I BI-IDEALI NEI SEMIGRUPPI REGOLARI E NEGLI ORTOGRUPPI.

Introduzione.

Il concetto di bi-ideale, che generalizza quello classico di ideale, è stato introdotto nel 1952 da Good e Hughes e si è in seguito rivelato molto utile.

Infatti vari autori (Lajos, Steinfeld, Kuroki, Szàsz,....) hanno riproposto uno studio più approfondito dei semigruppi regolari e loro sottoclassi attraverso i bi-ideali, ottenendo tra l'altro delle interessanti caratterizzazioni.

Recentemente Steinfeld [10] ha dimostrato che la completa regolarità di un semigruppo è sufficiente a garantire la completa regolarità di ogni suo bi-ideale. In questo lavoro si dimostra invece che la regolarità di un semigruppo non è sufficiente a garantire la regolarità di ogni suo bi-ideale.

Si prova inoltre che esiste un isomorfismo tra i semigruppi $\mathcal{B}(S)$ e $\mathcal{B}(S/\mathcal{H})$ dei bi-ideali di S e $S/\mathcal{H}$, quoziente di S rispetto alla relazione di Green $\mathcal{H}$, ove S sia un semigruppo regolare ed $\mathcal{H}$ sia una congruenza.

Spesso i citati autori hanno utilizzato il semigruppo $\mathcal{B}(S)$ dei bi-ideali di S per caratterizzare alcune classi di semigruppi. Analogamente qui si perviene a delle caratterizzazioni di alcune sottoclassi di ortogruppi mediante proprietà di $\mathcal{B}(S)$, caratterizzazioni che tra l'altro evidenziano il legame esistente tra $\mathcal{B}(S)$ e la banda E degli idempotenti dell'ortogruppo S; in particolare si è provato che esiste un isomorfismo tra $\mathcal{B}(S)$ e $\mathcal{B}(E)$.

DEFINIZIONE 1 - Un sottosemigruppo $B(\neq \emptyset)$ di un semigruppo S si dice <u>bi-ideale</u> di S se $BSB \subseteq B$.

E' noto che se S è regolare BSB = B, per ogni bi-ideale B di S.

<u>TEOREMA 1</u> -

Se ogni bi-ideale principale di un semigruppo S è regolare, allora S è completamente regolare.

<u>Dim.</u>

Sia a un elemento di un semigruppo S, si consideri il bi-ideale principale

Evidentemente una banda normale sinistra [risp. destra] è regolare sinistra [risp. destra].

<u>TEOREMA</u> 10 [10']

Se il semigruppo $\mathcal{B}(S)$ dei bi-ideali di un semigruppo S è una banda regolare sinistra [destra], allora $\mathcal{B}(S)$ è una banda normale sinistra [destra].

<u>Dim.</u>

Sia $\mathcal{B}(S)$ una banda regolare sinistra e siano A,X,Y bi-ideali di S. Allora

$$AXY = AXYX = AXAYX \subseteq AYX$$

$$AYX = AYXY = AYAXY \subseteq AXY$$

Pertanto AXY = AYX, cioé $\mathcal{B}(S)$ è una banda normale sinistra.

Dai Teoremi 9 - 9' e 10 - 10' si ottengono immediatamente il teorema seguente ed il suo duale.

<u>TEOREMA 11</u>

Un semigruppo S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti E regolare sinistra se e solo se $\mathcal{B}(S)$ è una banda normale sinistra.

Immediata conseguenza dei Teoremi 9 - 9' è la seguente caratterizzazione, dovuta a Kuroki (cfr. [5]), degli ortogruppi nei quali la banda degli idempotenti E è un semireticolo.

<u>TEOREMA 12</u>

Un semigruppo S è un ortogruppo nel quale la banda degli idempotenti E è un semireticolo se e solo se $\mathcal{B}(S)$ è un semireticolo.

Poiché, come si è precedentemente osservato, se S è un ortogruppo $\mathcal{B}(S)$ è una banda normale, dai Teoremi 9,10,11,12, e loro duali si ottiene infine il seguente teorema.

TEOREMA 12

Se un semigruppo S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti E di tipo $\mathcal{P}$, ove $\mathcal{P}$ è uno qualsiasi dei tipi di banda classificati in [7], allora $\mathcal{B}(S)$ è una banda di tipo $\mathcal{P}$. Inoltre se il tipo $\mathcal{P}$ è quello di banda regolare sinistra, o regolare destra, o semireticolo, allora e solo allora vale il viceversa