

CAPITOLO III

8. Traslazioni di un semigrupp.

Dato un semigrupp S , per ogni elemento a di S si possono definire due applicazioni, λ_a e ρ_a , nel seguente modo:

$$\forall s \in S \quad \lambda_a s = a s, \quad s \rho_a = s a.$$

Per convenzione scriviamo λ_a come un'applicazione sinistra (cioè si pone a sinistra della variabile) e ρ_a come un'applicazione destra (cioè si pone a destra della variabile).

L'applicazione λ_a si dice traslazione interna sinistra di S associata ad a , l'applicazione ρ_a si dice traslazione interna destra di S associata ad a .

In un semigrupp S un'applicazione sinistra $\lambda : S \rightarrow S$ si dice traslazione sinistra di S sse $\lambda(st) = (\lambda s)t \quad \forall s, t \in S$; un'applicazione destra $\rho : S \rightarrow S$ si dice traslazione destra di S sse $(st)\rho = s(t\rho) \quad \forall s, t \in S$; una traslazione sinistra λ e una traslazione destra ρ si dicono traslazioni associate sse $s(\lambda t) = (s\rho)t \quad \forall s, t \in S$.

Osserviamo che la traslazione interna sinistra è una traslazione sinistra, la traslazione interna destra è una traslazione destra, ed esse sono tra loro associate. Infatti abbiamo:

$$1) \lambda_a(st) = (\lambda_a s)t \quad \forall a, s, t \in S$$

$$\text{essendo } \lambda_a(st) = a(st) = (as)t = (\lambda_a s)t;$$

$$2) (st)\rho_a = s(t\rho_a) \quad \forall a, s, t \in S$$

$$\text{essendo } (st)\rho_a = (st)a = s(ta) = s(t\rho_a);$$

$$3) s(\lambda_a t) = (s\rho_a)t \quad \forall a, s, t \in S$$

$$\text{essendo } s(\lambda_a t) = s(at) = (sa)t = (s\rho_a)t.$$

L'insieme di tutte le coppie (λ, ρ) di traslazioni sinistre e destre associate si dice inviluppo traslazionale di S e si indica con $\Omega(S)$.

Per comodità possiamo supporre di avere scelto a', b' tali che godano delle proprietà di \bar{a} e \bar{b} , cioè t.c. $aa' = bb'$ e $a'a = b'b$.

Allora $a = aa'a = ab'b = b$.

c.v.d.

9. Teorema di Pietrich.

Prop. 9.1. Se ϕ è un omomorfismo da una banda rettangolare $I_1 \times \Lambda_1$ (*) in una banda rettangolare $I_2 \times \Lambda_2$, allora esistono due applicazioni $\phi^l : I_1 \rightarrow I_2$, $\phi^r : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ t.c.

$$(\chi_1, \xi_1)\phi = (\chi_1\phi^l, \xi_1\phi^r) \quad \forall (\chi_1, \xi_1) \in I_1 \times \Lambda_1 \quad (9.1)$$

Viceversa, per ogni applicazione $\phi^l : I_1 \rightarrow I_2$, $\phi^r : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$, la formula (9.1) definisce un omomorfismo ϕ da $I_1 \times \Lambda_1$ in $I_2 \times \Lambda_2$.

Dim.

Sia $\phi : I_1 \times \Lambda_1 \rightarrow I_2 \times \Lambda_2$ un omomorfismo. Fissato $\lambda_1 \in \Lambda_1$ e $\forall \chi_1 \in I_1$ definiamo $\chi_1\phi^l$ nel seguente modo:

$$(\chi_1, \lambda_1)\phi = (\chi_1\phi^l, \lambda_2)$$

(*) Ved. Parte I; definizione pag. 1, Lemma 1.13 pag. 10.

Analogamente, fissato $i_1 \in I_1$ e $\forall \xi_1 \in \Lambda$ definiamo $\xi_1 \phi^r$ nel seguente modo:

$$(i_1, \xi_1) \phi = (i_2, \xi_1 \phi^r) \quad .$$

Allora $\forall (\chi_1, \xi_1) \in I_1 \times \Lambda_1$ risulta

$$\begin{aligned} (\chi_1, \xi_1) \phi &= [(\chi_1, \lambda_1)(i_1, \xi_1)] \phi = (\chi_1, \lambda_1) \phi (i_1, \xi_1) \phi = \\ &= (\chi_1 \phi^l, \lambda_2)(i_2, \xi_1 \phi^r) = (\chi_1 \phi^l, \xi_1 \phi^r) \end{aligned}$$

c.v.d.

Viceversa se ϕ è un'applicazione definita dalla (9.1) allora essa è un omomorfismo, infatti $\forall (\chi_1, \xi_1), (y_1, \eta_1) \in I_1 \times \Lambda_1$ risulta

$$\begin{aligned} [(\chi_1, \xi_1)(y_1, \eta_1)] \phi &= (\chi_1, \eta_1) \phi = (\chi_1 \phi^l, \eta_1 \phi^r) = (\chi_1 \phi^l, \xi_1 \phi^r)(y_1 \phi^l, \eta_1 \phi^r) = \\ &= (\chi_1, \xi_1) \phi (y_1, \eta_1) \phi \quad . \end{aligned}$$

Corollario 9.1.

Siano $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ semigrupperi zero-sinistri (*) ed $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ semigrupperi zero-destri (*)

Se ϕ è un omomorfismo della banda rettangolare $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$ nella banda rettangolare $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{R}_2$, allora esistono gli omomorfismi $\phi^l : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2, \phi^r : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2$ t.c.

$$(l_1, r_1) \phi = (l_1 \phi^l, r_1 \phi^r) \quad (9.2)$$

$\forall (l_1, r_1) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$.

Viceversa per qualsiasi omomorfismo $\phi^l : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2, \phi^r : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2$, la formula

(9.2) definisce un omomorfismo ϕ da $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$ in $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{R}_2$.

(*) Ved. Defin. Parte I pag. 1.

Dim.

Sia ϕ un omomorfismo da $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$ in $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{R}_2$, allora per la Prop. 9.1 esistono due applicazioni $\phi^l : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ e $\phi^r : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2$ t.c.

$$(\ell_1, r_1)\phi = (\ell_1\phi^l, r_1\phi^r) \quad \forall (\ell_1, r_1) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1.$$

Tali applicazioni ϕ^l, ϕ^r sono due omomorfismi. Proviamolo per ϕ^l , proviamo cioè che $(\ell_1 \ell'_1)\phi^l = \ell_1\phi^l \ell'_1\phi^l$.

Infatti, essendo \mathcal{L}_1 semigruppone zero-sinistro, si ha che $\ell_1 \ell'_1 = \ell_1$ ed essendo ϕ^l un'applicazione : $(\ell_1 \ell'_1)\phi^l = \ell_1\phi^l$; inoltre anche \mathcal{L}_2 è un semigruppone zero-sinistro, quindi $\ell_1\phi^l \ell'_1\phi^l = \ell_1\phi^l$. Concludendo $(\ell_1 \ell'_1)\phi^l = \ell_1\phi^l \ell'_1\phi^l$, come volevamo dimostrare.

Il viceversa è ovvio.

Se un semigruppone S è espresso come semireticolone di semigruppone completamente semplici (*) S_α , indicati in Y , e se $\alpha, \beta \in Y$ e $\alpha \geq \beta$, allora si ha che

$$S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta} = S_\beta, \quad S_\beta S_\alpha \subseteq S_{\beta\alpha} = S_\beta.$$

Da cui se $c \in S_\alpha$ e $x \in S_\beta$ segue che $c x, x c \in S_\beta$. Dunque per ogni elemento $c \in S_\alpha$ si possono considerare le applicazioni λ_c e ρ_c da S_β in S_β definite al solito modo

$$\lambda_c x = c x \quad \text{e} \quad x \rho_c = x c.$$

Tali applicazioni sono la traslazione sinistra e la traslazione destra di S_β associate, e l'applicazione che ad ogni elemento $c \in S_\alpha$ associa (λ_c, ρ_c) e $\Omega(S_\beta)$ è un omomorfismo da S_α nell'involuppo traslazionale di S_β , $\Omega(S_\beta)$.

Consideriamo ora una banda rettangolare $I \times \Lambda$, dove I è un semigruppone zero-sinistro e Λ è un semigruppone zero-destro, e determiniamone l'involuppo traslazionale.

(*) Un semigruppone S è completamente semplice sse è regolare e $\forall a, b \in S: ax = bx$ e $xa = xb \implies a = b$.

Sia λ una traslazione sinistra di $I \times \Lambda$, allora

$$\begin{aligned} \lambda(i, \mu) &= \lambda[(i, \mu)(i, \mu)] = (\text{perché } \lambda \text{ è una traslazione sinistra}) \\ &= [\lambda(i, \mu)](i, \mu) = (i^*, \mu^*)(i, \mu) = (i^*, \mu) \quad (\text{perché } I \text{ è zero sinistro} \\ &\quad \text{e } \Lambda \text{ è zero-destrò}) \end{aligned}$$

dove abbiamo, per ora, posto $\lambda(i, \mu) = (i^*, \mu^*)$.

Inoltre per ogni ξ in Λ

$$\lambda(i, \xi) = \lambda[(i, \mu)(i, \xi)] = [\lambda(i, \mu)](i, \xi) = (i^*, \mu)(i, \xi) = (i^*, \xi)$$

Così λ determina un'applicazione $\phi: I \rightarrow I$ (che scriveremo come applicazione sinistra) t.c.

$$\lambda(i, \xi) = (\phi i, \xi) \quad \forall \xi \in \Lambda \quad (9.3)$$

Viceversa per ogni applicazione sinistra $\phi: I \rightarrow I$ la formula (9.3) de finisce una traslazione sinistra di $I \times \Lambda$.

Analogamente ogni traslazione destra ρ della banda rettangolare $I \times \Lambda$ determina ed è determinata da un'applicazione destra $\psi: \Lambda \rightarrow \Lambda$ t.c.

$$(x, \mu) \rho = (x, \mu \psi) \quad \forall (x, \mu) \in I \times \Lambda \quad (9.4)$$

Osserviamo che se λ , definita dalla (9.3), è una traslazione sinistra di $I \times \Lambda$ e ρ , definita dalla (9.4), è una traslazione destra, allora

$$\begin{aligned} \forall (i, \mu), (j, \nu) \in I \times \Lambda : \quad (i, \mu)[\lambda(j, \nu)] &= (i, \mu)(\phi j, \nu) = (i, \nu) \quad \text{e} \\ [(i, \mu) \rho](j, \nu) &= (i, \mu \psi)(j, \nu) = (i, \nu) \end{aligned}$$

Pertanto ogni coppia (λ, ρ) è tale che λ e ρ sono traslazioni associate. L'applicazione f che alla coppia (λ, ρ) associa la coppia (ϕ, ψ) , dove ϕ è determinata da λ e ψ è determinata da ρ , è evidentemente bietiva; inoltre è un omomorfismo tra l'inviluppo traslazionale $\Omega(I, \Lambda)$ e il prodotto cartesiano $\mathfrak{S}^*(I) \times \mathfrak{S}(\Lambda)$ del semigruppone $\mathfrak{S}^*(I)$ delle applicazioni sinistre di I in I e del semigruppone $\mathfrak{S}(\Lambda)$ delle applicazioni destre di Λ in Λ , vale cioè la seguente uguaglianza:

$$f((\lambda, \rho)(\lambda', \rho')) = f(\lambda, \rho)f'(\lambda', \rho').$$

Infatti si ha che

$$f(\lambda, \rho)(\lambda', \rho') = f(\lambda\lambda', \rho\rho') \quad e$$

$$f(\lambda, \rho)f(\lambda', \rho') = (\phi, \psi)(\phi', \psi') = (\phi\phi', \psi\psi') = f(\lambda\lambda', \rho\rho'), \text{ perche'}$$

$\forall (i, \xi), (x, \mu) \in I \times \Lambda$ risulta chiaramente che

$$\lambda\lambda'(i, \xi) = (\phi\phi' i, \xi) \quad e \quad (x, \mu)\rho\rho' = (x, \mu\psi\psi').$$

Consideriamo ora una generica banda B e supponiamo di aver espresso B come semireticolato di bande rettangolari E_α , $\alpha \in Y$; possiamo porre

$$E_\alpha = I_\alpha \times \Lambda_\alpha \quad \forall \alpha \in Y.$$

Se $\alpha \geq \beta$ abbiamo già visto che $\forall a \in E_\alpha$ esiste una coppia associata (λ_a, ρ_a) di traslazioni sinistra e destra di E_β . Inoltre l'applicazione t.c. $a \rightarrow (\lambda_a, \rho_a)$ è un omomorfismo da E_α in ${}^\beta\Omega(E_\beta)$.

Come primo risultato sull'involuppo traslazionale di una banda rettangolare si può affermare che ogni elemento $a \in E_\alpha$ determina un'applicazione

sinistra $\phi_\beta^a : I_\beta \rightarrow I_\beta$ e un'applicazione destra $\psi_\beta^a : \Lambda_\beta \rightarrow \Lambda_\beta$ secondo la seguente formula:

$$\lambda_a(x_\beta, \xi_\beta) = a(x_\beta, \xi_\beta) = (\phi_\beta^a x_\beta, \xi_\beta); \quad (x_\beta, \xi_\beta)\rho_a = (x_\beta, \xi_\beta)a = (x_\beta, \xi_\beta\psi_\beta^a) \quad (9.5)$$

Più in generale si può dire che, se $\alpha \geq \beta$, abbiamo un omomorfismo

$$\Phi_{\alpha, \beta} : E_\alpha \rightarrow \mathfrak{S}^*(I_\beta) \times \mathfrak{S}(\Lambda_\beta) \quad \text{così definito}$$

$$\forall a \in E_\beta \quad : \quad a \Phi_{\alpha, \beta} = (\phi_\beta^a, \psi_\beta^a) \quad .$$

Se $\beta = \alpha$ e se $a = (i, \mu)$ allora

$$a(x_\alpha, \xi_\alpha) = (i, \mu)(x_\alpha, \xi_\alpha) = (i, \xi_\alpha), \quad (x_\alpha, \xi_\alpha)a = (x_\alpha, \xi_\alpha)(i, \mu) = (x_\alpha, \mu).$$

Quindi l'applicazione $\phi_\alpha^{(i, \mu)} : I_\alpha \rightarrow I_\alpha$ ha la proprietà che $\phi_\alpha^{(i, \mu)} x_\alpha = i$

$\forall x_\alpha \in I_\alpha$. Analogamente $\xi_\alpha \psi_\alpha^{(i, \mu)} = \mu \quad \forall \xi_\alpha \in \Lambda_\alpha$.

Così se indichiamo con $\langle x \rangle$ il valore costante di un'applicazione costante x , possiamo scrivere:

$$\langle \phi_\alpha^{(i, \mu)} \rangle = i, \quad \langle \psi_\alpha^{(i, \mu)} \rangle = \mu \quad \forall (i, \mu) \in E_\alpha \quad (9.6)$$

Consideriamo ora in B un prodotto più generale. Precisamente supponiamo che $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$, e $z = (x_\gamma, \xi_\gamma)$ sia un elemento arbitrario di E_γ , dove $\gamma = \alpha\beta$.

Allora se poniamo $ab = (i_\gamma, \mu_\gamma)$, segue che:

$$abz = (ab)z = (i_\gamma, \mu_\gamma)(x_\gamma, \xi_\gamma) = (i_\gamma, \xi_\gamma)$$

e anche

$$abz = a(bz) = a[b(x_\gamma, \xi_\gamma)] = a(\phi_\gamma^b x_\gamma, \xi_\gamma) = (\phi_\gamma^a \phi_\gamma^b x_\gamma, \xi_\gamma),$$

ossia $(i_\gamma, \xi_\gamma) = (\phi_\gamma^a \phi_\gamma^b x_\gamma, \xi_\gamma)$.

Ne deduciamo che l'applicazione sinistra $\phi_\gamma^a \phi_\gamma^b$ di I_γ ha la proprietà che

$$\forall x_\gamma \in I_\gamma : \phi_\gamma^a \phi_\gamma^b x_\gamma = i_\gamma$$

cioè che $\phi_\gamma^a \phi_\gamma^b$ è un'applicazione costante di valore costante i_γ .

Ragionando analogamente per zab possiamo dimostrare che l'applicazione destra $\psi_\gamma^a \psi_\gamma^b$ di Λ_γ assume valore costante μ_γ . Così otteniamo il prodotto di a e b in funzione delle applicazioni $\phi_\gamma^a, \psi_\gamma^a, \phi_\gamma^b, \psi_\gamma^b$ nel seguente modo

$$ab = (\langle \phi_\gamma^a \phi_\gamma^b \rangle, \langle \psi_\gamma^a \psi_\gamma^b \rangle) \tag{9.7}$$

Se allora pensiamo all'omomorfismo $\Phi_{\alpha, \beta}$ come "noto", la formula (9.7) mostra come il prodotto ab di due elementi arbitrari di B è determinato da questo omomorfismo.

Vediamo ora che risultati si ottengono moltiplicando il prodotto ab a destra per un elemento $d = (x_\delta, \xi_\delta) \in E_\delta$, dove $\delta \leq \alpha\beta$.

Allora, da una parte $abd = (ab)d = (\phi_\delta^{ab} x_\delta, \xi_\delta)$, dall'altra $abd = a(bd) = a(\phi_\delta^b x_\delta, \xi_\delta) = (\phi_\delta^a \phi_\delta^b x_\delta, \xi_\delta)$. Se ne deduce quindi che $\phi_\delta^{ab} = \phi_\delta^a \phi_\delta^b$ (9.8)

Analogamente, calcolando i due valori di dab si giunge alla formula

$$\psi_{\delta}^{ab} = \psi_{\delta}^a \psi_{\delta}^b \quad (9.9)$$

Formuliamo ora il teorema di Petrich (1967).

Teorema 9.1.

Sia Y un semireticolato e sia $\{E_{\alpha}/\alpha \text{ e } Y\}$ una famiglia di bande rettangolari a due a due disgiunte con insieme di indici Y . Per ogni α sia

$E_{\alpha} = I_{\alpha} \times \Lambda_{\alpha}$, e per ogni coppia di elementi α, β di Y t.c. $\alpha \geq \beta$, sia $\phi_{\alpha, \beta} : E_{\alpha} \rightarrow \mathcal{J}^*(I_{\beta}) \times \mathcal{J}(\Lambda_{\beta})$ un omomorfismo t.c. $\forall a \in E_{\alpha} : a\phi_{\alpha, \beta} = (\phi_{\beta}^a, \psi_{\beta}^a)$.

Supponiamo anche che

(i) se $a = (i, \mu) \in E_{\alpha}$, allora $\phi_{\alpha}^a, \psi_{\alpha}^a$ sono applicazioni costanti, e

$$\langle \phi_{\alpha}^{(i, \mu)} \rangle = i, \quad \langle \psi_{\alpha}^{(i, \mu)} \rangle = \mu;$$

(ii) se $a \in S_{\alpha}, b \in S_{\beta}$ e $\alpha\beta = \gamma$, allora $\phi_{\gamma}^a \phi_{\gamma}^b$ e $\psi_{\gamma}^a \psi_{\gamma}^b$ sono applicazioni costanti;

(iii) se $\langle \phi_{\gamma}^a \phi_{\gamma}^b \rangle$ viene indicato con j e $\langle \psi_{\gamma}^a \psi_{\gamma}^b \rangle$ con ν , allora

$$\forall \delta \leq \gamma \quad \phi_{\delta}^{(j, \nu)} = \phi_{\delta}^a \phi_{\delta}^b, \quad \psi_{\delta}^{(j, \nu)} = \psi_{\delta}^a \psi_{\delta}^b.$$

Sia $B = U \{E_{\alpha}/\alpha \text{ e } Y\}$ e definiamo il prodotto di a in E_{α} e b in E_{β} in questo modo : $a * b = (\langle \phi_{\gamma}^a \phi_{\gamma}^b \rangle, \langle \psi_{\gamma}^a \psi_{\gamma}^b \rangle)$, dove $\gamma = \alpha\beta$. Allora $(B, *)$ è una banda, le cui \mathcal{J} -classi $(*)$ sono le bande rettangolari E_{α} .

Viceversa ogni banda è determinata in questo modo da un semireticolato Y da una famiglia di bande rettangolari $E_{\alpha} = I_{\alpha} \times \Lambda_{\alpha}$ con insieme di indici in Y , e da una famiglia di omomorfismi $\phi_{\alpha, \beta} : E_{\alpha} \rightarrow \mathcal{J}^*(I_{\beta}) \times \mathcal{J}(\Lambda_{\beta})$ ($\alpha, \beta \in Y, \alpha \geq \beta$) soddisfacenti (i), (ii), (iii).

(*) La \mathcal{J} è la relazione di Green così definita: se S è un semigruppoo $\forall a, b \in S$
 $a \mathcal{J} b \iff S^1 a S^1 = S^1 b S^1$

Dim.

La condizione sufficiente è vera grazie alla formule (9.6) e (9.9).

Per provare la condizione necessaria dimostriamo prima che la moltiplicazione "*" data è associativa.

Se $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$ e $c \in E_\gamma$ sono elementi arbitrari di B , e se $\alpha\beta = \delta$, $\beta\gamma = \varepsilon$ e $\alpha\beta\gamma = \xi$, sarà:

$$a * b = (\langle \phi_\delta^a \phi_\delta^b \rangle, \langle \psi_\delta^a \psi_\delta^b \rangle) = (j, \nu) \quad e$$

$$b * c = (\langle \phi_\varepsilon^b \phi_\varepsilon^c \rangle, \langle \psi_\varepsilon^b \psi_\varepsilon^c \rangle) = (k, \pi).$$

Allora

$$\begin{aligned} (a*b)*c &= (\langle \phi_\xi^{(j,\nu)} \phi_\xi^c \rangle, \langle \psi_\xi^{(j,\nu)} \psi_\xi^c \rangle) = (\langle \phi_\xi^a \phi_\xi^b \phi_\xi^c \rangle, \langle \psi_\xi^a \psi_\xi^b \psi_\xi^c \rangle) = \\ &= (\langle \phi_\xi^a \phi_\xi^{(k,\pi)} \rangle, \langle \psi_\xi^a \psi_\xi^{(k,\pi)} \rangle) = a*(b*c) \quad \underline{\text{c.v.d.}} \end{aligned}$$

Osserviamo che se $a = (i, \mu)$ e $b = (j, \nu)$ appartengono entrambi ad E_α , allora dalla definizione di "*" segue che:

$$a*b = (\langle \phi_\alpha^{(i,\mu)} \phi_\alpha^{(j,\nu)} \rangle, \langle \psi_\alpha^{(i,\mu)} \psi_\alpha^{(j,\nu)} \rangle),$$

inoltre per la proprietà (i) e per le proprietà delle applicazioni costanti sinistra e destra, risulta

$$(\langle \phi_\alpha^{(i,\mu)} \phi_\alpha^{(j,\nu)} \rangle, \langle \psi_\alpha^{(i,\mu)} \psi_\alpha^{(j,\nu)} \rangle) = (\langle \phi_\alpha^{(i,\mu)} \rangle \langle \phi_\alpha^{(j,\nu)} \rangle, \langle \psi_\alpha^{(i,\mu)} \rangle \langle \psi_\alpha^{(j,\nu)} \rangle) = (i, \nu)$$

Questo coincide esattamente con il prodotto di a e b in una banda rettangolare E_α . In particolare segue che $a*a = a$ e così B è una banda.

Proviamo ora che le \mathcal{J} -classi di B sono tutte e sole le bande rettangolari E_α , $\alpha \in \mathcal{Y}$.

Osserviamo intanto, che presi $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$ e posto $\gamma = \alpha\beta$ risulterà, per quanto visto prima, che

$$a * b = (\langle \phi_{\gamma}^a \phi_{\gamma}^b \rangle, \langle \psi_{\gamma}^a \psi_{\gamma}^b \rangle) = (i_{\gamma}, v_{\gamma}) \quad \text{con } i_{\gamma} \in I_{\gamma} \text{ e } v_{\gamma} \in \Lambda_{\gamma},$$

per cui $a * b \in E_{\gamma}$. Allora se ne deduce che

$$E_{\alpha} * E_{\beta} \subseteq E_{\alpha\beta}.$$

Ora consideriamo due elementi $a, b \in B$ t.c. $a \mathcal{J} b$. Allora esisteranno E_{α} e E_{β} t.c. $a \in E_{\alpha}$ e $b \in E_{\beta}$ e

$$x \in E_{\delta}, y \in E_{\epsilon}, u \in E_{\zeta}, v \in E_{\eta} \text{ t.c. } b = x * a * y \text{ e } a = u * b * v,$$

con $\delta, \epsilon, \zeta, \eta$ opportuni elementi di Y .

Se poniamo $\delta\alpha = \alpha'$, $\alpha'\epsilon = \alpha''$ e $\zeta\beta = \beta'$, $\beta'\eta = \beta''$, allora, per l'osservazione precedente, sarà $b = (x*a)*y \in E_{\alpha''}$ e $a = (u*b)*v \in E_{\beta''}$, quindi $a*b \in E_{\alpha''\beta''}$.

Cioè se due elementi di B sono \mathcal{J} -equivalenti allora essi stanno in uno stesso E_{γ} , con γ opportuno elemento di Y .

Viceversa, se due elementi di B stanno in uno stesso $E_{\gamma}, \gamma \in Y$, allora essi sono \mathcal{J} -equivalenti.

Infatti da $a, b \in E_{\gamma}$, E_{γ} banda rettangolare, segue che $a = a*b*a$ e $b = b*a*b$, pertanto $a \mathcal{J} b$.

Il teorema di Petrich è così completamente provato.