In questa conferenza verrà illustrata una tecnica che può essere utilizzata sia per algebre non associative sia per algebre associative e se ne vedranno alcune applicazioni concrete nel caso non associativo.

Sia V una varietà di algebre (non necessariamente associative) su un campo F definita da una o più identità multilineari g_i di grado n. Il primo problema che ci poniamo è il seguente: data un'altra identità f, quand'è che f è conseguenza delle g_i, cioè quand'è che f vale in V? Risolveremo questo problema con la tecnica che passiamo ad esporre. Si costruisca l'anello-gruppo ϕ sul gruppo simmetrico S_n su F (n=grado delle identità). Risulta $\phi = \left\{ \sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \pi \right\}_{\gamma_\pi \in F}$ Si consideri poi un ϕ-modulo libero sinistro di rango uguale al numero di diverse funzioni (o forme di associazione) che si vogliono o devono considerare. Facciamo un semplicissimo esempio. Sia g la identità multilineare di grado tre corrispondente alla flessibilità: un'algebra R si dice flessibile se

$$(x,y,z)+(z,y,x)=0 \qquad \forall\, x,y,z \in R$$

con $(x,y,z)=xy.z-x.yz$. La varietà delle algebre flessibili è molto generale: contiene le algebre commutative, anticommutative, le algebre di Lie, di Jordan, ecc. I modi o forme di associazione sono due

$$RR.R \qquad\qquad R.RR$$

oppure potremo scegliere come "forma" la (R,R,R). I risultati finali che otterremo saranno espressi nella "forma" che avremo scelto di volta in volta. Se come forma di associazione scegliamo RR.R e R.RR, g (flessibilità) corrisponderà al seguente elemento del Φ-modulo sinistro (di rango 2)

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \oplus & \Phi \\ & & \\ (\ I+(13) & , & -I-(13)\ ) \end{array}$$

La prima coordinata corrisponde al modo RR.R di associare, la seconda corrisponde al modo R.RR. Se invece come forma di associazione si sceglie la (R,R,R), allora il Φ-modulo ha rango 1, onde alla g corrisponde l'elemento $I+(13) \in \Phi$. Tutte le possibili conseguenze di una data identità g formano un sottomodulo sinistro (se le permutazioni si pensano operanti sulla destra). Più in generale, per vedere se una data identità f è conseguenza di s identità g_i $(i=1,2,\dots,s)$ si deve controllare se f appartiene al sottomodulo sinistro generato da queste identità. Qual'è il vantaggio dell'introduzione di Φ? E' noto che se G è un gruppo finito di ordine o(G), detto F un campo di caratteristica p, l'algebra gruppo A(G) di G su F è semisemplice se e solo se p=0 oppure p non divide o(G). Nel nostro caso, se $p \neq 2,3$ e se F è sufficientemente grande, Φ è una somma diretta di anelli completi di matrici su F. Nel caso di identità di grado 3 (come ad esempio la flessibilità) si ha $\Phi \simeq F \oplus F \oplus F_{2x2}$. Nel caso di identità di grado 4 è $\Phi \simeq F \oplus F \oplus F_{2x2} \oplus F_{3x3} \oplus F_{3x3}$. La flessibilità ha la seguente rappresentazione

$$RR.R \quad \oplus \quad R.RR$$

$$(2) \qquad\qquad (-2)$$

$$(0) \qquad\qquad (0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

oppure

$$(R,R,R)$$

$$(2)$$

$$(0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si può esprimere la flessibilità mediante un qualunque generatore del ϕ-modulo (o dell'ideale) sinistro, quindi

$$RR.R \quad \oplus \quad R.RR$$

$$(1) \qquad\qquad (-1)$$

$$(0) \qquad\qquad (0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi f è conseguenza di g (o di $g_1, g_2, \ldots, g_s$) se e solo se in ogni rappresentazione irriducibile di S_n le righe della matrice di f appartengono allo spazio delle righe della matrice di $g_1, g_2, \ldots, g_s$. In pratica, per vedere se una identità f è conseguenza di un certo numero di identità $g_1, g_2, \ldots, g_s$ si costruisce la matrice di $g_1, g_2, \ldots, g_s$ in ogni pezzo e se ne calcola il rango; poi si costruisce la matrice di $g_1, g_2, \ldots, g_s, f$ e se ne calcola il rango. Se in ogni pezzo i ranghi coincidono, f è conseguenza delle g_i.

Per esempio, la flessibilità non implica la alternatività a destra. Un'algebra R si dice alternativa a destra se $(x,y,z)+(x,z,y)=0 \;\forall x,y,z \in R$.

Tale legge corrisponde all'elemento I+(23) di Φ rispetto alla "forma" (R,R,R). La sua rappresentazione è la seguente:

$$\begin{array}{ll} & (R,R,R) \\ \mathcal{R}_1 & (1) \\ \mathcal{R}_2 & (0) \\ \mathcal{R}_3 & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Confrontando con la rappresentazione della flessibilità si vede che nella rappresentazione $\mathcal{R}_3$ flessibilità + alternatività a destra viene ad avere rango 2, mentre flessibilità da sola ha rango 1.

Una tale tecnica serve soprattutto nelle questioni di classificazioni di identità. Un primo esempio è la classificazione delle algebre ad associatori dipendenti. Un'algebra si dice ad associatori dipendenti se soddisfa una o più identità della forma

$$\alpha(x,y,z)+\beta(z,x,y)+\gamma(y,z,x)+\delta(x,z,y)+\varepsilon(y,x,z)+\zeta(z,y,x) = 0$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in F$, $x,y,z \in R$.

Ci poniamo il problema di classificare tali identità, nel senso di trovare tutte le algebre ad associatori dipendenti distinte. Due insiemi di identità ad associatori dipendenti sono equivalenti se ciascuno dei due implica l'altro . Ciò significa che generano lo stesso ideale sinistro nell'anello gruppo (qui ovviamente abbiamo una sola forma la (R,R,R), quindi anziché sottomodulo sinistro si parlerà di ideale sinistro). Quindi ci sarà corrispondenza biunivoca tra algebre ad associatori dipendenti e ideali sinistri. Tante saranno le algebre ad associatori dipendenti distinte quanti ideali sinistri distinti ci sono nell'anello-gruppo ϕ . In questo caso $\phi \simeq F \oplus F \oplus F_{2x2}$. Anche ogni ideale sinistro di ϕ si decompone come somma $L \simeq L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$, L_1 ideale sinistro dello addendo che lo contiene. La classificazione si riduce a trovare tutte le possibili scelte per gli L_i. L_1 può essere o o F, L_2 può essere o O o F, L_3 può essere o O o F_{2x2} oppure un ideale sinistro proprio di F_{2x2}, generato quindi da una matrice non nulla della forma $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dato che ogni ideale sinistro di ϕ è somma diretta di ideali sinistri minimali, ne segue che ogni algebra ad associatori dipendenti si ottiene assumendo una o più identità ad associatori dipendenti minimali (corrispondente cioè ad un ideale sinistro minimale). Tali ideali sono

$L = F \oplus 0 \oplus 0$ corrisponde all'identità $(x,y,z)+(y,z,x)+ +(z,x,y)+(x,z,y)+(z,y,x)+(y,x,z)=0$ (associatività nelle terze potenze)

$L'=0 \oplus F \oplus 0$ corrisponde all'identità $(x,y,z)+(y,z,x)+(z,x,y)-$
$-(x,z,y)-(z,y,x)-(y,x,z)=0$ (Lie ammissibilità)

$L''= 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ corrisponde all'identità $\lambda\{(x,y,z)+(y,x,z)-$
$-(y,z,x)-(z,y,x)\}+\mu\{(x,z,y)-(z,x,y)+(y,z,x)-$
$-(y,x,z)\} = 0$

Si noti che la Lie ammissibilità è equivalente alla $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$. Se R fosse associativa quest'ultima identità sarebbe automaticamente soddisfatta. Nel caso non associativo ciò non è sempre vero. Le algebre che soddisfano la suddetta identità si dicono Lie ammissibili, perché prendendo come nuovo prodotto $[\,,]$, $(R, [\,,])$ è un'algebra di Lie come avviene nel caso associativo.

Un altro esempio che mostra l'utilità di questa tecnica è la classificazione delle cosiddette 2-varietà. Sia V_F una varietà di algebre a potenze associative sopra un campo F che soddisfano la condizione che esiste un intero $s \geqslant 2$ tale che $A \in V_F$ e I ideale di A implica I^s ideale di A. Tali varietà di algebre prendono il nome di s-varietà. In particolare, per s=2 si hanno le 2-varietà. Esempi di 2-varietà sono offerti dalle algebre associative, alternative, di Lie, ecc. Anderson ha mostrato che una varietà V_F è una 2-varietà se e solo se tutte le algebre di V_F soddisfano le seguenti due identità

$$(x_1x_2)x_3 = \alpha_1(x_3x_1)x_2+\alpha_2(x_1x_3)x_2+\alpha_3x_2(x_3x_1)+\alpha_4x_2(x_1x_3)+ \alpha_5(x_3x_2)x_1+\alpha_6(x_2x_3)x_1+\alpha_7x_1(x_3x_2)+\alpha_8x_1(x_2x_3)$$

$$x_3(x_1x_2) = \beta_1(x_3x_1)x_2+\beta_2(x_1x_3)x_2+\beta_3x_2(x_3x_1)+\beta_4x_2(x_1x_3)+ \beta_5(x_3x_2)x_1+\beta_6(x_2x_3)x_1+\beta_7x_1(x_3x_2)+\beta_8x_1(x_2x_3)$$

$\alpha, \beta \in F$.

In un lavoro di prossima pubblicazione Hentzel e la sottoscritta abbiamo fatto una classificazione completa delle 2-varietà (anzi,per 2-varietà non pretendiamo la associatività nelle potenze) utilizzando questa tecnica. Anderson e Kleinfeld in [3] hanno fatto una classificazione delle 2-varietà parziale, nel senso che hanno preso in considerazione da un lato la classe di 2-varietà che contengono un'algebra non commutativa con unità (da questa classe restano ovviamente escluse le algebre di Lie) e dall'altro la classe di 2-varietà contenenti un'algebra non nulla di dimensione finita nil e semisemplice. Riguardo alla prima classe essi hanno provato che le algebre di questa classe o sono ad associatori dipendenti (classificazione già nota) o soddisfano una delle seguenti identità:

$$\alpha_5\,[[y,z],x] = (x,z,y)-(x,y,z)$$

$$\alpha_1\,[[z,x],y] = (x,y,z)$$

$$\alpha_1\,[[z,x],y] = (x,y,z)+(y,z,x)+(x,z,y)$$

$$[[z,x],y] = \frac{1}{2\delta+1}[(x,z,y)-(z,x,y)-(z,y,x)+(x,y,z)]+(y,z,x)-(y,x,z) \qquad \delta \neq 1,-1,-1/2$$

$$\alpha_1\,[[z,x],y] = \frac{-\delta}{\delta^2-1}[(z,y,x)-(x,y,z)]+\frac{1}{1-\delta}[(x,z,y)-(z,x,y)]$$

assieme alla $(x,y,z)+(y,z,x)+(z,x,y)=0$, $\delta \neq 1,-1,-1/2$

Recentemente, ho studiato tale classe con la tecnica matriciale. Le identità definenti una 2-varietà si rappresentano, mediante la tecnica ora vista, al modo seguente:

$$
\begin{array}{llcl}
 & RR.R & \oplus & R.RR \\[1em]
\mathscr{R}_1 & \begin{array}{l} -2w_1+w_2-3 \\ -2z_1+z_2 \end{array} & & \begin{array}{l} w_5+w_6 \\ z_5+z_6-3 \end{array} \\[1em]
\mathscr{R}_2 & \begin{array}{l} -w_2-2w_4-3 \\ -z_2-2z_4 \end{array} & & \begin{array}{l} w_6-w_5-2w_7+2w_8 \\ z_6-z_5-2z_7+2z_8-3 \end{array} \\[1em]
\mathscr{R}_3 & \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 \end{pmatrix} \\[1em]
 & \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

dove le w_i e le z_i sono funzioni lineari delle α e delle β rispettivamente.

Se ora si impone alla 2-varietà di contenere un'algebra non commutativa con unità, la rappresentazione si semplifica nella seguente (devono valere certe relazioni tra le w_i e le z_i):

$$
\begin{array}{llcl}
 & RR.R & \oplus & R.RR \\[1em]
\mathscr{R}_1 & \begin{array}{l} -2w_1+w_2-3 \\ -2z_1+z_2 \end{array} & & \begin{array}{l} 2w_1-w_2+3 \\ 2z_1-z_2 \end{array}
\end{array}
$$

$$\mathscr{R}_2 \qquad -w_2-2w_4-3 \qquad\qquad\qquad\qquad w_2+2w_4+3$$

$$-z_2-2z_4 \qquad\qquad\qquad\qquad z_2+2z_4$$

$$\mathscr{R}_3 \quad \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} -w_1 & 3+3w_1-w_2 \\ -w_3 & -2w_1+w_2-w_3+w_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} -z_1 & 3+3z_1-z_2 \\ -z_3 & -2z_1+z_2-z_3+z_4 \end{pmatrix}$$

A questo punto la classificazione viene fatta a seconda del rango della $\mathscr{R}_3$. Rango 0 non può sussistere, come è facile osservare. Inoltre rango $\geqslant 2$ implica automaticamente che tutte le algebre della varietà sono ad associatori dipendenti (intendendo con questa denominazione un'algebra che abbia in $\mathscr{R}_3$ $(a,b,-a,-b)$. Resta quindi il caso del rango 1. Dalla rappresentazione matriciale si deduce la identità corrispondente e si vede che i cinque tipi della classificazione di Anderson e Kleinfeld si riducono ad un solo tipo.