Introduzione. -

Questo lavoro rappresenta la seconda parte del Quaderno sui Semigruppi idempotenti (o bande).

Le due parti sono nettamente distinte per i temi studiati e sono divise, ciascuna, in due Capitoli.

Nella Parte I , il Capitolo I ha come punti centrali il teorema di decomposizione (di semireticolo) di una banda e la classificazione completa delle bande.

Il Capitolo II è dedicato alla classificazione di varie classi di bande mediante identità.

Nella Parte II, il Capitolo III è essenzialmente dedicato ad un metodo (di Petrich) di costruzione delle bande, dedotto da quello usato da Lallement per i semigruppi completamente regolari, con l'uso di una espressione esplicita dell'inviluppo traslazionale di una banda rettangolare.

Il Capitolo IV è uno studio delle bande libere regolari e delle varietà di semigruppi idempotenti, dove per varietà di semigruppi, determinati da una collezione di relazioni identiche, si intende la classe dei semigruppi che soddisfano quelle relazioni identiche.

Infine, in Appendice, dopo aver dato la definizione della decomposizione sinistra (destra) di Szép e della Γ-decomposizione, viene indicato un metodo nuovo di approccio allo studio dei semigruppi generati da idempotenti, o semibande.

Sono indicati vari problemi tuttora aperti.

I N D I C E

CAPITOLO III

8. Traslazioni di un semigruppo.

Dato un semigruppo S, per ogni elemento a di S si possono definire due applicazioni, λ_a e ρ_a, nel seguente modo:

$$\forall s \in S \qquad \lambda_a s = a\,s, \qquad s\rho_a = s\,a.$$

Per convenzione scriviamo λ_a come un'applicazione sinistra (cioé si pone a sinistra della variabile) e ρ_a come un'applicazione destra (cioè si pone a destra della variabile).

L'applicazione λ_a si dice traslazione interna sinistra di S associata ad a, l'applicazione ρ_a si dice traslazione interna destra di S associata ad a.

In un semigruppo S un'applicazione sinistra $\lambda : S \to S$ si dice traslazione sinistra di S sse $\lambda(st) = (\lambda s)t \quad \forall s,t \in S$; un'applicazione destra $\rho : S \to S$ si dice traslazione destra di S sse $(st)\rho = s(t\rho) \quad \forall s,t \in S$; una traslazione sinistra λ e una traslazione destra ρ si dicono traslazioni associate sse $s(\lambda t) = (s\rho)t \quad \forall s,t \in S$.

Osserviamo che la traslazione interna sinistra è una traslazione sinistra, la traslazione interna destra è una traslazione destra, ed esse sono tra loro associate. Infatti abbiamo:

1) $\lambda_a(st) = (\lambda_a s)t \qquad \forall a,s,t \in S$

essendo $\lambda_a(st) = a(st) = (as)t = (\lambda_a s)t$;

2) $(st)\rho_a = s(t\rho_a) \qquad \forall a,s,t \in S$

essendo $(st)\rho_a = (st)a = s(ta) = s(t\rho_a)$;

3) $s(\lambda_a t) = (s\rho_a)t \qquad \forall a,s,t \in S$

essendo $s(\lambda_a t) = s(at) = (sa)t = (s\rho_a)t$.

L'insieme di tutte le coppie (λ,ρ) di traslazioni sinistre e destre associate si dice inviluppo traslazionale di S e si indica con $\Omega(S)$.

Esso è un semigruppo, con la moltiplicazione così definita

$$(\lambda,\rho)(\lambda',\rho') = (\lambda\lambda',\rho\rho')$$

dove $\lambda\lambda'$ rappresenta la composizione delle applicazioni sinistre λ e λ' (applicando prima λ' e poi λ), mentre $\rho\rho'$ rappresenta la composizione delle applicazioni destre ρ, ρ' (applicando prima ρ e poi ρ').

Infatti abbiamo:

1) $(\lambda,\rho),(\lambda',\rho') \in \Omega(S) \Longrightarrow (\lambda,\rho)(\lambda',\rho') \in \Omega(S)$

Dim.

$\lambda\lambda'$ è una traslazione sinistra, infatti $\forall s,t \in S$ $\lambda\lambda'(st) = \lambda(\lambda'st) =$
$= \lambda((\lambda's)t) = (\lambda(\lambda's))t = (\lambda\lambda's)t$;

$\rho\rho'$ è una traslazione destra, infatti $\forall s,t \in S$ $(st)\rho\rho' = ((st)\rho)\rho' =$
$= (s(t\rho))\rho' = s((t\rho)\rho') = s(t\rho\rho')$;

$\lambda\lambda'$ e $\rho\rho'$ sono tra loro associate, infatti $\forall s,t \in S$ $s(\lambda\lambda't) =$
$= s(\lambda(\lambda't)) = (s\rho)(\lambda't) = ((s\rho)\rho')t = (s\rho\rho')t$.

Se ne conclude che $(\lambda,\rho)(\lambda',\rho') = (\lambda\lambda',\rho\rho') \in \Omega(S)$.

2) $(\lambda,\rho),(\lambda',\rho'),(\lambda'',\rho'') \in \Omega(S) \Longrightarrow ((\lambda,\rho)(\lambda',\rho'))(\lambda'',\rho'') = (\lambda,\rho)((\lambda',\rho')(\lambda'',\rho''))$.

Dim.

$((\lambda,\rho)(\lambda',\rho'))(\lambda'',\rho'') = (\lambda\lambda',\rho\rho')(\lambda'',\rho'') = ((\lambda\lambda')\lambda'',(\rho\rho')\rho'') =$

$= (\lambda(\lambda'\lambda''),\rho(\rho'\rho'')) = (\lambda,\rho)(\lambda'\lambda'',\rho'\rho'') = (\lambda,\rho)((\lambda',\rho')(\lambda'',\rho''))$.

Consideriamo ora l'applicazione che ad ogni elemento $a \in S$ associa (λ_a,ρ_a) che, per quanto visto prima, è un elemento di $\Omega(S)$ e verifichiamo che tale applicazione è un omomorfismo, infatti $\forall\ a,b \in S$ $(\lambda_a,\rho_a)(\lambda_b,\rho_b) = (\lambda_{ab},\rho_{ab})$, perché

$\forall\ s \in S$: $\lambda_a\lambda_b s = \lambda_a(bs) = a(bs) = (ab)s = \lambda_{ab}s$ e

$$s\rho_a\rho_b = (sa)\rho_b = (sa)b = s(ab) = s\rho_{ab} .$$

In generale tale omomorfismo non è un monomorfismo, infatti può accadere che, presi $a,b \in S$, con $a \neq b$, risulti $\lambda_a = \lambda_b$ e $\rho_a = \rho_b$.

Ad esempio se S è un semigruppo con almeno due elementi che siano annullatori, a e b, con $a \neq b$, allora $\forall x \in S$, per la definizione di annullatore, risulta che $ax = xa = 0$ e $bx = xb = 0$, cioé $\forall x \in S$ $\lambda_a x = \lambda_b x$ e $x\rho_a = x\rho_b$.

Vale però il seguente

Lemma 8.1. Se a e b sono elementi di un semigruppo regolare (*) S, allora $\lambda_a = \lambda_b$ e $\rho_a = \rho_b$ implica $a = b$.

Dim.

Siano $a,b \in S$ t.c. $\lambda_a = \lambda_b$ e $\rho_a = \rho_b$. Poiché S è regolare esistono a' inverso di a e b' inverso di b, cioé $a = aa'a$ e $a' = a'aa'$ e $b = bb'b$, $b' = b'bb'$. Allora sarà

$$a = aa'a = \lambda_a(a'a) = \lambda_b(a'a) = b(a'a),$$

$$b = bb'b = \lambda_b(b'b) = \lambda_a(b'b) = a(b'b), \quad \text{ossia}$$

$\exists (a'a) \in S \ni' a = b(a'a)$ e $\exists (b'b) \in S \ni' b = a(b'b)$, pertanto $a \mathcal{R} b$ (**). Inoltre

$a = aa'a = (aa')\rho_a = (aa')\rho_b = (aa')b,$

$b = bb'b = (bb')\rho_b = (bb')\rho_a = (bb')a$, ossia $\exists (aa') \in S \ni' a=(aa')b$ e $\exists (bb') \in S \ni' b = (bb')a$, pertanto $a \mathcal{L} b$ (**). Allora si ha anche che $a \mathcal{H} b$ (**), e per una proposizione sui semigruppi regolari (***) $\bar{a}$ inverso di a e $\bar{b}$ inverso di b. t.c. $a\bar{a} = b\bar{b}$ e $\bar{a}a = \bar{b}b$.

(*) Un semigrupo S si dice regolare sse $\forall a \in S$ $\exists x \in S \ni' a = axa$.

(**) $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ sono le relazioni di Green, così definite: $\forall a,b \in S$: $a\mathcal{L}b \Leftrightarrow S^1a = S^1b$; $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1$; $a\mathcal{H}b \Leftrightarrow a\mathcal{L}b$ & $a\mathcal{R}b$.

(***) v. [4] Prop. 4.1. pag. 49.

Per comodotà possiamo supporre di avere scelto a,b' tali che godano delle proprietà di $\bar{a}$ e $\bar{b}$, cioé t.c. aa' = bb' e a'a = b'b.

Allora a = aa'a = ab'b = b.

c.v.d.

9. Teorema di Pietrich.

Prop. 9.1. Se ϕ è un omomorfismo da una banda rettangoalre $I_1 \times \Lambda_1$ (*) in una banda rettangolare $I_2 \times \Lambda_2$, allora esistono due applicazioni $\phi^{\ell} : I_1 \to I_2$, $\phi^r : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ t.c.

$$(\chi_1,\xi_1)\phi = (\chi_1\phi^{\ell},\xi_1\phi^r) \qquad \forall(\chi_1,\xi_1) \in I_1 \times \Lambda_1 \qquad (9.1) .$$

Viceversa, per ogni applicazione $\phi^{\ell} : I_1 \to I_2$, $\phi^r : \Lambda_1 \to \Lambda_2$, la formula (9.1) definisce un omomorfismo ϕ da $I_1 \times \Lambda_1$ in $I_2 \times \Lambda_2$.

Dim.

Sia $\phi : I_1 \times \Lambda_1 \to I_2 \times \Lambda_2$ un omomorfismo. Fissato $\lambda_1 \in \Lambda_1$ e $\forall\ \chi_1 \in I_1$ definiamo $\chi_1\phi^{\ell}$ nel seguente modo:

$$(\chi_1,\lambda_1)\phi = (\chi_1\phi^{\ell},\lambda_2')$$

(*) Ved. Parte I; definizione pag. 1, Lemma 1.13 pag. 10.

Analogamente, fissato $i_1 \in I_1$ e $\forall\, \xi_1 \in \Lambda$ definiamo $\xi_1\phi^r$ nel seguente modo:

$$(i_1,\xi_1)\phi = (i_2,\xi_1\,\phi^r) \quad .$$

Allora $\forall(x_1,\xi_1) \in I_1 \times \Lambda_1$ risulta

$$(x_1,\xi_1)\phi = [(x_1,\lambda_1)(i_1,\xi_1)]\phi = (x_1,\lambda_1)\phi(i_1,\xi_1)\phi =$$

$$= (x_1\phi^\ell,\lambda_2)(i_2,\xi_1\,\phi^r) = (x_1\phi^\ell,\xi_1\phi^r)$$

c.v.d.

Viceversa se ϕ è un'applicazione definita dalla (9.1) allora essa è un omomorfismo, infatti $\forall(x_1,\xi_1),\ (y_1,\eta_1) \in I_1 \times \Lambda_1$ risulta

$$[(x_1,\xi_1)(y_1,\eta_1)]\phi = (x_1,\eta_1)\phi = (x_1\phi^\ell,\eta_1\phi^r) = (x_1\phi^\ell,\xi_1\phi^r)(y_1\phi^\ell,\eta_1\phi^r) =$$

$$= (x_1,\xi_1)\phi\,(y_1,\eta_1)\phi \quad .$$

<u>Corollario 9.1.</u>

Siano $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$ semigruppi zero-sinistri (*) ed $\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2$ semigruppi zero-destri(*)
Se ϕ è un omomorfismo della banda rettangolare $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$ nella banda rettangolare $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{R}_2$, allora esistono gli omomorfismi $\phi^\ell : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, $\phi^r : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ t.c.

$$(\ell_1,r_1)\phi = (\ell_1\phi^\ell,r_1\phi^r) \qquad (9.2)$$

$\forall(\ell_1,r_1) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$.

Viceversa per qualsiasi omomorfismo $\phi^\ell : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, $\phi^r : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$, la formula (9.2) definisce un omomorfismo ϕ da $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$ in $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{R}_2$.

(*) Ved. Defin. Parte I pag. 1.

Dim.

Sia ϕ un omomorfismo da $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$ in $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{R}_2$, allora per la Prop. 9.1 esistono due applicazioni $\phi^\ell : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ e $\phi^r : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ t.c.

$$(\ell_1, r_1)\phi = (\ell_1 \phi^\ell, r_1 \phi^r) \quad \forall (\ell_1, r_1) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1.$$

Tali applicazioni ϕ^ℓ, ϕ^r sono due omomorfismi. Proviamolo per ϕ^ℓ, proviamo cioé che $(\ell_1 \ell_1')\phi^\ell = \ell_1 \phi^\ell \ell_1' \phi^\ell$.

Infatti, essendo $\mathcal{L}_1$ semigruppo zero-sinistro, si ha che $\ell_1 \ell_1' = \ell_1$ ed essendo ϕ^ℓ un'applicazione : $(\ell_1 \ell_1')\phi^\ell = \ell_1 \phi^\ell$; inoltre anche $\mathcal{L}_2$ è un semigruppo zero-sinistro, quindi $\ell_1 \phi^\ell \ell_1' \phi^\ell = \ell_1 \phi^\ell$. Concludendo $(\ell_1 \ell_1')\phi^\ell = \ell_1 \phi^\ell \ell_1' \phi^\ell$, come volevamo dimostrare.

Il viceversa è ovvio.

Se un semigruppo S è espresso come semireticolo di semigruppi completamente semplici (*) S_α, indiciati in Y, e se $\alpha, \beta \in Y$ e $\alpha \geq \beta$, allora si ha che

$$S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta} = S_\beta \ , \quad S_\beta S_\alpha \subseteq S_{\beta\alpha} = S_\beta \ .$$

Da cui se $c \in S_\alpha$ e $x \in S_\beta$ segue che $c\,x, x\,c \in S_\beta$. Dunque per ogni elemento $c \in S_\alpha$ si possono considerare le applicazioni λ_c e ρ_c da S_β in S_β definite al solito modo

$$\lambda_c x = c\,x \qquad \text{e} \qquad x\rho_c = x\,c.$$

Tali applicazioni sono la traslazione sinistra e la traslazione destra di S_β associate, e l'applicazione che ad ogni elemento $c \in S_\alpha$ associa $(\lambda_c, \rho_c) \in \Omega(S_\beta)$ è un omomorfismo da S_α nell'inviluppo traslazionale di S_β, $\Omega(S_\beta)$.

Consideriamo ora una banda rettangolare $I \times \Lambda$, dove I è un semigruppo zero-sinistro e Λ è un semigruppo zero-destro, e determiniamone l'inviluppo traslazionale.

(*) Un semigruppo S è completamente semplice sse è regolare e $\forall a,b \in S: ax = bx$ e $xa = xb \implies a = b$.

Sia λ una traslazione sinistra di $I \times \Lambda$, allora

$$\lambda(i,\mu) = \lambda[(i,\mu)(i,\mu)] = \text{(perché } \lambda \text{ è una traslazione sinistra)}$$
$$= [\lambda(i,\mu)]\,(i,\mu) = (i^*,\mu^*)(i,\mu) = (i^*,\mu) \quad \text{(perché } I \text{ è zero sinistro e } \Lambda \text{ è zero-destro)}$$

dove abbiamo, per ora, posto $\lambda(i,\mu) = (i^*,\mu^*)$.
Inoltre per ogni ξ in Λ

$$\lambda(i,\xi) = \lambda[(i,\mu)(i,\xi)] = [\lambda(i,\mu)]\,(i,\xi) = (i^*,\mu)(i,\xi) = (i^*,\xi)$$

Così λ determina un'applicazione $\phi: I \to I$ (che scriveremo come applicazione sinistra) t.c.

$$\lambda(i,\xi) = (\phi i,\xi) \quad \forall\ \xi \in \Lambda \tag{9.3}$$

Viceversa per ogni applicazione sinistra $\phi: I \to I$ la formula (9.3) definisce una traslazione sinistra di $I \times \Lambda$.

Analogamente ogni traslazione destra ρ della banda rettangolare $I \times \Lambda$ determina ed è determinata da un'applicazione destra $\psi: \Lambda \to \Lambda$ t.c.

$$(x,\mu)\rho = (x,\mu\psi) \qquad \forall (x,\mu) \in I \times \Lambda \tag{9.4}$$

Osserviamo che se λ , definita dalla (9.3), è una traslazione sinistra di $I \times \Lambda$ e ρ , definita dalla (9.4), è una traslazione destra, allora

$$\forall (i,\mu),\ (j,\nu) \in I \times \Lambda : \quad (i,\mu)[\lambda(j,\nu)] = (i,\mu)(\phi j,\nu) = (i,\nu) \quad \text{e}$$
$$[(i,\mu)\rho](j,\nu) = (i,\mu\psi)(j,\nu) = (i,\nu)$$

Pertanto ogni coppia (λ,ρ) è tale che λ e ρ sono traslazioni associate. L'applicazione f che alla coppia (λ,ρ) associa la coppia (ϕ,ψ), dove ϕ è determinata da λ e ψ è determinata da ρ , è evidentemente biiettiva; inoltre è un omomorfismo tra l'inviluppo traslazionale $\Omega(I,\Lambda)$ e il prodotto cartesiano $\mathfrak{J}^*(I) \times \mathfrak{J}(\Lambda)$ del semigruppo $\mathfrak{J}^*(I)$ delle applicazioni sinistre di I in I e del semigruppo $\mathfrak{J}(\Lambda)$ delle applicazioni destre di Λ in Λ, vale cioé la seguente uguaglianza:

$$f((\lambda,\rho)(\lambda',\rho')) = f(\lambda,\rho)f(\lambda',\rho').$$

Infatti si ha che

$f((\lambda,\rho)(\lambda',\rho')) = f(\lambda\lambda',\rho\rho')$ e

$f(\lambda,\rho)f(\lambda',\rho') = (\phi,\psi)(\phi',\psi') = (\phi\phi',\psi\psi') = f(\lambda\lambda',\rho\rho')$, perché $\forall (i,\xi), (x,\mu) \in I \times \Lambda$ risulta chiaramente che

$\lambda\lambda'(i,\xi) = (\phi\phi' i,\xi)$ e $(x,\mu)\rho\rho' = (x,\mu\psi\psi')$.

Consideriamo ora una generica banda B e supponiamo di aver espresso B come semireticolo di bande rettangolari E_α, $\alpha \in Y$; possiamo porre $E_\alpha = I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ $\forall \alpha \in Y$.

Se $\alpha \geq \beta$ abbiamo già visto che $\forall a \in E_\alpha$ esiste una coppia associata (λ_a,ρ_a) di traslazioni sinistra e destra di E_β. Inoltre l'applicazione t.c. $a \to (\lambda_a,\rho_a)$ è un omomorfismo da E_α in $\Omega(E_\beta)$.

Come primo risultato sull'inviluppo traslazionale di una banda rettangolare si può affermare che ogni elemento $a \in E_\alpha$ determina un'applicazione sinistra $\phi_\beta^a : I_\beta \to I_\beta$ e un'applicazione destra $\psi_\beta^a : \Lambda_\beta \to \Lambda_\beta$ secondo la seguente formula:

$$\lambda_a(x_\beta,\xi_\beta) = a(x_\beta,\xi_\beta) = (\phi_\beta^a x_\beta,\xi_\beta); \quad (x_\beta,\xi_\beta)\rho_a = (x_\beta,\xi_\beta)a = (x_\beta,\xi_\beta\psi_\beta^a) \tag{9.5}$$

Più in generale si può dire che, se $\alpha \geq \beta$, abbiamo un omomorfismo

$$\Phi_{\alpha,\beta} : E_\alpha \to \mathfrak{J}^*(I_\beta) \times \mathfrak{J}(\Lambda) \quad \text{così definito}$$

$$\forall a \in E_\beta \quad : \quad a\,\Phi_{\alpha,\beta} = (\phi_\beta^a, \psi_\beta^a) \quad .$$

Se $\beta = \alpha$ e se $a = (i,\mu)$ allora

$a(x_\alpha,\xi_\alpha) = (i,\mu)(x_\alpha,\xi_\alpha) = (i,\xi_\alpha)$, $(x_\alpha,\xi_\alpha)a = (x_\alpha,\xi_\alpha)(i,\mu) = (x_\alpha,\mu)$.

Quindi l'applicazione $\phi_\alpha^{(i,\mu)} : I_\alpha \to I_\alpha$ ha la proprietà che $\phi_\alpha^{(i,\mu)} x_\alpha = i$ $\forall x_\alpha \in I_\alpha$. Analogamente $\xi_\alpha \psi_\alpha^{(i,\mu)} = \mu$ $\forall \xi_\alpha \in \Lambda_\alpha$.

Così se indichiamo con $\langle \chi \rangle$ il valore costante di un'applicazione costante χ, possiamo scrivere:

$$\langle \phi_\alpha^{(i,\mu)} \rangle = i \quad , \quad \langle \psi_\alpha^{(i,\mu)} \rangle = \mu \quad \forall (i,\mu) \in E_\alpha \tag{9.6}$$

Consideriamo ora in B un prodotto più generale. Precisamente supponiamo che $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$, e $z = (x_\gamma, \xi_\gamma)$ sia un elemento arbitrario di E_γ, dove $\gamma = \alpha\beta$.

Allora se poniamo $ab = (i_\gamma, \mu_\gamma)$, segue che:

$$abz = (ab)z = (i_\gamma, \mu_\gamma)(x_\gamma, \xi_\gamma) = (i_\gamma, \xi_\gamma)$$

e anche

$$abz = a(bz) = a\,[b(x_\gamma, \xi_\gamma)] = a(\phi_\gamma^b\, x_\gamma, \xi_\gamma) = (\phi_\gamma^a\, \phi_\gamma^b x_\gamma, \xi_\gamma),$$

ossia $(i_\gamma, \xi_\gamma) = (\phi_\gamma^a \phi_\gamma^b x_\gamma, \xi_\gamma)$.

Ne deduciamo che l'applicazione sinistra $\phi_\gamma^a\, \phi_\gamma^b$ di I_γ ha la proprietà che

$\forall x_\gamma \in I_\gamma \;:\; \phi_\gamma^a\, \phi_\gamma^b\, x_\gamma = i_\gamma$

cioé che $\phi_\gamma^a\, \phi_\gamma^b$ è un'applicazione costante di valore costante i_γ.

Ragionando analogamente per zab possiamo dimostrare che l'applicazione destra $\psi_\gamma^a\, \psi_\gamma^b$ di Λ_γ assume valore costante μ_γ. Così otteniamo il prodotto di a e b in funzione delle applicazioni ϕ_γ^a, ψ_γ^a, ϕ_γ^b, ψ_γ^b nel seguente modo

$$ab = (\langle\phi_\gamma^a\, \phi_\gamma^b\rangle, \langle\psi_\gamma^a\, \psi_\gamma^b\rangle) \tag{9.7}$$

Se allora pensiamo all'omomorfismo $\Phi_{\alpha,\beta}$ come "noto", la formula (9.7) mostra come il prodotto ab di due elementi arbitrari di B è determinato da questo omomorfismo.

Vediamo ora che risultati si ottengono moltiplicando il prodotto ab a destra per un elemento $d = (x_\delta, \xi_\delta) \in E_\delta$, dove $\delta \leq \alpha\beta$.

Allora, da una parte $abd = (ab)d = (\phi_\delta^{ab} x_\delta, \xi_\delta)$, dall'altra $abd = a(bd) =$

$= a(\phi_\delta^b x_\delta, \xi_\delta) = (\phi_\delta^a \phi_\delta^b x_\delta, \xi_\delta)$. Se ne deduce quindi che $\phi_\delta^{ab} = \phi_\delta^a \phi_\delta^b$ (9.8)

Analogamente, calcolando i due valori di dab si giunge alla formula

$$\psi_\delta^{ab} = \psi_\delta^a \psi_\delta^b \tag{9.9}$$

Formuliamo ora il teorema di Petrich (1967).

Teorema 9.1.

Sia Y un semireticolo e sia $\{E_\alpha / \alpha \in Y\}$ una famiglia di bande rettangolari a due a due disgiunte con insieme di indici Y. Per ogni α sia $E_\alpha = I_\alpha \times \Lambda_\alpha$, e per ogni coppia di elementi α,β di Y t.c. $\alpha \geq \beta$, sia $\Phi_{\alpha,\beta} : E_\alpha \to \mathfrak{J}^*(I_\beta) \times \mathfrak{J}(\Lambda_\beta)$ un omomorfismo t.c. $\forall a \in E_\alpha : a\Phi_{\alpha,\beta} = (\phi_\beta^a, \psi_\beta^a)$.

Supponiamo anche che

(i) se $a = (i,\mu) \in E_\alpha$, allora $\phi_\alpha^a, \psi_\alpha^a$ sono applicazioni costanti, e

$$\langle\phi_\alpha^{(i,\mu)}\rangle = i, \qquad \langle\psi_a^{(i,\mu)}\rangle = \mu ;$$

(ii) se $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ e $\alpha\beta = \gamma$, allora $\phi_\gamma^a \phi_\gamma^b$ e $\psi_\gamma^a \psi_\gamma^b$ sono applicazioni costanti;

(iii) se $\langle\phi_\gamma^a \phi_\gamma^b\rangle$ viene indicato con j e $\langle\psi_\gamma^a \psi_\gamma^b\rangle$ con ν, allora

$$\forall \delta \leq \gamma \quad \phi_\delta^{(j,\nu)} = \phi_\delta^a \phi_\delta^b , \quad \psi_\delta^{(i,\nu)} = \psi_\delta^a \psi_\delta^b .$$

Sia $B = \cup \{E_\alpha / \alpha \in Y\}$ e definiamo il prodotto di a in E_α e b in E_β in questo modo : $a * b = (\langle\phi_\gamma^a \phi_\gamma^b\rangle, \langle\psi_\gamma^a \psi_\gamma^b\rangle)$, dove $\gamma = \alpha\beta$. Allora $(B,*)$ è una banda, le cui $\mathfrak{J}$-classi (*) sono le bande rettangolari E_α.

Viceversa ogni banda è determinata in questo modo da un semireticolo Y da una famiglia di bande rettangolari $E_\alpha = I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ con insieme di indici in Y, e da una famiglia di omomorfismi $\Phi_{\alpha,\beta} : E_\alpha \to \mathfrak{J}^*(I_\beta) \times \mathfrak{J}(\Lambda_\beta)$ ($\alpha,\beta \in Y, \alpha \geq \beta$) soddisfacenti (i),(ii),(iii).

(*) La $\mathfrak{J}$ è la relazione di Green così definita: se S è un semigruppo $\forall a,b \in S$

$$a \mathfrak{J} b \iff S^1 a S^1 = S^1 b S^1$$

Dim.

La condizione sufficiente è vera grazie alla formule (9.6) e (9.9).

Per provare la condizione necessaria dimostriamo prima che la moltiplicazione "*" data è associativa.

Se $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$ e $c \in E_\gamma$ sono elementi arbitrari di B, e se $\alpha\beta = \delta$, $\beta\gamma = \varepsilon$ e $\alpha\beta\gamma=\xi$, sarà :

$$a * b = (< \phi_\delta^a \phi_\delta^b > , < \psi_\delta^a \psi_\delta^b >) = (j,\nu) \qquad e$$

$$b * c = (< \phi_\varepsilon^b \phi_\varepsilon^c >, < \psi_\varepsilon^b \psi_\varepsilon^c >) = (k,\pi) .$$

Allora

$$(a*b)*c = (<\phi_\zeta^{(j,\nu)} \phi_\zeta^c >, < \psi_\zeta^{(j,\nu)} \psi_\zeta^c >) = (< \phi_\zeta^a \phi_\zeta^b \phi_\zeta^c >,<\psi_\zeta^a \psi_\zeta^b \psi_\zeta^c >) =$$

$$= (< \phi_\zeta^a \phi_\zeta^{(k,\pi)} >, < \psi_\zeta^a \psi_\zeta^{(k,\pi)} >) = a*(b*c) \qquad \underline{\text{c.v.d.}}$$

Osserviamo che se $a = (i,\mu)$ e $b = (j,\nu)$ appartengono entrambi ad E_α, allora dalla definizione di "*" segue che:

$$a*b = (<\phi_\alpha^{(i,\mu)} \phi_\alpha^{(j,\nu)} >, < \psi_\alpha^{(i,\mu)} \psi_\alpha^{(j,\nu)} >),$$

inoltre per la proprietà (i) e per le proprietà delle applicazioni costanti sinistra e destra, risulta

$$(<\phi_\alpha^{(i,\mu)} \phi_\alpha^{(j,\nu)} >, < \psi_\alpha^{(i,\mu)} \psi_\alpha^{(j,\nu)} >) = (< \phi_\alpha^{(i,\mu)} > < \phi_\alpha^{(j,\nu)} >, <\psi_\alpha^{(i,\mu)} ><\psi_\alpha^{(j,\nu)} > = (i$$

Questo coincide esattamente con il prodotto di a e b in una banda rettangolare E_α. In particolare segue che $a*a = a$ e così B è una banda.

Proviamo ora che le $\mathcal{J}$-classi di B sono tutte e sole le bande rettangolari E_α, $\alpha \in Y$.

Osserviamo intanto, che presi $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$ e posto $\gamma = \alpha\beta$ risulterà, per quanto visto prima, che

$$a * b = (\langle \phi_\gamma^a \phi_\gamma^b \rangle , \langle \psi_\gamma^a \psi_\gamma^b \rangle) = (i_\gamma , \nu_\gamma) \quad \text{con } i_\gamma \in I_\gamma \text{ e } \nu_\gamma \in \Lambda_\gamma ,$$

per cui $a * b \in E_\gamma$. Allora se ne deduce che

$$E_\alpha * E_\beta \subseteq E_{\alpha\beta} .$$

Ora consideriamo due elementi $a, b \in B$ t.c. $a \,\mathcal{J}\, b$. Allora esisteranno E_α e E_β t.c. $a \in E_\alpha$ e $b \in E_\beta$ e

$x \in E_\delta$, $y \in E_\varepsilon$, $u \in E_\zeta$, $v \in E_\eta$ t.c. $b = x*a*y$ e $a = u*b*v$,

con $\delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ opportuni elementi di Y.

Se poniamo $\delta\alpha = \alpha'$, $\alpha'\varepsilon = \alpha''$ e $\zeta\beta = \beta'$, $\beta'\eta = \beta''$, allora, per l'osservazione precedente, sarà $b = (x*a)*y \in E_{\alpha''}$ e $a = (u*b)*v \in E_{\beta''}$, quindi $a*b \in E_{\alpha''\beta''}$.

Cioé se due elementi di B sono $\mathcal{J}$-equivalenti allora essi stanno in uno stesso E_γ , con γ opportuno elemento di Y.

Viceversa, se due elementi di B stanno in uno stesso $E_\gamma, \gamma \in Y$, allora essi sono $\mathcal{J}$-equivalenti.

Infatti da $a, b \in E_\gamma$, E_γ banda rettangolare, segue che $a = a*b*a$ e $b = b*a*b$, pertanto $a \,\mathcal{J}\, b$.

Il teorema di Petrich è così completamente provato.

CAPITOLO IV

10. Bande libere.

Sia X un insieme di generatori (o variabili), consideriamo il semigruppo libero $F = F(X)$, generato da X (la definizione è già stata data nel paragrafo 6 della Parte I). Conveniamo di ampliare il semigruppo libero con l'aggiunta dell'elemento neutro che diremo parola vuota. Introduciamo in F una relazione di congruenza nel seguente modo: diremo che due parole sono congrue se, eliminando in esse tutte le sottoparole successive ripetute, si ottiene la stessa parola; ad esempio le parole $x_1x_2x_3x_1x_2^2x_3^4x_1x_3$ e $x_1x_2^3(x_3x_1)^2x_3$ sono congrue perché semplificando si ottiene da entrambe la parola $x_1x_2x_3x_1x_3$.

Detto S l'insieme delle classi di congruenza, esso, con la moltiplicazione definita nel modo solito, è una banda. Inoltre l'applicazione da F in S che porta ogni parola nella sua classe di congruenza è un epimorfismo. Se n è la cardinalità di X, S viene detta la banda libera su n generatori.

Per ogni parola $W \in F$ denotiamo con C_W l'insieme dei generatori distinti che formano W. E' chiaro che se U e V sono parole appartenenti alla stessa classe di congruenza allora $C_U = C_V$. Perciò per ogni classe di congruenza A di S vi è un ben definito insieme C_A, il quale è indipendente dal rappresentante di A.

Segue dalla definizione che $C_{AB} = C_A \cup C_B$, per ogni $A,B \in S$. Infatti C_{AB} è l'insieme dei generatori distinti di un qualsiasi rappresentante di (AB) quindi è costituito da tutti e soli i generatori distinti di un rappresentante di A o di un rappresentante di B.

<u>Lemma 10.1</u>. Per ogni $A,B \in S$: $C_A = C_B \iff A \, P \, B$

<u>Dim.</u> Proviamo prima che la condizione è sufficiente.

Per definizione di P(*) $A \, P \, B \iff ABA = A$ e $BAB = B$,

---

(*) v.Parte I pag. 6

nesegue che $C_{ABA} = C_A$, ma $C_{ABA} = C_A \cup C_B \cup C_A = C_A \cup C_B$, quindi $C_A \cup C_B = C_A$, da cui $C_B \subseteq C_A$.

Con analogo ragionamento da BAB = B si deduce che $C_A \subseteq C_B$, concludendo $C_A = C_B$.

Viceversa sia $C_A = C_B$, con $A = A_1A_2\ldots A_n$ e $B = B_1B_2\ldots B_m$, proviamo dapprima che $C_A \subseteq C_B \Longrightarrow AB\ P\ B$.

Infatti dalla riflessività della P si ha che AB P AB,cioé $A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots\ldots B_m\ P\ A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_m$, ma essendo $XY\ P\ YX$ in ogni $X,Y \in S$, risulta: $A_nB_j\ P\ B_jA_n$ per ogni $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, inoltre dall'ipotesi $C_A \subseteq C_B$ segue che esiste $\bar{j} \in \{1,2,\ldots m\}$ t.c. $A_n = B_{\bar{j}}$, allora commutando A_n con i B_j si avrà ad un certo punto $A_1A_2\ldots A_nB_1\ldots B_m\ P\ A_1A_2\ldots A_{n-1}B_1B_2\ldots A_nB_{\bar{j}}\ldots B_m$ ed essendo $A_nB_{\bar{j}} = B_{\bar{j}}\ B_{\bar{j}} = B_{\bar{j}}$ risulterà $AB\ P\ A_1A_2\ldots A_{n-1}B_1B_2\ldots B_m$.

Successivamente facendo lo stesso ragionamento per tutti gli A_i $i\in\{1,\ldots n\}$ otterremo AB P B.

Analogamente da $C_B \subseteq C_A$ segue che A P.BA.

Essendo BA P AB si ha che, per la transitività di P, A P BA,BA P AB,AB P B$\Longrightarrow$ A P B come volevamo.

<u>Lemma 10.2.</u> $C_A = C_C$ e $C_B \subseteq C_A \Longrightarrow ABC = AC$.

<u>Dim.</u>

Da $C_B \subseteq C_A$ segue che $C_{AB} = C_A \cup C_B = C_A$, quindi $C_C = C_A = C_{AB}$ da cui, per il lemma 10.1 C P AB e per definizione di P:

C(AB)C = C. Allora (ACA)BC = A[C(AB)C] = AC. Ma, essendo $C_A = C_C$, per il lemma 8.1 è A P C,quindi ACA = A, per cui ABC = A(BC) = (ACA)(BC) = AC.

Definiamo <u>lunghezza</u> di una parola il numero di generatori (non necessariamente distinti) che la compongono; così se x e y sono generatori, la parola x è di lunghezza 1, le parole xx e xy sono ognuna di lunghezza 2, ecc. Chiaramente ogni parola ha lunghezza positiva. Si dice che una parola ha lunghezza minima se la classe di congruenza di S che la contiene non contiene parole più corte, e perciò d'ora in poi si considereranno gli elementi di S rappresentati da parole di minima lunghezza.

Teorema 10.1. Una banda libera finitamente generata è di ordine finito.

Premettiamo il seguente

Lemma 10.3. Per ogni numero n esiste una lunghezza m t.c. tutti gli elementi di lunghezza minima m denono essere un prodotto di almeno n generatori distinti.

Dim.

Ragioniamo per induzione su n.

Per n = 1 esiste la lunghezza m = 1, per cui tutte le parole di lunghezza minima uguale a 1 possono essere considerate come prodotto di un generatore.

Supponiamo il lemma vero per n e proviamolo per n+1; cioé in corrispondenza di n esiste la lunghezza m che soddisfa il lemma, dobbiamo provare che in corrispondenza di n+1 la lunghezza 2m+1 è tale che tutti gli elementi di minima lunghezza 2m+1 sono il prodotto di almeno n+1 generatori distinti. Infatti consideriamo il prodotto di minima lunghezza 2m+1

$$A = \prod_{i=1}^{2m+1} \alpha_i$$

e facciamo vedere che A ha almeno n+1 distinti generatori.

Siano $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i = X$ e $\prod_{i=m+2}^{2m+1} \alpha_i = Y$ allora $A = X\alpha_{m+1}Y$, dove X e Y sono prodotti di minima lunghezza m.

Poiché per ipotesi il lemma è vero per n, C_X e C_Y contengono ciascuno almeno n distinti generatori. Chiaramente C_X e C_y sono contenuti in C_A. Ora se C_A contenesse solo n distinti generatori allora

$C_X = C_Y = C_A$. E poiché α_{m+1} e C_A, allora si avrebbe anche α_{m+1} e C_X e a_{m+1} e C_Y.

Così per il lemma 10.2 risulterebbe $A = X\, a_{m+1} Y = XY$. Ma XY è di minima lunghezza $2m$ e tale sarebbe anche A, contro l'ipotesi che A ha minima lunghezza $2m+1$.

In conclusione tutte le espressioni di minima lunghezza $2m+1$ devono essere prodotto di almeno $n+1$ generatori distinti e questo prova il lemma.

Per provare il teorema consideriamo una banda libera S finitamente generata, cioé un semigruppo idempotente libero su n generatori, con n finito.

Segue dal lemma 10.3 che tutti gli elementi di minima lunghezza generati da un numero finito di generatori non devono superare una certa lunghezza, quindi vi può essere solo un numero finito di termini.

<u>Corollario 10.1</u>. Tutte le bande finitamente generate sono di ordine finito.

Infatti una banda S generata da $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ è isomorfa alla banda libera costruita sull'insieme $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Sviluppando la teoria delle bande libere si arriva alla seguente formula per l'ordine I_N della banda libera su N generatori:

$$I_N = \sum_{r=1}^{N} C_r^N \prod_{i=1}^{r} (r-i+1)^{2^i}$$

11. Bande libere regolari.

Per <u>banda libera regolare</u> (a sinistra, a destra) generata da un insieme non vuoto X, intendiamo una banda S tale che:

1) esiste un'applicazione $i : X \to S$, che si dice <u>immersione</u>
2) $i(X)$ genera S
3) S è una banda regolare (a sinistra, a destra)(*)

(*) |Ved. Defin. in Parte I, pag. 20|

4) per ogni banda regolare (a sinistra, a destra) T e per ogni applicazione $j : X \to T$ esiste un omomorfismo $h : S \to T$ t.c. $j = hi$, cioé h è tale da rendere commutavito il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & S \arrow[dl, "h"] \\ T & \end{tikzcd}$$

OSS. 11.1.

In questa definizione non si richiede che l'immersione sia iniettiva, ma che ciò si verifica si può provare facilmente a partire dalla 4) scegliendo una banda regolare T, avente almeno due elementi distinti a,b e costruendo j in modo tale che, fissati arbitrariamente due elementi distinti x,y e X, risulti $j(x) = a, j(y) = b$. E' anche facile vedere che se ci sono due bande regolari libere per un dato insieme X, allora esse sono isomorfe tramite un isomorfismo che fissa gli elementi di X (nel senso che fa corrispondere elementi di i(X) e di j(X) che provengono da uno stesso elemento di X). Così se esiste una banda libera regolare (a sinistra, a destra) essa è unica a meno di isomorfismi. E anche l'omomorfismo h della 4) è unico.

La banda libera commutativa, cioé il semireticolo libero generato da X, è definito analogamente.

Costruiamo ora la banda libera regolare (a sinistra, a destra) a partire da un dato insieme X.

Sia dunque X un insieme non vuoto. Sia S l'insieme di tutti i sottoinsiemi non vuoti di X costituiti da un numero finito di elementi. Abbiamo allora il seguente:

Lemma 11.1.

L'insieme S precedentemente definito è il semireticolo libero generato da X con il prodotto definito da $y \cdot z = y \cup z$ $\forall y,z \in S$, dove $\cup$ denota l'unione insiemistica.

Dim.

E' ovvio che S forma un semireticolo generato da $\{\{x\} : x \in X\}$.

Sia $i : X \to S$ l'applicazione definita da $i(x) = \{x\}$. Sia T un semireticolo e $j : X \to T$ una qualunque applicazione. Allora l'applicazione $h : S \to T$ definita da $h(y) = j(x_1)j(x_2)\dots j(x_n)$, con $y = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, è un omomorfismo. Infatti presi $y = \{x_1,x_2,\dots x_n\}$ e $z = \{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots\bar{x}_m\}$ risulta $h(y)\,h(z) = j(x_1)\dots j(x_n)j(\bar{x}_1)\dots j(\bar{x}_m)$, $h(yz) = h(\{x_1,\dots,x_n\}\cup\{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_m\}) =$
$= h(\{x_1,\dots,x_n,\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_m\}) = j(x_1)\dots j(x_n)j(\bar{x}_1)\dots j(\bar{x}_m)$,
quindi $h(y)h(z) = h(yz)$; inoltre si ha $j(x) = h(\{x\}) = h(i(x))$ $\forall x \in X$, cioé $j = hi$.

Così S è il semireticolo libero generato da X.

Teorema 11.1.

Sia X un insieme non vuoto. Sia Γ il semireticolo libero ottenuto nel Lemma 11.1. Siano A e B gli insiemi di tutti i sottoinsiemi non vuoti di X finitilinearmente ordinati, strutturati con l'operazione di giustapposizione cancellando tutte le seconde lettere che appaiono nell'espressione del prodotto leggendo, rispettivamente, da sinistra e da destra .

Sia $s : A \to \Gamma$ $(t : B \to \Gamma)$ l'applicazione definita $s(a)$ $(t(b))$ uguale all'insieme di tutti i punti distinti contenuti in $a(b)$.

Siano $A_\gamma = s^{-1}(\gamma)$ e $B_\gamma = t^{-1}(\gamma)$ per $\gamma\in\Gamma$. Allora $A(B)$ e la banda libera regolare a sinistra (a destra) generata da X e $A \sim \Sigma\{A_\gamma | \gamma\in\Sigma\}$ $(B \sim \Sigma\{B_\gamma/\gamma\in\Gamma\})$ è la sua decomposizione strutturale.

Dim.

Sia $F = F(X)$ il semigruppo libero generato da X. Immergiamo X in F nel modo naturale tramite l'applicazione $k : X \to F$ t.c. $k(x) = \{x\}$.

Consideriamo l'applicazione q di F in F che ad ogni parola di F associa la sua parte iniziale, e l'applicazione r di F in F che ad ogni parola di F associa la sua parte finale (*).

Siano $A_0 = q(F) \subseteq F$, $B_0 = r(F) \subseteq F$ le immagini di F tramite q e r. Osserviamo che q ed r non sono omomorfismi; infatti basta considerare il caso di due parole uguali $P = Q$, in cui evidentemente $q(PP) \neq q(P)q(P)$ e $r(PP) \neq r(P)r(P)$. Inoltre A_0 e B_0 non sono sottosemigruppi, infatti basta prendere due elementi di $A_0(B_0)$ uguali per concludere che il loro prodotto non può stare in $A_0(B_0)$, per la definizione di $q(r)$.

Definiamo ora due operazioni rispettivamente in A_0 e in B_0 in modo tale che A_0 e B_0 così strutturati siano due bande:

$$\forall a,a' \in A_0 \qquad m(a,a') = q(aa')$$

$$\forall b,b' \in B_0 \qquad n(b,b') = r(bb').$$

Siano $a,a',a'' \in A_0$. Proviamo che m è associativa in A_0, infatti

$m(m(a,a'),a'') = m(q(aa'),a'') = q(q(aa')a'') = q(aa'a'')$

$m(a,m(a',a'')) = m(a,q(a'a'')) = q(a,q(a'a'')) = q(aa'a'')$ e quindi

$m(m(a,a'),a'') = m(a,m(a',a''))$.

Inoltre $m(a,a) = q(aa) = q(a) = a$ e $m(m(a,a')a) = q(aa'a) = q(aa') = m(a,a')$. Quindi A_0 risulta essere una banda regolare a sinistra con l'operazione m. Analogamente B_0 risulta essere una banda regolare a destra con l'operazione n.

(*) Per le definizioni di parte iniziale e parte finale vedere Parte I, pag.48.

Denoteremo queste bande con A e B invece che con A_o e B_o, a causa della differenza di operazioni.

Si prova facilmente che $q : F \to A$ e $r : F \to B$ sono entrambi epimorfismi. Infatti ogni $a \in A$ è parte iniziale di almeno una parola di F, quindi q è suriettiva, inoltre $\forall P, P' \in F$: $q(PP') = m(q(P), q(P'))$, in quanto $m(q(P), q(P')) = q(q(P) \cdot q(P')) = q(PP')$. Analogo discorso vale per $r : F \to B$.

Poiché F è generato da $k(X)$, A e B sono generati da $i(X)$ e $j(X)$, rispettivamente, dove $i = q\,k$ e $j = rk$.

Siano ora A' una banda regolare a sinistra e $i' : X \to A'$ un'applicazione qualsiasi. Poiché F è il semigruppo libero generato da X, esiste un omomorfismo $f : F \to A'$ t.c. $i' = fk$, cioé tale da rendere commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i'"] \arrow[dr, "k"'] & A' \\ & F \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Per ogni $w \in F$ abbiamo $f(w) = h(q(w))$, perché A' è regolare a sinistra, cioé esiste un omomorfismo $h : A \to A'$ t.c. $f = hq$. Allora essendo $i = qk$, risulta $i' = fk = (hq)k = h(qk) = hi$. Pertanto A risulta essere la banda libera regolare a sinistra generata da X. Analogamente si prova che B è la banda libera regolare a destra generata da X.

Consideriamo il semigruppo libero Γ generato da X con sua immersione $c : X \to \Gamma$ (Lemma 9.1). Allora, poiché Γ è contemporaneamente regolare a sinistra e a destra, esistono due omomorfismi $s : A \to \Gamma$ e $t : B \to \Gamma$ t.c. $si = c = tj$. E' ovvio che:

$$s(a) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \qquad \text{se} \quad a = i(x_1)\,i(x_2) \ldots i(x_n)\ .$$

Sia $A_\gamma = s^{-1}(\gamma)$ e $B_\gamma = t^{-1}(\gamma)$, con $\gamma \in \Gamma$. Allora si prova facilmente che A_γ è zero-sinistro e B_γ è zero-destro e perciò sono rettangolari.

Così applicando il Corollario 4.3 (Parte I, pag. 24) segue che $A \sim \Sigma\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ e $B \sim \Sigma\{B_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ sono le decomposizioni strutturali di A e di B.

Corollario 11.1.

La banda libera regolare a sinistra (a destra) generata da n elementi ha $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i! = n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}$ elementi.

Dim.

Sia $A \sim \Sigma \{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ (Teor. 9.1) la banda libera regolare a sinistra, geberata da X, con $|X| = n$, dove Γ è il semireticolo libero generato da X. Ora se $|\gamma| = i$ allora $|A_\gamma| = i!$, perché gli elementi di A_γ si ottengono da tutte le permutazioni degli elementi di γ. Poiché $A \sim \Sigma\{A_\gamma | \gamma \in \Sigma\}$, risulta che l'ordine di A è dato dalla somma, per $1 \leq i \leq n$, dei prodotti del numero delle combinazioni semplici degli n elementi di X di classe i per i! cioé per l'ordine di ogni A_γ. Pertanto risulta

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i! = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} i! = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-i)!} = n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}$$

Analogamente per la banda libera regolare a destra B si prova che

$$|B| = n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} .$$

Teorema 11.2. Sia X un insieme non vuoto. Siano A,B,Γ rispettivamente la banda libera regolare a sinistra, la banda libera regolare a destra, e la banda commutativa generate da X, t.c. Γ sia riguardata come il semireticolo strutturale di A e B contemporaneamente. Allora la banda libera regolare generata da X è il prodotto retratto (*) di A e di B rispetto a Γ.

Dim.

Siano A,B e Γ la banda libera regolare a sinistra, la banda libera regolare a destra, e il semireticolo liberi, generati da X con le immersioni $i : X \to A$, $j : X \to B$, $C : X \to \Gamma$ rispettivamente. Poiché Γ è contemporaneamente regolare a sinistra e a destra, esistono gli omomorfismi $s : A \to \Gamma$ e $t : B \to \Gamma$ t.c. $si = c = tj$. Sia C il prodotto retratto di A e B rispetto a Γ avente s e t come omomorfismi naturali, cioé $c = \{(a,b) \in A \times B / s(a) = t(b)\}$. Ora poiché $s(i(x)) = (si)(x) = c(x) = (tj)(x) = t(j(x))$ l'elemento $(i(x),j(x))$ appartiene a C. Definiamo ora un'applicazione in questo modo: $\forall x \in X \quad k(x) = (i(x),j(x))$. Proveremo che C è generato da $k(X)$.

Scegliamo un elemento $(a,b) \in C$, allora $s(a) = t(b) \in \Gamma$. Poiché A e B sono generati da X, abbiamo $a = i(x_1)i(x_2)\dots\dots i(x_m)$, $b = j(y_1)j(y_2)\dots j(y_n)$. Allora $s(a) = c(x_1)c(x_2)\dots c(x_m)$ e $t(b) = c(y_1)c(y_2)\dots c(y_n)$, ma $s(a)=t(b)$, quindi il sottoinsieme costituito dagli elementi $x_1,x_2,\dots x_m$ coincide con quello costituito dagli elementi $y_1,y_2,\dots,y_n$.

E poiché A è regolare a sinistra abbiamo:

$$i(x_1)i(x_2)\dots i(x_m)i(y_1)i(y_2)\dots i(y_n) = i(x_1)i(x_2)\dots i(x_m) = a.$$

Analogamente, poiché B è regolare a destra:

$j(x_1)j(x_2)\dots j(x_m)j(y_1)j(y_2)\dots\dots j(y_n) = j(y_1)\dots j(y_n) = b$. Allora risulta

$(a,b) = (i(x)i(y),j(x)j(y)) = (i(x),j(x))(i(y),j(y)) = k(x)k(y)$, ossia

$(a,b) = k(x_1)k(x_2)\dots k(x_m)k(y_1)k(y_2)\dots k(y_n)$, il che prova che $k(X)$ genera C.

Proveremo ora che C è la banda libera regolare generata da X.

Sia C' una banda regolare e $k' : X \to C'$ un'applicazione. Poiché C' è regolare, per il Lemma 4.10 (Parte I, pag. 26), essa è il prodotto retratto di una banda regolare a sinistra A' e di una banda regolare a destra B' rispetto ad un semireticolo Γ', dove $s' : A' \to \Gamma'$ e $t' : B' \to \Gamma'$ sono gli omomorfismi naturali.

Poiché A, B e Γ sono liberi, esistono gli omomorfismi $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ e $h : \Gamma \to \Gamma'$ t.c.

(1) $fi = u'k'$, $gj = v'k'$, $hc = d'k'$,

dove $u' : C' \to A'$, $v' : C' \to B'$ sono gli omomorfismi naturali e $d' : C' \to \Gamma'$, inoltre sono tali che

(2) $s'u' = d' = t'v'$.

Siano $u : C \to A$, $v : C \to B$ gli omomorfismi naturali e $d : C \to \Gamma$ t.c. $su = d = tv$.

Preso $(a,b) \in C$ si ha per definizione che $s(a) = t(b)$. Poiché C è generato da $k(x)$, esistono $x_1,x_2,\dots x_n \in X$ t.c.

$a = i(x_1)i(x_2)\dots i(x_n)$, $b = j(x_1)j(x_2)\dots j(x_n)$.

Poniamo $f(a) = a'$, $g(b) = b'$. Allora dalle (1) e (2) abbiamo:

$$s'(a') = s'f(a) = \prod_{\nu=1}^{n} s'fi(x_\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} s'u'k'(x_\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} d'k'(x_\nu) ,$$

$$t'(b') = t'g(b) = \prod_{\nu=1}^{n} t'gj(x_\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} t'v'k'(x_\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} d'k'(x_\nu) .$$

Così $s'(a') = t'(b')$ e perciò $(a',b') \in C'$ cioé $(f(a),g(b)) \in C'$.
Allora esiste un'applicazione $p : C \to C'$ definita da $p(a,b) = (f(a),g(b))$.

Tale applicazione è un omomorfismo, infatti

$$p((a,b)(\bar{a},\bar{b})) = p(a\bar{a},b\bar{b}) = (f(a\bar{a}),g(b\bar{b})) = (f(a)f(\bar{a}),g(b)g(\bar{b})) =$$

$$= (f(a),g(b))(f(\bar{a}),g(\bar{b})) = p(a,b)p(\bar{a},\bar{b}).$$

Inoltre per $x \in X$ abbiamo, per la (1), che

$k'(x) = (u'k'(x),v'k'(x)) = (fi(x),gj(x)) = p(i(x), j(x)) = pk(x)$ perché $k(x) = (i(x),j(x))$, pertanto $k' = pk$.

<u>Corollario 11.2</u>. La banda libera regolare generata da n elementi distinti ha $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(i!)^2 = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{i!}{(n-i)!}$ elementi.

Dim.

Sia $C \sim \{A_\gamma \times B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ la banda libera regolare generata da X (Teor.11.2), con $|X| = n$, dove Γ è il semireticolo libero generato da X. Se $n = i$ allora $|A \times B| = (i!)^2$, pertanto l'ordine di C sarà dato dalla somma, per $1 \leq i \leq n$, di tutti i prodotti del numero delle combinazioni semplici degli n elementi di X di classe i per $(i!)^2$, cioé

$$|C| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}(i!)^2 = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-i)!}$$

12. Varietà di Bande.

Sia X un insieme e sia $F = F(X)$ il semigruppo libero su X.

Sia S un semigruppo. Se $P, Q \in F$ allora diremo che la relazione identica $P = Q$ è soddisfatta in S se per ogni omomorfismo $\phi : F \quad S$ risulta $P\phi = Q\phi$. Così, per esempio, la relazione identica $ab = ba$ è soddisfatta in S se S è un semigruppo commutativo.

Diamo ora la seguente definizione. La classe di semigruppi in cui è soddisfatta una collezione finita o infinita $P_1 = Q_1$, $P_2 = Q_2, \ldots$, di relazioni identiche si dice varietà di semigruppi determinata da quelle relazioni identiche. Per esempio la classe dei semigruppi commutativi è una varietà. La classe di tutti i semigruppi è anche una varietà determinata, per esempio, dalla relazione identica $a = a$. Ovviamente la classe $\mathfrak{B}$ delle bande è una varietà determinata dall'unica relazione identica $a^2 = a$.

D'ora in poi indicheremo la varietà determinata dalle relazioni identiche $P_1 = Q_1$, $P_2 = Q_2, \ldots\ldots$ con $[P_1 = Q_1, P_2 = Q_2, \ldots\ldots]$; la varietà determinata da un insieme R di relazioni identiche sarà indicata con $[R]$.

L'intersezione di una famiglia non vuota di varietà $\mathcal{V}_i$ $(i \in I)$ è una varietà, perché se $\mathcal{V}_i$ è determinata da un insieme R_i di relazioni identiche $(\forall i \in I)$, allora un semigruppo S appartiene all'intersezione sse l'insieme di relazioni identiche $\cup\{R_i / i \in I\}$ è soddisfatto in S. Così, per esempio, l'intersezione $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ della varietà $\mathcal{B}$ di bande e della varietà $\mathcal{C}$ di semigruppi commutativi è la varietà $[a^2 = a, ab = ba]$ di semireticoli.

L'unione di una famiglia di varietà invece non è detto che sia una varietà. Si può, comunque, dare una "ben definita" unione $V\{\mathcal{V}_i / i \in I\}$ di una famiglia $\{\mathcal{V}_i / i \in I\}$ di varietà, che di fatto è l'intersezione della famiglia di tutte le varietà contenenti ogni $\mathcal{V}_i$. (Tale famiglia è non vuota, perché la varietà di tutti i semigruppi necessariamente contiene ogni $\mathcal{V}_i$). Può essere difficile determinare un conveniente insieme di relazioni identiche caratterizzanti l'$V\{\mathcal{V}_i / i \in I\}$, sebbene in teoria possiamo sempre ottenere uno relativo all'intersezione della famiglia delle varietà che contengono ogni $\mathcal{V}_i$.

Introduciamo ora per le varietà di bande le seguenti notazioni:

$\mathcal{SL}$	semireticoli	$ab = ba$	
$\mathcal{LN}$	bande normali a sin	$abc = acb$	
$\mathcal{RN}$	bande normali a destra	$abc = bac$	(12.1)
$\mathcal{N}$	bande normali	$abca = acba$	
$\mathcal{T}$	bande triviali	$a = b$	
$\mathcal{LZ}$	bande zero-sinistre	$ab = b$	
$\mathcal{RZ}$	bande zero-destre	$ab = b$	
$\mathcal{RB}$	bande rettangolari	$aba = a$	

In ogni caso la relazione identica data caratterizza la varietà all'interno della varietà di bande. Le caratterizzazioni all'interno della varietà di semigruppi sono ottenute sempre aggiungendo la relazione identica $a^2 = a$. (Naturalmente ciò non è sempre necessario, ad esempio nel caso delle bande rettangolari abbiamo visto che la relazione identica $aba = a$ implica la relazione identica $a^2 = a$).

Con le operazioni $\cap$ e V l'insieme delle varietà di semigruppi diventa un reticolo completo (*) avente come elemento massimo la varietà $[a = a]$ di

(*) Ved. def. in |4| pag. 12

tutti i semigruppi e come elemento minimo la varietà $[a = b]$ dei semigruppi con un solo elemento. L'insieme delle varietà delle bande, cioé l'insieme delle varietà $\mathcal{V}$ dei semigruppi t.c. $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$, è un sottoreticolo $\mathcal{B}$ di questo reticolo.

Si definisce atomo di un reticolo $(L,\wedge,\vee)$, con elemento minimo 0, un elemento minimale a nell'insieme $L - \{0\}$.

Il reticolo $\mathcal{B}$ delle varietà di bande ha come insieme degli atomi l'insieme così fatto:

$$\{\mathcal{SL}, \mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}\}^{(*)}$$

Consideriamo ora il sottoreticolo di $\mathcal{B}$, $\mathcal{U}$, generato dagli atomi di $\mathcal{B}$, cioé generato da $\mathcal{SL}, \mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}$, e cerchiamo di identificate le varietà che lo costituiscono.

Osserviamo intanto che

$$\mathcal{LZ} \subseteq \mathcal{RB}, \quad \mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{RB} \implies \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{RB}$$

Viceversa ogni banda rettangolare può essere riguardata come il prodotto diretto di un semigruppo zero-sinistro L e di un semigruppo zero-destro R (ved Parte I, pag. 10 Lemma 1.13), cioé ogni elemento di $\mathcal{RB}$ è del tipo LxR, dove $L \in \mathcal{LZ} \subseteq \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ}$ e $R \in \mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ}$; quindi LxR $\in \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ}$. Ne segue che $\mathcal{RB} = \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ}$.

Vale inoltre la seguente proposizione, che è un rifacimento di un risultato già ottenuto da Yamada e Kimura (Ved Parte I, pag. 36 Teor. 5.6).

(*) Ved. |4|, Teor. 5.6 pag. 114

Proposizione 12.1. - Una banda B è normale sse essa è un semireticolo forte (*) di bande rettangolari.

Dim.

Sia $B = \mathcal{S}(Y; E_\alpha; \phi_{\alpha,\beta})$ un semireticolo forte di bande rettangolari e siano a, b, c elementi qualsiasi di B, con $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$, $c \in E_\gamma$ e poniamo $\delta = \alpha\beta\gamma$. Allora

$$abca = (a\phi_{\alpha,\delta})(b\phi_{\beta,\delta})(c\phi_{\gamma,\delta})(a\phi_{\alpha,\delta}) = a\phi_{\alpha,\delta} \quad \text{(poiché } E_\delta \text{ è una banda rettangolare)}$$

e analogamente $acba = a\phi_{\alpha,\delta}$. Quindi $abca = acba$ $\forall a,b,c \in B$, e così B è normale.

Viceversa, se B è una banda normale, consideriamo la struttura data a B del Teorema di Petrich (Teor. 9.1). Ricordiamo che se $a \in E_\alpha$ e $(x,\xi) \in E_\beta = I_\beta \times \Lambda_\beta$, con $\beta \leq \alpha$, allora per la formula (9.5) risulta

$$a(x,\xi) = (\phi^a_\beta x, \xi) \quad , \quad (x,\xi)a = (x, \xi\psi^a_\beta).$$

Quindi se $a \in E_\alpha$ e se $b = (x,\xi)$ e $c = (y,\eta)$ sono elementi di E_β $(\beta \leq \alpha)$, allora

$$abca = (\phi^a_\beta x, \xi)(y, \eta\psi^a_\beta) = (\phi^a_\beta x, \eta\psi^a_\beta), \qquad \text{mentre}$$

$$acba = (\phi^a_\beta y, \eta)(x, \xi\psi^a_\beta) = (\phi^a_\beta y, \xi\psi^a_\beta)$$

(*) $\mathcal{S}(Y; E_\alpha, \phi_{\alpha\beta})$ è un semireticolo forte di semigruppi sse Y è un semireticolo, $\{E_\alpha / \alpha \in Y\}$ è una famiglia disgiunta di semigruppi t.c. $E_\alpha E_\beta \subseteq E_{\alpha\beta}$ e $S = \cup\{E_\alpha / \alpha \in Y\}$ e $\forall \alpha, \beta \in Y$ t.c. $\alpha \geq \beta$ $\phi_{\alpha,\beta}: E_\alpha \to E_\beta$ è un omomorfismo e risulta che

1) $\phi_{\alpha,\alpha}$ è l'automorfismo identico di E_α $\forall \alpha \in Y$

2) $\phi_{\alpha,\beta}\phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma}$ $\forall \alpha,\beta,\gamma \in Y$ t.c. $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

Inoltre in S è definita una moltiplicazione "$*$" come segue
$\forall a_\alpha \in S_\alpha$, $\forall b_\beta \in S_\beta$: $a_\alpha * b_\beta = (a_\alpha\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b_\beta\phi_{\beta,\alpha\beta})$.

così se la banda è normale concludiamo che ϕ^a_β e ψ^a_β sono applicazioni costanti $\forall a \in E_\alpha$ e per ogni coppia (α,β) di elementi di Y per i quali $\alpha \geq \beta$. L'applicazione $\Phi_{\alpha\beta}: E_\alpha \to \mathcal{J}^*(I_\beta) \times \mathcal{J}(\Lambda_\beta)$ che manda ogni $a \in E_\alpha$ nella coppia ordinata $(\phi^a_\beta, \psi^a_\beta)$ può essere così identificata con l'applicazione $\phi_{\alpha,\beta}: E_\beta \to I_\beta \times \Lambda_\beta$, che manda a nella coppia ordinata $(\langle\phi^a_\beta\rangle, \langle\psi^a_\beta\rangle)$.

Inoltre presi $a,a' \in E_\alpha$, allora

$(aa')\phi_{\alpha,\beta} = (\langle\phi^{aa'}_\beta\rangle, \langle\psi^{aa'}_\beta\rangle) = (\langle\phi^a_\beta\phi^{a'}_\beta\rangle, \langle\psi^a_\beta\psi^{a'}_\beta\rangle) =$ (per le 9.8 e 9.9)

$= (\langle\phi^a_\beta\rangle, \langle\psi^{a'}_\beta\rangle) =$ (poiché I_β è un semigruppo zero sinistro e Λ_β è un semigruppo zero destro)

$= (\langle\phi^a_\beta\rangle, \langle\psi^a_\beta\rangle)(\langle\phi^{a'}_\beta\rangle, \langle\psi^{a'}_\beta\rangle) = (a\phi_{\alpha,\beta})(b\phi_{\alpha,\beta})$, e così

$\phi_{\alpha,\beta}: E_\alpha \to E_\beta$ è un omomorfismo.

Poi notiamo che se $\beta \leq \alpha$ allora per ogni $a \in E_\alpha$ e per ogni $b = (x,\xi) \in E_\beta$,

$$aba = (\phi^a_\beta x, \xi\psi^a_\beta) = (\langle\phi^a_\beta\rangle, \langle\psi^a_\beta\rangle) = a\phi_{\alpha,\beta} \qquad (12.2)$$

Se $\beta = \alpha$ segue che $a\phi_{\alpha,\alpha} = aaa = a \quad \forall a \in E_\alpha$. Così $\phi_{\alpha,\alpha}$ è l'automorfismo identico di E_α.

Se $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ e $a \in E_\alpha$, allora segue dalla (12.2) che $\forall b \in E_\beta$ e $\forall c \in E_\gamma$ $(a\phi_{\alpha,\beta})\phi_{\beta,\gamma} = abacaba$.

Poiché $bacab \in E_\gamma$ segue, ancora per la (12.2), che

$$abacaba = a\phi_{\alpha,\gamma}.$$

Quindi $\phi_{\alpha,\beta}\,\phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma}$.

Infine, se $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$ e $\alpha\beta = \gamma$, allora per la regola di moltiplicazione (9.7) risulta:

$$ab = (\langle\phi^a_\gamma\phi^b_\gamma\rangle, \langle\psi^a_\gamma\psi^b_\gamma\rangle) = (\langle\phi^a_\gamma\rangle, \langle\psi^b_\gamma\rangle) =$$

$$= (<\phi^a_\gamma>,<\psi^b_\gamma>)(<\phi^b_\gamma),<\psi^b_\gamma>) = (a\phi_{\alpha,\gamma})(b\phi_{\beta,\gamma}).$$

Quindi B è un semireticolo forte $\mathcal{S}(Y;E_\alpha,\phi_{\alpha,\beta})$ di bande rettangolari.

Corollario 12.1

Una banda è normale a sinistra sse essa è un semireticolo forte $\mathcal{S}(Y;L_\alpha;\phi_{\alpha,\beta})$ di semigruppi zero-sinistri.

Dim.

Se una banda è normale a sinistra allora lo è anche ogni sua sottobanda e quindi, in particolare, ognuna delle bande rettangolari E_α. Ora una banda E_α, che ha entrambe le relazioni identiche

$$abc = acb \qquad e \qquad aba = a,$$

è necessariamente un semigruppo sinistro, poiché $\forall a,b \in E_\alpha$.

$$ab = a.ab = aba = a.$$

Quindi una banda normale a sinistra è un semireticolo forte di semigruppi zero-sinistri.

Viceversa, se $B = \mathcal{S}(Y;\ L_\alpha;\phi_{\alpha,\beta})$ è un semireticolo forte di semigruppi zero-sinistri L_α, allora, per ogni $a \in L_\alpha$, $b \in L_\beta$, $c \in L_\gamma$, presi in B, $abc = (a\phi_{\alpha,\delta})(b\phi_{\beta,\delta})(c\phi_{\gamma,\delta}) = a\phi_{\alpha,\delta}$, con $\delta=\alpha\beta\gamma$ e analogamente $acb = a\phi_{\alpha,\delta}$, quindi B è una banda normale a sinistra.

Osserviamo che ogni applicazione tra semigruppi zero-sinistri è un omomorfismo, inoltre in $\mathcal{S}(Y;L_\alpha;\phi_{\alpha,\beta})$ risulta che $\ell_\alpha\ell_\beta = \ell_\alpha\phi_{\alpha,\alpha\beta}$ (12.3)
$\forall\ell_\alpha \in L_\alpha$, $\forall\ell_\beta \in L_\beta$.

Analogamente si prova il

Corollario 12.2.

Una banda è normale a destra sse essa è un semireticolo forte $\mathcal{S}(Y;R_\alpha,\phi_{\alpha,\beta})$ di semigruppi zero-destri.

Anche in questo caso ogni applicazione tra semigruppi zero-destri è un omomorfismo e la moltiplicazione in $\mathcal{S}(Y;R_\alpha;\phi_{\alpha,\beta})$ è data da

$$r_\alpha r_\beta = r_\beta \phi_{\beta,\alpha\beta} \qquad \forall r_\alpha \in R_\alpha, \quad \forall r_\beta \in R_\beta \tag{12.4}$$

Proviamo che $\mathcal{N} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{RB}$. Infatti, poiché $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{N}$ e $\mathcal{RB} \subseteq \mathcal{N}$, abbiamo che $\mathcal{SL} \vee \mathcal{RB} \subseteq \mathcal{N}$.

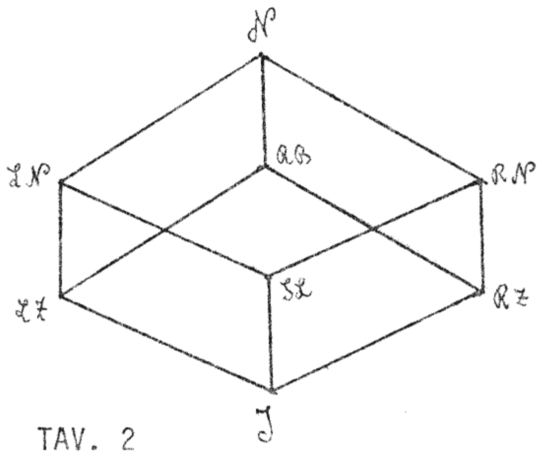
Viceversa se $B \in \mathcal{N}$ allora B è un semireticolo forte di semigruppi che stanno in $\mathcal{SL} \vee \mathcal{RB}$ e così esso sta in $\mathcal{SL} \vee \mathcal{RB}$ (v. [4], pag. 119 Prop. 5.12)
Pertanto $\mathcal{SL} \vee \mathcal{RB} = \mathcal{N}$ (12.5)

Analogamente, per i corollari (12.1) e (12.2) si ha che

$$\mathcal{SL} \vee \mathcal{LZ} = \mathcal{LN} \quad , \quad \mathcal{SL} \vee \mathcal{RZ} = \mathcal{RN} \tag{12.6}$$

Abbiamo già provato nel Teorema 5.4 di pag. 35 (Parte I) che una banda è normale sse è isomorfa al prodotto retratto di una banda normale a sinistra e di una banda normale a destra. Ne consegue ovviamente che $\mathcal{LN} \vee \mathcal{RN} = \mathcal{N}$.

Possiamo ora riassumere le osservazioni fatte sul semireticolo $\mathcal{U}$, generato da $\mathcal{SL}$, $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, nel seguente diagramma



TAV. 2

Proviamo alcune implicazioni del diagramma, che non sono state provate prima.

Per esempio, proviamo che $\mathcal{LN} \vee \mathcal{RB} = \mathcal{N}$. I fatti osserviamo che da $\mathcal{RB} \subseteq \mathcal{N}$ e $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{LN} \subseteq \mathcal{N}$ segue che

$$\mathcal{N} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{RB} \subseteq \mathcal{LN} \vee \mathcal{RB} \subseteq \mathcal{N} \quad \text{per la (12.5), e così}$$

$$\mathcal{LN} \vee \mathcal{RB} = \mathcal{N}$$

Proviamo ancora che $\mathcal{SL} = \mathcal{LN} \cap \mathcal{RN}$

Infatti da $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{LN}$ e $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{RN}$, segue che $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{LN} \cap \mathcal{RN}$.
Viceversa, se $B \in \mathcal{LN} \cap \mathcal{RN}$ allora $\forall a,b \in B$

$$ab = aab = aba = \text{(per la normalità a sinistra)}$$
$$= baa = ba \text{(per la normalità a destra)}$$, da cui si ricava che $B \in \mathcal{SL}$.

In conclusione $\mathcal{SL} = \mathcal{LN} \cap \mathcal{RN}$.

13. Il reticolo di tutte le varietà di bande.

Sia X un insieme non vuoto sia F il semigruppo su X, due parole U e V di F le diremo identiche, e scriveremo $U \equiv V$, se U e V sono uguali come elementi di F.

Siano M e N due parole, si dirà che M è contenuta in N se esistono parole R ed S, che possono essere vuote, t.c. $N \equiv RMS$.

Se P', P'' sono due parole, la parola $P \equiv P'P'$ è quella ottenuta per giustapposizione di P' e P''; P' si dice sezione sinistra di P e P'' si dice sezione destra di P (può accadere che $P \equiv P'$ oppure $P \equiv P''$).

Sia P una parola di F, si dice contenuto di P l'insieme c_P delle variabili che compaiono in P;
si dice n-sima parte sinistra di P, e si indica con $1_n(P)$, la sezione sinistra più breve di P contenente le prime n variabili di P, per $1 \leq n \leq |c_P|$,

si dice n-sima parte destra di P, $r_n(P)$, la sezione destra più breve di P contenente le ultime n variabili di P, per $1 \leq n \leq |c_P|$;

si dice n-sima parola sinistra di P, $\gamma_n(P)$, la sezione sinistra più lunga contenente n-1 variabili di P, per $2 \leq n \leq |c_P|$ (cioé $\gamma_n(P)$ è ottenuta da $l_n(P)$ omettendo la coda (*) di $l_n(P)$, che indichiamo con $t(l_n(P))$);

si dice n-sima parola destra di P, $\delta_n(P)$, la sezione destra più lunga di P contenente esattamente n-1 variabili di P, per $2 \leq n \leq |c_P|$ (cioé $\delta_n(P)$ è ottenuta da $r_n(P)$ omettendo la testa (*) di $r_n(P)$, che indichiamo con $h(r_n(P))$);

si dice parte sinistra di P, $l(P)$, la sezione sinistra più breve di P contenente tutte le variabili di P, cioé $l(P) = l_n(P)$ con $n = |c_P|$;

si dice parte destra di P, $r(P)$, la sezione destra più breve di P contenente tutte la variabili di P, cioé $r(P) = r_n(P)$ con $n = |c_P|$;

si dice immagine riflessa di P, $\bar{P}$, la parola ottenuta da P scambiando da sinistra a destra, l'ordine di tutte le variabili di P, cioé se $P \equiv x_1 x_2 \ldots\ldots x_n$, allora $\bar{P} \equiv x_n x_{n-1}, \ldots\ldots x_1$;

$$\gamma(P) = \gamma_n(P) \qquad \text{se} \quad n = |c_P|$$

$$\delta(P) = \delta_n(P) \qquad \text{se} \quad n = |c_P|$$

e scriviamo $hr(P)$ al posto di $h(r(P))$ e $\gamma^2(P)$ al posto di $\gamma(\gamma(P))$.

Sia $\sim$ la minima congruenza di banda in F. Si ha il seguente

Lemma 13.1. Se A,B,C sono parole di F t.c. $c_B \subseteq c_A = c_C$ allora $ABC \sim AC$.

Dim.

Per il Lemma 10.2, pag. 15 (Parte I) le $\sim$-classi delle parole ABC e AC sono uguali, pertanto $ABC \sim AC$.

(*) Ved. Parte I, pag.40.

Date due parole A e B

i) diremo che B è ottenuta da A per <u>inserzione</u>, o che A è ottenuta da B per <u>cancellazione</u>, se esistono parole C,D,E t.c.

$$c_D \subseteq c_C = c_F \ , \quad A \equiv CE \qquad e \ B \equiv CDE;$$

ii) diremo che B è ottenuta da A (o che A è ottenuta da B) per <u>idempotenza</u> se esistono parole C,D,E, dove C o E possono essere vuote, t.c. $A \equiv CDE$ e $B \equiv CDDE$ (o $A \equiv CDDE$ e $B \equiv CDE$).

Osserviamo che se B è ottenuta da A applicando un numero finito di volte i), ii), allora $A \sim B$ (e diciamo che B è ottenuta da A per mezzo di $\sim$), per il Lemma 12.1. Inoltre $A \backsim B$ sse B può essere ottenuta da A applicando un numero finito di volte ii).

Siano A,B,C,D parole t.c. $c_A \cup c_B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Diciamo che la parola D è ottenuta da C applicando l'identità (*) $A = B$, se esistono parole $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ su $c_C \cup c_D$ t.c., dette A' e B' le parole su $c_C \cup c_D$ ottenute sostituendo ogni x_i in A e B con X_i, $1 \leq i \leq n$, esistono parole Y e Z su c_C, che possono essere vuote, per cui $C \equiv YA'Z$ e $D \equiv YB'Z$ o viceversa.

Applicando le definizioni precedenti, si dimostrano facilmente i seguenti lemmi:

<u>Lemma 13.2</u>

Siano U,V,W e Y parole su un insieme X, allora $U = V$ implica(*) $W=Y$ sse Y può essere ottenuta da W applicando per un numero finito di volte l'identità $U = V$ e $\sim$.

(*) Ved. Pag. 39, Parte I.

Lemma 13.3

Siano P e Q parole, allora $P = Q$ è equivalente (*) ad $a = a$ sse $P \sim Q$, cioé P e Q sono $\sim$-congruenti sse ogni semigruppo idempotente soddisfa $P=Q$.

Dim. Evidente.

Siano P e Q due parole, e d sia una delle lettere h,t,i,f, dove con h(P) indichiamo la testa di P, con t(P) la coda, con i(P) la parte iniziale e con f(P) la parte finale (**). Allora dalle definizioni di testa, coda, parte iniziale, parte finale segue evidentemente che
$d(P) \sim d(Q)$ sse $d(P) \equiv d(Q)$.

Per ogni identità $P = Q$ t.c. $i(P) \sim i(Q)$ e $f(P) \sim f(Q)$, definiamo

$$\mathfrak{U}[P,Q] = \{\gamma_n(P) = \gamma_n(Q)/2 \leq n \leq |c_P|\}$$

$$\mathfrak{V}[P,Q] = \{\delta_n(P) = \delta_n(Q)/2 \leq n \leq |c_P|\}$$

$$\mathfrak{R}[P,Q] = \{P = Q\} \cup \mathfrak{U}[P,Q]$$

$$\mathfrak{S}[P,Q] = \{P = Q\} \cup \mathfrak{V}[P,Q]$$

Una parola si dice ricorrente se vi è una parola A contenuta in P t.c. AA sia anche una parola contenuta in P.

D'ora in poi, per semplicità, useremo parole non ricorrenti, a meno che non lo si dica esplicitamente e ciò senza ledere la generalità perché considereremo solo identità in bande.

Per ottenere tutte le possibili identità di bande è sufficiente studiare solo quelle identità $P = Q$ le cui parole soddisfano una delle seguenti

---

(*) Ved. Parte I pag. 39

(**) Ved. Parte I pag. 48.

relazioni(*):

	teste	parti iniziali	parti sinistre	parti destre	parti finali	code
D1	$\sim$	$\not\sim$	$\not\sim$	$\not\sim$	$\sim$	$\sim$
D2	$\sim$	$\sim$	$\not\sim$	$\not\sim$	$\not\sim$	$\sim$
D3	$\sim$	$\sim$	$\not\sim$	$\not\sim$	$\sim$	$\sim$
D4	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\not\sim$	$\sim$	$\sim$
D5	$\sim$	$\sim$	$\not\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$

TAV. 3

Per esempio le parole dell'identità $yxa = yaxa$ soddisfano D1.

Diamo ora una caratterizzazione delle identità che soddisfano D1; le identità che soddisfano D2 si possono caratterizzare dualmente.

Teorema 13.1. Siano P e Q parole che soddisfano D1, allora $P = Q$ è equivalente a:

i) $yxa = yayxa$ ossia alla seminormalità destra(**) se $h\delta_n(P) \sim h\delta_n(Q)$, per $2 \leq n \leq |c_P|$

ii) $yxa = yaxa$ ossia alla quasi-normalità destra(**) negli altri casi.

Per dimostrare questo teorema premettiamo i seguenti lemmi, in ognuno dei quali le parole P e Q soddisfano D1.

Lemma 13.4. L'identità $yxa = yaxa$ implica l'identità $P = Q$.

Dim.

E' evidente che $yxa = yaxa$ implica contemporaneamente $P = h(P)f(P)$ e $Q = h(Q)f(Q)$. Per la D1 $h(P) \sim h(Q)$ e $f(P) \sim f(Q)$, così $h(P)f(P) \sim h(Q)f(Q)$, ovvero $P \sim Q$. Di conseguenza $yxa = yaxa$ implica $P = Q$.

(*) ved. [8]

(**) ved. Parte I, pag. 33.

Lemma 13.5. L'identità $P = Q$ implica l'identità $yxa = yayxa$.

Dim.

L'identità $P = Q$ implica l'identità $Pl(P) = Ql(P)$, per il Lemma 6.3 pag. 40, Parte I, e $Pl(P) = Ql(P)$ è equivalente a $l(P) = l(Q)l(P)$ per cancellazione e idempotenza. Allora $P = Q$ implica $l(P) = l(Q)l(P)$. Ma $l(P) = l(Q)l(P)$ è equivalente all'identità $yxa = yayxa$ per la D1 e per il Teorema 5 di [8]. Così $P = Q$ implica $yxa = yayxa$.

Lemma 13.6. L'identità $P = Q$ è equivalente a $yxa = yaxa$ sse $P = Q$ implica un'identità $A = B$ in tre variabili per cui $r(A) \not\sim r(B)$.

Dim.

La condizione necessaria è evidente, in quanto ogni semigruppo che soddisfa $P = Q$ soddisfa anche $yxa = yaxa$, e quindi soddisfa un'identità $A = B$ in tre variabili t.c. $r(A) \not\sim r(B)$.

Proviamo ora la condizione sufficiente. Supponiamo che $P = Q$ implichi un'identità $A = B$ in tre variabili t.c. $r(A) \not\sim r(B)$.

L'identità $A = B$ implica $axy = axyayxy$ cioé la semiregolarità a sinistra per le Conclusioni di [6] e per il diagramma della TAV 1, pag. 33, Parte I.

Quindi $yxa = yaxa$ implica $P = Q$ per il Lemma 13.4 e $P = Q$ implica $axy = axyayxy$ e $yxa = yayxa$ per il Lemma 13.5. Poiché il diagramma della TAV. 1, pag. 33, Parte I è un semireticolo inferiore, $P = Q$ deve essere equivalente a $yxa = yaxa$.

Lemma 13.7 Sia P una parola t.c. $|c_P| = n$. Allora $P = Q$ è equivalente a $yxa = yaxa$ se $h\delta_m(P) \not\sim h\delta_m(Q)$, per $3 \leq m \leq n$.

Dim.

Sia P una parola t.c. $c_P = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Supponiamo che esista un m,

$3 \leq m \leq n$, t.c. $h\delta_n(P) \not\sim h\delta_m(Q)$. Siano $a \equiv h\delta_m(P)$, $b \equiv h\delta_m(Q)$ e $c \equiv h\,r_m(P) \equiv h\,r_m(Q)$, allora $a \not\equiv b$, $a \not\equiv c$, $b \not\equiv c$. Sia $x_j \equiv a$ $\forall j, 1 \leq j \leq n$, ad eccezione di quei j per cui $x_j \equiv b$ o $x_j \equiv c$. Così otteniamo un'identità in tre variabili $A = B$ t.c. $h\delta(A) \not\sim h\delta(B)$.

Ne segue facilmente che $r(A) \not\sim r(B)$, così $P = Q$ è equivalente a $yxa = yaxa$, per il lemma 12.6.

Lemma 13.8. L'identità $yxa = yayxa$ è equivalente a $P = Q$ sse $h\delta_m(P) \sim h\delta_m(Q)$ $\forall m$, $2 \leq m \leq |c_P|$.

Dim.

Valgono evidentemente le seguenti proprietà:

a) Se $A = B$ implica $C = D$, $h(A) \sim h(B)$ e $c_A = c_B$ allora $h(C) \sim h(D)$ e $c_C = c_D$

b) Siano A e B parole t.c. $c_A = c_B$ e $h(A) = h(B)$. Allora $yxa = yayxa$ implica $A = B$ sse $yxa = yayxa$ implica $\delta(A) = \delta(B)$, perché $\delta(A)$ è la sezione destra più lunga di A contenente esattamente $n-1$ variabili, dove $n = |c_A|$, analogamente per $\delta(B)$, e $h(A) = h(B)$. Inoltre ragionando per induzione su $|c_P|$ e applicando il Lemma 13.5, si ottiene la tesi.

Diamo ora la dimostrazione del Teorema 13.1.

Siano dunque P e Q parole che soddisfano D1 e supponiamo che $P = Q$ non sia equivalente a $yxa = yaxa$. Allora sarà certamente $h\delta_n(P) \sim h\delta_n(Q)$, $3 \leq n \leq |c_P|$, perché se così non fosse, per il Lemma 13.7, sarebbe $P = Q$ equivalente ad $yxa = yaxa$, contro l'ipotesi. Ora $h\delta_2(P) \sim h\delta_2(Q)$, poiché, per la D1, $f(P) \sim f(Q)$ e $t(P) \sim t(Q)$ e $h\delta_2(P) \equiv t(P)$ e $h\delta_2(Q) \equiv t(Q)$. Quindi $h\delta_n(P) \sim h\delta_n(Q)$, per $2 \leq n \leq |c_P|$. Perciò, per il Lemma 13.8, l'identità $P = Q$ è equivalente all'identità $yxa = yayxa$. c.v.d.

Un esempio di identità equivalente all'identità yxa = yayxa è dato dall'identità yxasyxa = yaxdyayx, le cui parole soddisfano D1.

Dualmente si prova il seguente

Teorema 13.2 Siano P e Q parole che soddisfano D1, allora P = Q è equivalente a

a) axy = axyay, ossia alla seminormalità sinistra, se $t_{\gamma_n}(P) \sim t_{\gamma_n}(Q)$ $\forall n,\ 2 \leq n \leq |c_P|$,

b) axy = axay, ossia alla quasi normalità sinistra, negli altri casi,

Abbiamo caratterizzato sinora le identità di bande inequivalenti le cui parole soddisfano le relazioni D1 e D2. Resta ancora da trovare un elenco completo delle identità di bande non equivalenti le cui parole soddisfano le condizioni descritte rispettivamente in D3,D4,D5.

Entrare in dettagli è compito che esula dagli scopi di questo Quaderno. Comunque si dimostra che per ognuno dei casi D3,D4,D5 esiste una infinità numerabile di identità non equivalenti.

Sia $\mathcal{G}$ l'insieme di tutte queste infinite identità. In |3| Fennemore trova ancora i collegamenti tra gli elementi di $\mathcal{G}$.

A titolo informativo riportiamo la Tavola 4 alla pag. seguente che illustra $\mathcal{G}$.

Nel diagramma $R_i, Q_i, S_i, \bar{R}_i, \bar{Q}_i, \bar{S}_i$ (i = 2,3,....) sono parole definite induttivamente, nelle variabili x_i, mentre d è una variabile distinta dalle x_i:

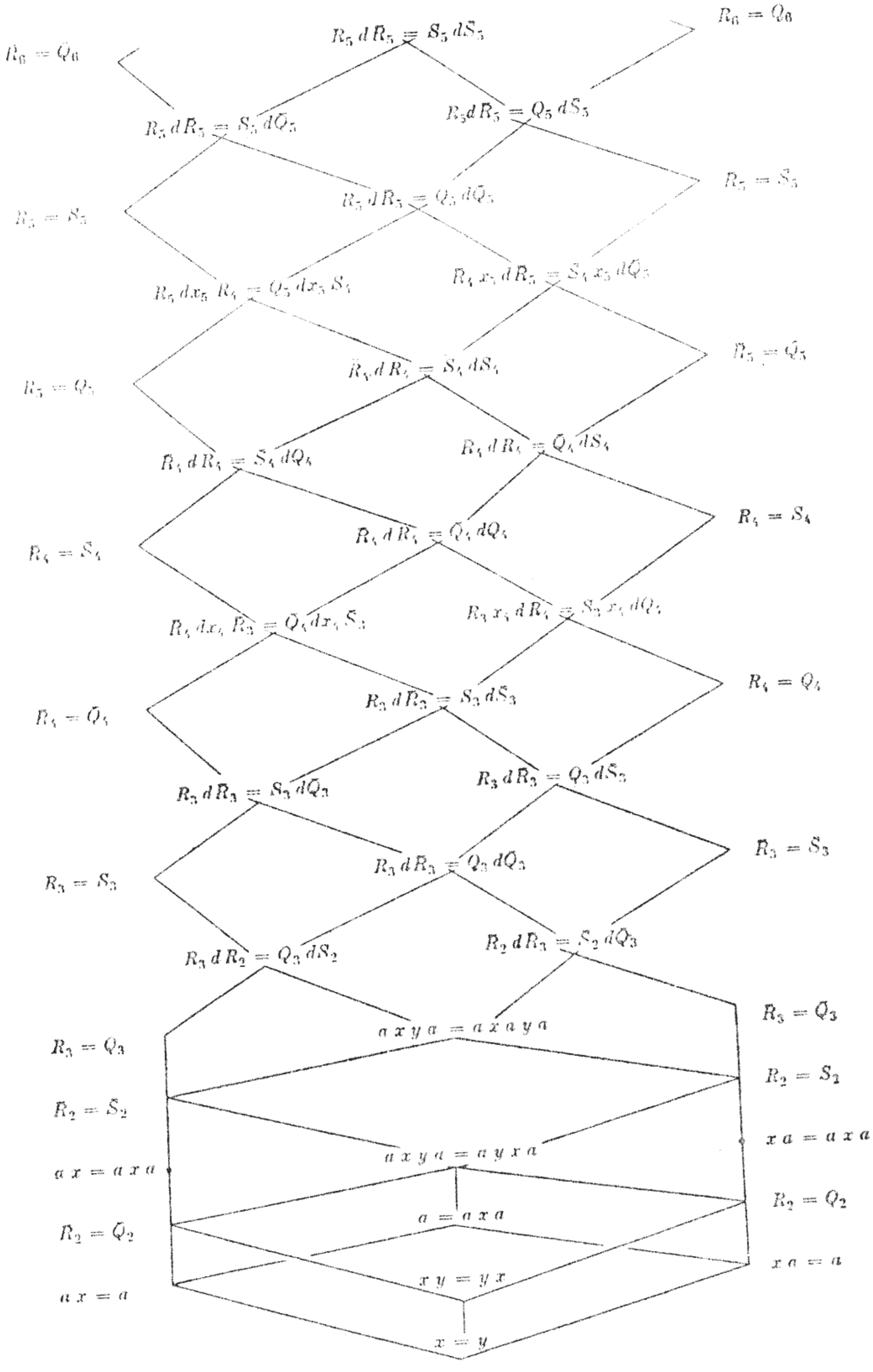
$R_2 = x_3x_2x_1$, $\quad Q_2 = x_2x_3x_1$, $\quad S_2 = x_3x_1x_2x_1$

$R_3 = x_1x_2x_3$, $\quad Q_3 = x_1x_2x_3x_1x_3$, $\quad S_3 = x_1x_2x_3x_1x_3x_2x_3$

$R_n = R_{n-1}x_n$, $\quad Q_n = Q_{n-1}x_nR_n$; $\quad S_n = S_{n-1}x_nR_n$ per n pari, $n \geq 4$

$R_n = x_nR_{n-1}$, $\quad Q_n = R_nx_nQ_{n-1}$, $\quad S_n = R_nx_nS_{n-1}$ per n dispari

$n \geq 5$.



Il reticolo di tutte le identità su bande

TAV. 4

Nel suo secondo lavoro |3| Fennemore dimostra che $\mathcal{G}$ è l'elenco completo di tutte le identità non equivalenti sulle bande. Sostituendo, pertanto, nel diagramma della TAV.4 ogni varietà di bande alla identità che la definisce si ottiene il reticolo di tutte le varietà di bande. Ricordato che una identità P = Q in n variabili è <u>irriducibile</u> se non è equivalente ad alcuna identità in meno di n variabili, (le 18 identità trovare da Kimura in |6| e poi riprese da Petrich in |8| si prova che sono irriducibili), i principali risultati di |3| sono i seguenti:

<u>Teorema 13.3.</u> Se P = Q è in $\mathcal{G}$, allora P = Q è una identità irriducibile.

<u>Teorema 13.4.</u> Ogni identità sulle bande è equivalente ad una, ed una sola, delle identità in $\mathcal{G}$.

<u>Teorema 13.5.</u> Ogni varietà di bande può essere definita da una, ed una sola, delle identità dell'insieme $\mathcal{G}$.

Dal diagramma di tutte le varietà di bande si ricavano direttamente molti risultati.

Ad esempio, i seguenti:

i) esistono esattamente 8 + 10 (n-2) distinte varietà di bande che possono essere definite mediante una identità in n variabili, $n \geq 2$;

ii) esistono esattamente 10(n-1) distinte varietà di bande che possono essere definite mediante insiemi di identità che implicano una identità in n variabili, $n \geq 2$.

E ancora, detta $\mathcal{V}$ la varietà di tutte le bande ed L(B) il reticolo di tutte la varietà di bande, si ha:

iii) $\mathcal{V}$ non è generata da nessun insieme finito di sottovarietà proprie;

iv) L(B) contiene unità e zero, non è complementato, non soddisfa la condizione delle catene ascendenti, soddisfa la condizione delle catene discendenti, è completo e distributivo.

Da notare, anche, la particolare posizione nel reticolo L(B) occupata dalle bande già classificate da Petrich in |8| di cui ci siamo occupati nella Parte I, § 5, di questo Quaderno.

APPENDICE

14. Semi-bande.

In anni recenti diversi autori (Benzaken-Mayr (1975) |10|, Howie (1977) |11|, Piochi (1981) |12|, ...) hanno studiato con tecniche diverse i semigruppi generati dai idempotenti (o semi-bande).

Vogliamo qui indicare un diverso metodo di approccio allo studio di una semi-banda, un metodo semplice, "diretto", che, comunque, permette di ottenere rapidamente qualche primo risultato.

Premettiamo le seguenti definizioni e i seguenti Teoremi già noti.

Sia S un semigruppo senza annullatori diversi da zero (si può supporre che ogni semigruppo soddisfi a questa condizione |14|), allora S ha la seguente decomposizione disgiunta (decomposizione sinistra di Szép) :

$$S = \bigcup_{i=0}^{5} S_i \qquad (1)$$

dove

$$S_0 = \{a \in S \;/\; aS \subset S \quad e \quad \exists\; x \in S,\; x \neq 0 \;\ni'\; ax = 0\}$$

$$S_1 = \{a \in S \;/\; aS = S \quad e \quad \exists\; y \in S,\; y \neq 0 \;\ni'\; ay = 0\}$$

$$S_2 = \{a \in S-(S_0 \cup S_1) \;/\; aS \subset S \; e \; \exists\; x_1, x_2 \in S,\; x_1 \neq x_2 \; e \; ax_1 = ax_2\}$$

$$S_3 = \{a \in S-(S_0 \cup S_1) \;/\; aS = S \quad e \; \exists\; y_1, y_2 \in S,\; y_1 \neq y_2 \; e \; ay_1 = ay_2\}$$

$$S_4 = \{a \in S-(S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3) \;/\; aS \subset S\}$$

$$S_5 = \{a \in S-(S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3) \;/\; aS = S\}$$

Dualmente si definisce per S la decomposizione destra di Szép

$$S = \bigcup_{i=0}^{5} D_i \qquad (2)$$

Siano ora $S_i \cap D_j = C_{ij}$ e $\Gamma = \{C_{ij}\}_{i,j=0,1,\dots,5}$

Se i sottoinsiemi C_{ij} sono non vuoti, allora essi sono sttosemigruppi di S e risulta:

$$S = \bigcup_{i,j=0}^{5} C_{ij} \ , \ C_{ij} \cap C_{hk} = \emptyset \quad \text{se} \quad (i,j) \neq (h,k) \qquad (3)$$

La decomposizione (3) di un semigruppo S viene detta la Γ-decomposizione di S.

<u>Teorema 14.1</u>. La Γ-decomposizione di una banda S è la seguente:

1) se $1 \in S$, allora $S_5 = D_5 = \{1\}$; $C_{25} = C_{52} = \emptyset$

$$S = C_{oo} \cup C_{02} \cup C_{20} \cup C_{22} \cup \{1\} ;$$

2) se $1 \notin S$, allora

a) se $S_5 \neq \emptyset$, $C_{52} = S_5$, $C_{25} = \emptyset$,

$$S = C_{oo} \cup C_{02} \cup C_{20} \cup C_{22} \cup S_5$$

b) se $D_5 \neq \emptyset$, $C_{25} = D_5$, $C_{52} = \emptyset$

$$S = C_{oo} \cup C_{02} \cup C_{20} \cup C_{22} \cup D_5,$$

dove S_5 $[D_5]$, se non è vuoto, è una banda zero-destra[sinistra], e C_{ij} $(i,j = 0,2)$ è l'unione di bande rettangolari.

<u>Dim.</u> v.|13|,pag.14.

Teorema 14.2. Un semigruppo S è una banda sse la sua decomposizione sinistra di Szép è così data:

1) $S_1 = S_3 = S_4 = \emptyset$;

2) S_5 è rettangolare e in esso ogni elemento è unità sinistra;

3) $S_i = \bigcup_{a \in S_i} L_a$ (i=1,2), dove le classi L_a sono sottosemigruppi rettangolari di S.

Dim. v. |12|, pag. 9.

Sia ora S una semi-banda, ossia un semigruppo generato dall'insieme $E = \{e_i\}_{i \in I}$ di idempotenti. Ogni elemento $s \in S$ si può dunque scrivere nella forma
$s = e_{i_1} e_{i_2} \ldots . e_{i_k}$, $k \geq 1$, $e_i \in E$.

Se consideriamo i sottosemigruppi $e_i S$ di S ($i \in I$), si ha, evidentemente,

$$S = \bigcup_{i \in I} e_i S .$$

Sia $S^* = \bigcap_{i \in I} e_i S$.

Teorema 14.3. Se $S^* \neq \emptyset$, ogni elemento $\bar{s} \in S^*$ è uno zero a destra per S. Viceversa, se S ha elementi zero-destri, allora $S^*(\neq\emptyset)$ contiene tali elementi.

Dim. Sia $\bar{s} \in S^*$, per ogni $e_i \in E$, poiché $\bar{s} \in e_i S$, si ha $e_i \bar{s} = \bar{s}$. Dunque anche per un qualsiasi elemento $s \in S$ si ha $s\bar{s} = \bar{s}$, cioé $\bar{s}$ è uno zero a destra in S. Viceversa, se s_o è uno zero destro di S, si ha $e_i s_o = s_o$, $\forall e_i \in E$, dunque $s_o \in e_i S$, quindi, anche $s_o \in \bigcap_{i \in I} e_i S = S^*$.

In conclusione, il Teorema 14.3 dice che S^* è costituito da tutti e soli gli (eventuali) zeri destri della semi-banda S.

Teorema 14.4. La semi-banda S non ha elementi accrescitivi sinistri [destri].

Dim. Sia $a = e_1 \ldots e_n$ un elemento accrescitivo sinistro di S. Allora esiste un sottoinsieme $M \subset S$ t.c. $aM = S$, cioé $e_1(e_2 \ldots e_n M) = S$. Poiché e_1, idempotente, non può essere un elemento accrescitivo, deve essere $e_2 \ldots e_n M = S$. Proseguendo con lo stesso ragionamento, si avrà alla fine $e_n M = S$: assurdo, perché $e_n \in E$.

Teorema 14.5. Gli elementi $u \in S$ tali che $uS = S$ [$Su = S$] sono tutte e sole le unità sinistre [destre] di S.

Dim. Se u è una unità sinistra di S, ovviamente $uS = S$. Viceversa, sia $u \in S$ tale che $uS = S$. Sia $u = e_1 e_2 \ldots e_k$ $(k \geq 1)$. Con lo stesso ragionamento usato nel Teorema 14.4 si ha che

$$e_1 e_2 \ldots e_k S = S \Longrightarrow e_2 \ldots e_k S = S \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow e_k S = S,$$

da cui risulta che e_k è unità sinistra di S (poiché $e_k \in E$).

Ma allora, analogamente, $e_1 e_2 \ldots e_{k-1} S = S \Longrightarrow e_{k-1} S = S$, quindi anche $e_{k-1}(\in E)$ è unità sinistra di S. Pertanto, proseguendo con questo ragionamento, si ha che $e_1, e_2, \ldots, e_k$ sono unità sinistre di S e quindi $u = e_1 e_2 \ldots e_k = e_k$, cioé $u \in E$. Ma allora se $uS = S$ ed $u \in E$, u è una unità sinistra di S.

In termini di "decomposizione sinistra di Szép" di S, $S = \bigcup_{i=0}^{5} S_i$, il Teorema 14.5 afferma che S_5 è costituito da tutte e sole le unità sinistre di S; infatti per il Teorema 14.4 è $S_1 \cup S_3 = \emptyset$, quindi S_5 è l'insieme di tutti e soli gli elementi $u \in S$ t.c. $uS = S$.

Dualmente è $D_1 \cup D_3 = \emptyset$ e D_5 è costituito da tutte e sole le unità destre di S.

Teorema 14.6. $S - S_5$ è un sottosemigruppo di S. [$D-D_5$ è un sottosemigruppo].

Dim. Siano $a,b \in S-S_5$. Per assurdo, sia $ab \in S_5$. Allora $(ab)S = S$, cioé $a(bS) = S$. Se $bS = S$, per il Teorema 14.5 $b \in E$, e anzi $b \in S_5$, ciò che è escluso; dunque $bS \subset S$; ma allora a è accrescitivo sinistro, contro il Teorema 14.4. Dunque $ab \in S-S_5$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Clifford-Preston : *The algebraic Theory of semigroups*. American Mathematical Society (1961)

[2] Fennemore C.F. : *All varieties of bands* (I). Math. Nachr. 48(1971), 237-252.

[3] Fennemore C.F.: *All varieties of bands* (II). Math. Nachr. 48(1971),252-262.

[4] Howie J.M. : *An introduction to semigroups Theory*. Academic Press (1976).

[5] Kimura N.: *Note on idempotent semigroups* (I) Proc. Japan Acad. 33 (1957)

[6] Kimura N.: *The structure of idempotent semigroups* (I) Pacific J. Math. 8 (1958)

[7] Mc Lean D. *Idempotent semigroups*, Amer. Math. Monthly (1954)

[8] Petric M.: *A construction and a classification of bands* Math. Nachr. 48 (1971), 263-274.

[9] Yamada M-Kimura N.: *Note on idempotent semigroups* (II), Proc. Japan Acad. 34 (1958).

|10| Benzaken C.-Mayr H.C: *Notion de demi-bande:demi-bandes de type deux*. Semigroup form 10(1975)

|11| Howie J.M.: *Sur le demi-groupes engendres par des idempotents*. Lect Notes in Mathematics (1977).

|12| Piochi B.: *Sulla decomposizione di Szép dei semigruppi generati da idempotenti*. Ist. Mat.Univ. Siena, R.38 (1981).

|13| Migliorini F.-Szép J.: *On Γ-decomposition of semigroups*. Ist.Mat.Univ.Siena, R.45 (1981).

|14| Szép J.: *On the structure of finite semigroups III*.Dept.Math. K.Marx Univ. Econom. - Budapest (1973) NR. 3,29P.