettivamente, allora possiamo definire il cono di Hadamard di C in (x,y):

$$H_C^{\tau/\sigma}(x,y) = \underset{t\to o}{Lh^{\tau/\sigma}} \frac{1}{t}(C-(x,y)) .$$

Dalla definizione segue che $k \in (H_C^{\tau/\sigma}(x,y))h$ se e solo se per ogni $Q \in \mathcal{N}_\tau(k)$ esistono $V \in \mathcal{N}_\sigma(h)$ e t_o tali che

(3.1) $\quad Q \cap \frac{1}{t}(C(x+th') - y) \neq \emptyset \qquad$ per $t < t_o$, $h' \in V$.

La formula (3.1) assomiglia molto alla definizione di derivata di Hadamard (dove k rappresenta il valore di tale derivata nella direzione h).

Tutte le definizioni qui presentate di coni approssimanti, riformulate per le applicazioni, diventano formule per derivate di vari tipi. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione, Y uno spazio vettoriale; l'omotetia di f in (x,f(x)) è l'applicazione

$$(t,h) \to \frac{f(x+th)-f(x)}{t} ,$$

cioé il rapporto incrementale.

Ricordiamo che un'applicazione A di uno spazio vettoriale topologico (X,τ) in uno spazio topologico (Y,σ) è la derivata di Hadamard se per ogni funzione $p : \mathbb{R}_+ \to X$ tale che $\lim\limits_{t\to o} p(t) = h$ si ha

$$\lim_{t\to o} \frac{f(x+tp(t)) - f(x)}{t} = Ah$$

Di solito si chiede anche che A sia lineare e continua.

Teorema 3.2 ([7])

Se (X,τ) è uno spazio vettoriale metrico, allora il cono di Hadamard di f in (x,f(x)) è il grafico della derivata di Hadamard di f in x.

Università degli Studi Facoltà di Scienze · Lecce · Dipartimento di Matematica

I coni approssimanti applicati agli epigrafici ci permettono di ritrovare una varietà di derivate unilaterali, in particolare quella di Clarke. Visto che l'omotetia dell'epigrafico di una funzione è l'epigrafico del suo rapporto incrementale, abbiamo diversi tipi di <u>epi-derivate (tangenti, cotangenti, di Hadamard)</u>

$$(3.2)\quad f^{T}(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}(h)}\ \inf_{t_0}\ \sup_{t<t_0}\ \inf_{h'\in Q}\ \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

$$(3.3)\quad f^{K}(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}(h)}\ \sup_{t_0}\ \inf_{t<t_0}\ \inf_{h'\in Q}\ \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

$$(3.4)\quad f^{H}(x)h = \inf_{Q\in\mathcal{N}(h)}\ \inf_{t_0}\ \inf_{t<t_0}\ \sup_{h'\in Q}\ \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

Infine, l'<u>epi-iperderivata</u>

$$(3.5)\quad f^{\uparrow}(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}_{\tau}(h)}\ \inf_{\substack{W\in\mathcal{N}_{\theta}(x,f(x))\\ t_0}}\ \sup_{\substack{(x',r')\in W\cap \mathrm{epi}\, f\\ t<t_0}}\ \inf_{h'\in Q}\ (*)$$

dove $(*) = \frac{1}{t}\left[f(x'+th') - r'\right]$

4. <u>Confronto di limiti</u> ([7], [8])

Sia $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X filtrata da F su I. Se $\tau \subset \sigma$ sono topologie su X, allora

$$\mathrm{Li}^{\tau}\underset{\sim}{A} \quad \mathrm{Li}^{\sigma}\underset{\sim}{A}\ , \qquad\qquad \mathrm{Ls}^{\tau}\underset{\sim}{A} \quad \mathrm{Ls}^{\sigma}\underset{\sim}{A}\ .$$

Diciamo che $\underset{\sim}{A}$ è di <u>tipo</u> τ/σ <u>in</u> x se, per ogni $V \in \mathcal{N}_{\sigma}(x)$ esistono $Q \in N_{\tau}(x)$ e $F \in F$ tali che, per $i \in F$

$$Q\cap A_i \neq \emptyset \implies V\cap A_i \neq \emptyset$$

Teorema 4.1.

Se $\underset{\sim}{A}$ è di tipo τ/σ su $\mathrm{Li}^{\tau}\,\underset{\sim}{A}$, allora

$$\mathrm{Li}^{\tau}\,\underset{\sim}{A} \subset \mathrm{Li}^{\sigma}\,\underset{\sim}{A} \ .$$

Teorema 4.2.

Se $\underset{\sim}{A}$ è di tipo τ/σ su $\mathrm{Ls}^{\tau}\,\underset{\sim}{A}$, allora

$$\mathrm{Ls}^{\tau}\,\underset{\sim}{A} \subset \mathrm{Ls}^{\sigma}\,\underset{\sim}{A} \ .$$

Nel caso degli epigrafici ($A_i = \mathrm{epi}\, f_i$) la nozione di tipo τ/σ può essere sostituita da quella di equi-semicontinuità.

Siano ρ, θ due topologie su Y. Una famiglia $\underset{\sim}{f} = \{f_i\}_{i \in I}$ indicizzata da F è chiamata θ/ρ-equi-semicontinua in y se per ogni $V \in N_{\rho}(y), \varepsilon > 0$ esistono $Q \in N_{\theta}(y)$, $F \in F$ tali che, per $i \in F$ vale

$$\inf_{Q} f_i \geq \inf_{V} f_i - \varepsilon \tag{4.1}$$

Notiamo che nel caso della topologia discreta $\underset{\sim}{f}$ è θ/ι-equi-semicontinua in y se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $Q \in N_{\theta}(y)$, $F \in F$ tali che per $i \in F$ risulta

$$\inf_{Q} f_i \geq f_i(y) - \varepsilon$$

Teorema 4.3.

Se $\underset{\sim}{f}$ è θ/ρ-equi-semicontinua sul dominio

$$\mathrm{dom}\,\mathrm{ls}^{\theta}\,\underset{\sim}{f} = \{y : (\mathrm{ls}^{\tau}\,\underset{\sim}{f}) < +\infty\}$$

allora

$$\mathrm{ls}^{\rho}\,\underset{\sim}{f} \leq \mathrm{ls}^{\theta}\,\underset{\sim}{f}$$

Teorema 4.4.

Se $\underset{\sim}{f}$ è θ/ρ-equi-semicontinua sul dominio di $li^{\theta}\,\underset{\sim}{f}$, allora

$$li^{\rho}\,\underset{\sim}{f} \leq li^{\theta}\,\underset{\sim}{f}\,.$$

Questi teoremi forniscono delle condizioni sufficienti per l'inversione delle disuguaglianze usuali:

(4.2) Se $\theta \subset \rho$, allora
$$li^{\theta}\,\underset{\sim}{f} \leq li^{\rho}\,\underset{\sim}{f}$$
$$ls^{\theta}\,\underset{\sim}{f} \leq ls^{\rho}\,\underset{\sim}{f}$$

che si ottengono da (2.3).

Si osserva che $\frac{\theta \times \nu}{\rho \times \nu}$ tipo di epi $\underset{\sim}{f}$ implica θ/ρ-equi-semicontinuità, mentre l'inverso vale per le funzioni equilimitate.

5. Qualche applicazione all'ottimizzazione [8]

(Vedi [6],[19], [1] per i risultati simili sotto ipotesi più forti)

Teorema 5.1.

Se $\underset{\sim}{f}$ superconverge ad f, cioé se

(5.1) $$ls_{F}^{\tau}\,\underset{\sim}{f} \leq f,$$

allora per i valori minimi vale

(5.2) $$\limsup_{F}\,\inf(\underset{\sim}{f}) \leq \inf(f)$$

Prova

La topologia caotica 0 è la meno fine di tutte le topologie, perciò

$$ls^{0}\,\underset{\sim}{f} \leq ls^{\tau}\,\underset{\sim}{f} \leq \underset{\sim}{f}\,,$$

e siccome

$$\mathrm{ls}_F^0 \ \underset{\sim}{f}(y) = \sup_{F \in \mathcal{F}} \ \inf_{i \in F} \ \inf_{y' \in Y} f_i(y') = \limsup_F \inf (\underset{\sim}{f})$$

segue la tesi.

Lemma 5.2.

Se $\underset{\sim}{f}$ subconverge ad f, cioé se

$$\mathrm{li}_F^{\tau} \ \underset{\sim}{f} \geq f \tag{5.3}$$

e $r \in \mathbb{R}$, allora per gli insiemi di livello vale

$$\mathrm{L}_F^{\tau} \{x : f_i(x) \leq r\} \subset \{x : f(x) \leq r\} \tag{5.4}$$

Prova

Come sempre ν indica la topologia naturale di $\mathbb{R}$, mentre ι indica quella discreta. Poiché $\tau \times \nu \subset \tau \times \iota$, allora si ha

$$\mathrm{Ls}^{\tau \times \iota} \operatorname{epi} \underset{\sim}{f} \subset \mathrm{Ls}^{\tau \times \nu} \operatorname{epi} \underset{\sim}{f} .$$

Si verifica facilmente che

$$\mathrm{Ls}^{\tau} \{x : f_i(x) \leq r\} = (\mathrm{Ls}^{\tau \times \iota} \operatorname{epi} \underset{\sim}{f})^{-1} r$$

La formula (5.3) (grazie a (2.3)) equivale a

$$\mathrm{Ls}^{\tau \times \iota} \operatorname{epi} \underset{\sim}{f} \subset \operatorname{epi} f = \{x : f(x) \leq r\} .$$

Da ciò segue la (5.4).

Teorema 5.2

Se $\underset{\sim}{f}$ epi-converge ad f (cioé superconverge e subconverge nello stesso tempo), allora per gli insiemi dei minimi vale

$$\mathrm{Ls}_F^{\tau} \ \mathrm{Min}(\underset{\sim}{f}) \subset \mathrm{Min}(f)$$

dove

$$\mathrm{Min}(f) = \{x : f(x) \leq \inf(f)\}$$

Prova

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che

$$\inf(f_i) < \inf(f) + \varepsilon$$

quando $i \in F$ (teorema 5.1). Dunque

$$\mathrm{Ls}\ \mathrm{Min}(f_i) \subset \mathrm{Ls}\ \{x : f_i(x) \leq \inf(f) + \varepsilon\} \subset$$

$$\subset \{x : f(x) \leq \inf(f) + \varepsilon\}$$

grazie al Lemma 5.2. Ora basta osservare che

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \{x : f(x) \leq \inf(f) + \varepsilon\} = \mathrm{Min}(f)$$

In altre parole, il Teorema 5.3 stabilisce che ogni punto d'accumulazione di minimi di $\{f_i\}_{i\in I}$ è un minimo della funzione limite f.

Per ottenere un risultato che garantisca per ogni minimo x di f l'esistenza di una famiglia di minimi di $\{f_i\}_{i\in I}$ convergente verso x, si ha bisogno di una condizione supplementare sul comportamento di $\{f_i\}_{i\in I}$.

Diciamo che una famiglia $\underset{\sim}{f} = \{f_i\}_{i\in I}$ filtrata da $\mathcal{F}$ cresce decisivamente in x, se per ogni $Q \in N(x)$ esiste $V \in N(x)$, $\varepsilon > 0$ e $F \in \mathcal{F}$ tali che per $i \in F$ si ha

$$(5.5) \qquad Q \cap \mathrm{Min}\ (f_i) = \emptyset \Longrightarrow \inf_V f_i > \inf\ (f_i) + \varepsilon$$

Teorema 5.4.

Supponiamo che $\underset{\sim}{f}$ superconverge ad f e la famiglia dei valori minimi subconverge, cioé

$$\liminf_{\mathcal{F}} \inf(\underset{\sim}{f}) \geq \inf(f)$$

e se $\underset{\sim}{f}$ cresce decisivamente (su $\mathrm{Min}(f)$), allora

$$\mathrm{Li}\ \mathrm{Min}(\underset{\sim}{f}) \supset \mathrm{Min}(f)$$

<u>Prova</u>

La seguente famiglia di funzioni

$$\hat{f} = \{\hat{f}_i\}_{i \in I} \quad , \quad \hat{f}_i(x) = f_i(x) \ - \inf(f_i)$$

superconverge a $\hat{f}(x) = f(x) - \inf(f)$. Infatti, sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $Q \in N(x)$ esiste $f \in F$ tale che per $i \in F$,

$$\inf_Q f_i \leq f(x) + \varepsilon \qquad \text{e } \inf(f_i) \geq \inf(f) - \varepsilon$$

allora

$$\inf_Q (f_i - \inf (f_i)) \leq f(x) - \inf(f) + 2\varepsilon$$

La condizione (5.5) equivale a :

per ogni $Q \in N(x)$ esiste $V \in N(x)$, $\varepsilon > 0$, $F \in F$ tali che per $i \in F$ la proprietà

$$\mathrm{epi}\ f_i \cap V \times (\inf (f_i) - \varepsilon \ , \ \inf (f_i) + \varepsilon) \neq \emptyset$$

implica

$$\mathrm{epi}\ f_i \cap Q \times \{\inf (f_i)\} \neq \emptyset$$

In altre parole, $\mathrm{epi}\ \hat{f}_i \cap V \times (-\varepsilon,\varepsilon) \neq \emptyset$ implica $\mathrm{epi}\ \hat{f}_i \cap Q \times \{0\} \neq \emptyset$.

Ma quest'ultima è precisamente la condizione che $\mathrm{epi}\ \underset{\sim}{f}$ sia di tipo $\frac{\tau \times \nu}{\tau \times \iota}$ in $(x,0)$, dove τ è la topologia su X che stiamo considerando.

Grazie al teorema 4.1, abbiamo che

$$(\mathrm{Li}^{\tau \times \iota}\ \mathrm{epi}\ \underset{\sim}{\hat{f}})^{-1}\ 0 = (\mathrm{Li}^{\tau \times \nu}\ \mathrm{epi}\ \underset{\sim}{\hat{f}})^{-1}\ 0$$

e per ipotesi questo insieme include

$$(\mathrm{epi}\ \hat{f})^{-1}(0) = \{x : f(x) \leq \inf(f)\} = \mathrm{Min}\ (f).$$

Osserviamo infine che

$$\operatorname{Li}^{\tau \times \iota} \operatorname{epi} \underset{\sim}{\hat{f}})^{-1}\, 0 = \operatorname{Li}^{\tau} \{x : f_i(x) \leq \inf(f_i)\}_{i \in I} = \operatorname{Li}^{\tau} \operatorname{Min}(\underset{\sim}{f})$$

6. Appplicazione del confronto dei limiti alla differenziazione [7].

L'iperderivata (3.5) costituisce una generalizzazione della derivata direzionale di Clarke [12][16]. Se supponiamo che la topologia θ su $X \times \mathbb{R}$ sia di tipo $\sigma \times \nu$, dove ν è la topologia usuale di $\mathbb{R}$, e che la funzione f sia σ-semicontinua inferiormente in x, allora possiamo trascrivere (3.5) nel modo seguente

$$(6.1) \quad f^{\uparrow}(x)h = \sup_{Q \in N_\tau(h)} \; \inf_{V \in N_{\sigma \vee (\operatorname{epi} f)^{-1}\nu}(x)} \; \sup_{\substack{x' \in V \\ t < t_0}} \; \inf_{h' \in Q} \; (*)$$

dove $(*) = \frac{1}{t}\left[f(x' + th') - f(x')\right]$ e

dove $(\operatorname{epi} f)^{-1}\nu$ è la meno fine topologia per la quale f è semicontinua superiormente. Ora la derivata di Clarke si può definire come

$$(6.2) \qquad f^{\circ}(x)h = \inf_{\substack{V \in N_{\sigma \vee (\operatorname{epi} f)^{-1}\nu} \\ t_0 > 0}} \; \sup_{\substack{x' \in V \\ t < t_0}} \; \frac{1}{t}\left[f(x'+th') - f(x')\right]$$

Per semplificare la notazione, poniamo $\rho = \sigma \vee (\operatorname{epi} f)^{-1}\nu$. Ci si chiede quali siano le condizioni sufficienti per l'uguaglianza

$$(6.3) \qquad f^{\uparrow}(x)h = f^{\circ}(x)h$$

Una condizione è stata fornita da Rockafellar [17]. Una funzione f è detta direzionalmente lipschitiziana in x rispetto h se esistono

$Q \in N_\tau(h)$, $V \in N_\rho(x)$, $t_0 > 0$ ed $M \in \mathbb{R}$ tali che

$$(6.4) \quad f(x' + th') - f(x') \leq Mt \qquad , \; t < t_0, \; x' \in V, \; h' \in Q .$$

Se f è direzionalmente lipschitiziana in x rispetto h, allora vale (6.3).

Poiché

$$f^{\dagger}(x)h = \mathrm{ls}^{\tau}_{N_\rho(x)\times N(0)} \quad , \quad f^{\circ}(x) = \mathrm{ls}^{\iota}_{N_\rho(x)\times N(0)} \quad ,$$

sarà sufficiente richiedere che la famiglia delle funzioni

$$\{ \frac{1}{t} [f(x' + t\,.) - f(x')] \}_{t>0, x' \in X}$$

sia τ/ι equi-semicontinua in h. Questo equivale alla seguente condizione:

(6.5) Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $Q \in N_\tau(h)$, $V \in N_\rho(x)$, $t_0 > 0$ tali che

$$f(x' + th) - f(x' + th') \leq \varepsilon t, \quad t < t_0,\ x' \in V,\ h' \in Q.$$

Teorema 6.1.

La formula (6.5) implica (6.3).

Ad esempio, se g è una funzione localmente lipschitiziana ed A è un poliedro (in uno spazio normato), allora $g + \delta_A$ soddisfa (6.5) ma non (6.4).

7. Limiti di intersezione [8] , [7]

Siano $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i\in I}$, $\underset{\sim}{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ famiglie di sottoinsiemi di Z filtrate da F e sia θ una topologia su Z. In generale si ha

$$\mathrm{Li}(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \subset \mathrm{Li}\,\underset{\sim}{A} \cap \mathrm{Li}\,\underset{\sim}{B}$$

(7.1)

$$\mathrm{Ls}(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \subset \mathrm{Ls}\,\underset{\sim}{A} \cap \mathrm{Ls}\,\underset{\sim}{B}$$

e quindi la subconvergenza di $\underset{\sim}{A}$ ad A e di $\underset{\sim}{B}$ a B implicano la subconvergenza di $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ ad $A \cap B$.

Ci proponiamo di stabilire delle condizioni sufficienti affinché la superconvergenza delle famiglie implichi la superconvergenza delle loro intersezioni.

Le famiglie $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ sono <u>equi-attratte</u> in z se, per ogni $Q \in N(z)$ esistono $W \in N(z)$ e $F \in \mathcal{F}$ tali che, per $i \in F$

$$(7.2) \qquad \begin{matrix} A_i \cap W \neq \emptyset \\ B_i \cap W \neq \emptyset \end{matrix} \implies A_i \cap B_i \cap Q \neq \emptyset$$

<u>Teorema 7.1.</u>

Se $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ sono equi-attratte in z, e z appartiene a $\mathrm{Li}\,\underset{\sim}{A} \cap \mathrm{Li}\,\underset{\sim}{B}$, allora $z \in \mathrm{Li}(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})$.

Sia $\underset{\sim}{A}$ una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di relazioni, cioé per ogni $i \in I$, $A_i \subset X \times Y$. Il dominio $\mathcal{D}(A)$ di una relazione è l'insieme degli x per i quali $Ax \neq \emptyset$. In genere

$$(7.3) \qquad \begin{matrix} \mathrm{Ls}^{\tau} \mathcal{D}(\underset{\sim}{A}) \supset \mathcal{D}(\mathrm{Ls}^{\tau \times \sigma} A) \\ \mathrm{Li}^{\tau} \mathcal{D}(\underset{\sim}{A}) \supset \mathcal{D}(\mathrm{Li}^{\tau \times \sigma} \underset{\sim}{A}) \end{matrix}$$

Si ha $\mathrm{Ls}^{\tau} \mathcal{D}(\underset{\sim}{A}) = \mathcal{D}(\mathrm{Ls}^{\tau \times \sigma} \underset{\sim}{A})$ se (Y,σ) è uno spazio compatto (più generalmente, se i filtri $\underset{\sim}{A}\mathcal{F} \vee \mathcal{D}^{-1} N_{\tau}(x)$, $x \in X$, sono compattoidi, vedi [10]).

8. <u>Applicazioni all'ottimizzazione</u>

Faremo vedere come si ottengono dei risultati identici a quelli del paragrafo 5 usando quanto detto per la convergenza delle intersezioni [8].

Teorema 8.1

Sia $\underset{\sim}{f} = \{f_i\}_{i \in I}$ una famiglia di funzioni reali su (X,τ). Supponiamo che esistano dei numeri finiti $a < b$ tali che $a \leq \inf(f_i) \leq b$ per ogni $i \in I$. Se $\underset{\sim}{f}$ subconverge ad f e

(8.1) $$\mathrm{ls}_F \inf(\underset{\sim}{f}) \leq \inf(f)$$

(in particolare, se $\underset{\sim}{f}$ superconverge ad f) allora

(8.2) $$\mathrm{Ls}_F^\tau \operatorname{Min}(\underset{\sim}{f}) \subset \operatorname{Min}(f).$$

Prova

Osserviamo che

(8.3) $$\operatorname{Min}(f) = \mathcal{D}(\mathrm{epi}\, f \cap \mathrm{hypo} \inf(f)),$$

dove $\mathrm{hypo}(g) = \{(x,r): r \leq g(x)\}$. Vediamo che $\mathrm{epi}\, f_i \cap \mathrm{hypo} \inf(f_i)$ è, per ogni $i \in I$, un sottoinsieme di $[a,b]$ (uno spazio compatto). Ora, la subconvergenza di $\underset{\sim}{f}$ ad f equivale a $\mathrm{Ls}(\mathrm{epi}\, \underset{\sim}{f}) \subset \mathrm{epi}\, f$, mentre (8.1) è equivalente a $\mathrm{Ls}(\mathrm{hypo} \inf(\underset{\sim}{f})) \subset \mathrm{hypo} \inf(f)$. Perciò

$$\mathrm{Ls}(\mathrm{epi}\, \underset{\sim}{f} \cap \mathrm{hypo} \inf(\underset{\sim}{f})) \subset \mathrm{epi}\, f \cap \mathrm{hypo} \inf(f),$$

e quindi, grazie alla compattezza di $[a,b]$, ricordando (8.3) si ha (8.2).

Presentiamo adesso una dimostrazione alternativa del

Teorema 5.4

Supponiamo che $\underset{\sim}{f}$ superconverge ad f e che la famiglia dei valori minimi subconverge

(8.4) $$\liminf_F \inf(\underset{\sim}{f}) \geq \inf(f)$$

Se $\underset{\sim}{f}$ cresce decisivamente(su $\operatorname{Min}(f)$), allora

$$\mathrm{Li} \operatorname{Min}(\underset{\sim}{f}) \supset \operatorname{Min} f \quad .$$

Prova

Abbiamo $\mathrm{Li}^{\tau\times\nu}$ epi $\underset{\sim}{f} \supset$ epi f e, in virtù di (8.4), $\mathrm{Li}^{\tau\times\nu}$ hypo $\inf(\underset{\sim}{f}) \supset$ $\supset$ hypo inf(f). Proviamo che, se f cresce decisivamente in x, allora nel nostro caso epi $\underset{\sim}{f}$, hypo (inf $\underset{\sim}{f}$)) sono equi-attratte in (x,inf(f)). Esse sono equi-attratte in (x,r) se e solo se per ogni $Q \in N_\tau(x)$, $\varepsilon > 0$ esistono $W \in N_\tau(x)$, $\delta > 0$ e $F \in F$ tali che per ogni $i \in F$

$$(8.5)\qquad \begin{aligned} &\text{epi } f_i \cap W \times (v-\delta, r+\delta) \neq \emptyset \\ &\text{hypo } \inf(f_i) \cap W \times (r-\delta, r+\delta) \neq \emptyset \end{aligned}$$

implica

$$(8.6)\qquad \text{epi } f_i \cap \text{hypo } \inf(f_i) \cap Q \times (r-\varepsilon, r+\varepsilon) \neq \emptyset \; .$$

La condizione (8.5) implica la condizione seguente:

$$(8.7)\qquad \inf_W f_i < r+\delta \qquad , \qquad \inf(f_i) > r-\delta \qquad ,$$

dunque

$$(8.8)\qquad \mathrm{Min}(f_i) \cap Q \neq \emptyset$$

accompagnata dalla convergenza dei valori minimi $\inf(\underset{\sim}{f})$ a inf(f) (segue la (8.4) e dalla superconvergenza di $\underset{\sim}{f}$ a f), implicano (8.6) per r=inf(f).

Osserviamo adesso che l'implicazione (8.7') $\Longrightarrow$ (8.8) equivale alla crescenza decisiva in x.

Abbiamo fatto vedere che se $\underset{\sim}{f}$ cresce definitivamente allora epi $\underset{\sim}{f}$ e hypo $\inf(\underset{\sim}{f})$ sono equi-attratte su Min(f)X {inf(f)} = epi f$\cap$hypo inf(f). Quindi

$$\mathrm{Li}^{\tau\times\nu}\,(\text{epi } \underset{\sim}{f} \cap \text{hypo } \inf(\underset{\sim}{f})) \supset \text{epi } f \cap \text{hypo } \inf(f) \; ,$$

da dove si deduce

$$\mathrm{Li}^{\tau}\, \mathfrak{D}(\mathrm{epi}\, \underset{\sim}{f} \cap \mathrm{hypo}\, \inf(\underset{\sim}{f})) \supset \mathfrak{D}(\mathrm{epi}\, f \cap \mathrm{hypo}\, \inf(f))$$

Ricordando (8.3) si completa la dimostrazione.

9. L'intersezione dei limiti nella differenziazione

Dal paragrafo 7 segue che

$$(9.1) \qquad \begin{aligned} T_{C\cap D}(x) &\subset T_C(x) \cap T_D(x) \\ K_{C\cap D}(x) &\subset K_C(x) \cap K_D(x) \end{aligned}$$

mentre per l'ipertangente in generale non si possono avere delle formule analoghe. Ma le inclusioni desiderabili, per gli scopi della teoria d'ottimizzazione, sono di tipo $\supset$. Qui possiamo utilizzare i risultati del paragrafo 7.

Teorema 9.1

Se per ogni h ed ogni $Q \in N(h)$ esistono $W \in N(h)$ e $t_o > 0$ tali che per $t < t_o$

$$(9.2) \qquad \begin{aligned} (x+tW) \cap C \neq \emptyset \\ (x+tW) \cap D \neq \emptyset \end{aligned} \quad \Longrightarrow (x+tQ) \cap C \cap D \neq \emptyset$$

allora

$$T_{C\cap D}(x) \supset T_C(x) \cap T_D(x)$$

Diciamo che C è direzionalmente aperto in x se, per ogni h esiste $Q \in N(h)$ e $t_o > 0$ tali che $x+tQ \subset C$ per $t < t_o$. Notiamo che se C è direzionalmente aperto in x, allora $T_C(x) = X$ e per ogni insieme D, C e D soddisfano l'ipotesi (9.2). In questo caso si ha $T_{C\cap D}(x) = T_D(x)$ e anche $K_{C\cap D}(x) = K_D(x)$.

Risultati analoghi si ottengono per l'ipertangente. Ad esempio, diciamo che C è <u>direzionalmente equi-aperto in</u> x se per ogni h esistono $Q \in N_\tau(h)$, $t_o > 0$ ed $W \in N_\theta(x)$ tali che

$$x' + tQ \subset C$$

per $x' \in W \cap C$, $t < t_o$.

Rockafellar [17] chiama tale insieme <u>equi-lipschitziano</u> in x.

<u>Teorema 9.2</u>

Se C è direzionalmente equi-aperto in x allora per ogni D si ha

$$C^{\tau/\theta}_{C \cap D}(x) = C^{\tau/\theta}_{D}(x) .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Attouch, H., Wets, R., Approximation and convergence in nonlinear optimization, in Nonlinear Programming, 4, O Mangasarian, R.Meyer and S. Robinison, (ed).

[2] Cartan, H., Téorie des filtres, C.R. Acad.Sci.Paris 205 (1937),595-598.

[3] Čech, E., Topological spaces, Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, Interscience Publishers, London: New York, Sydney, 1966.

[4] Choquet,G., Convergences, Ann. Univ. Grenoble, 23 (1947/1948), 57-112.

[5] De Giòrgi,E., Γ-convergenza, G-convergenza, Boll. U.M.I. (5), 14-A (1977), 213-220.

[6] Del Prete,I., Lignola,B., On the variational properties of Γ^-(d) convergence, Ric. Mat. (in corso di stampa).

[7] Dolecki,S., Tangency and differentiation: some applications of convergence theory, Annali Mat. Pura e Appl., (in corso di stampa).

[8] Dolecki,S., Convergence of global minima, apparirà sul Operationsforsch. Statistik. optim.

[9] Dolecki,S., Greco,G., Convergences and sequential convergences,

[10] Dolecki,S., Greco,G., Lechicki,A., Compactoid and compact filters, sottoresso ai Trans. Amer. Math. Soc.

[11] Fischer, H., Limesräume, Math. Annalen, 137, (1959), 269-303.

[12] Hiriart Urruty, J.-B., Thèse Univerité de Clermont II (1977).

[13] Joly, J.-L., Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarité est bicontinue, J. Math. pures et appl. 52 (1973), 421-441.

[14] Kuratowski, K., Topologie, PWN, Warsavia 1958, 4^a edizione.

[15] Penot, J.-P., Compact filters, nets and relations, apparirà sul J.Math. Annal. Appl.

[16] Rockafellar, R.T., Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions, Can. J. Math. 32 (1980), 257-280.

[17] Rockafellar, R.T., Directionally Lipschitzian functions and subdifferential calculus, Proc. London Math. Soc. 39 (1979), 331-355.

[18] Wijsman, R., Convergence of sequences of sets, cones and functions, II, Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1963), 32-45.

[19] Zolezzi, T., On convergence of minima, Bol. U.M.I. 8 (1973), 246-256.

Università degli Studi Facoltà di Scienze - Lecce - Dipartimento di Matematica

FACOLTA' DI SCIENZE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
N. di inventario 010242/8