

Introduzione.

Il concetto di bi-ideale, che generalizza quello classico di ideale, è stato introdotto nel 1952 da Good e Hughes e si è in seguito rivelato molto utile.

Infatti vari autori (Lajos, Steinfeld, Kuroki, Szász,....) hanno riproposto uno studio più approfondito dei semigrupperi regolari e loro sottoclassi attraverso i bi-ideali, ottenendo tra l'altro delle interessanti caratterizzazioni.

Recentemente Steinfeld [10] ha dimostrato che la completa regolarità di un semigruppero è sufficiente a garantire la completa regolarità di ogni suo bi-ideale. In questo lavoro si dimostra invece che la regolarità di un semigruppero non è sufficiente a garantire la regolarità di ogni suo bi-ideale.

Si prova inoltre che esiste un isomorfismo tra i semigrupperi $B(S)$ e $B(S/H)$ dei bi-ideali di S e S/H , quoziente di S rispetto alla relazione di Green H , ove S sia un semigruppero regolare ed H sia una congruenza.

Spesso i citati autori hanno utilizzato il semigruppero $B(S)$ dei bi-ideali di S per caratterizzare alcune classi di semigrupperi. Analogamente qui si perviene a delle caratterizzazioni di alcune sottoclassi di ortogruppi mediante proprietà di $B(S)$, caratterizzazioni che tra l'altro evidenziano il legame esistente tra $B(S)$ e la banda E degli idempotenti dell'ortogruppo S ; in particolare si è provato che esiste un isomorfismo tra $B(S)$ e $B(E)$.

DEFINIZIONE 1 - Un sottosemigruppero $B (\neq \emptyset)$ di un semigruppero S si dice bi-ideale di S se $BSB \subseteq B$.

E' noto che se S è regolare $BSB = B$, per ogni bi-ideale B di S .

TEOREMA 1 -

Se ogni bi-ideale principale di un semigruppero S è regolare, allora S è completamente regolare.

Dim.

Sia a un elemento di un semigruppero S , si consideri il bi-ideale principale

generato da a , $(a)_b$. Poiché $(a)_b$ è per ipotesi regolare e $(a)_b = aSa$, esistono un elemento x di $(a)_b$ ed un elemento s di S tali che $a = axa = a^2sa^2$. Segue che a è un elemento completamente regolare di S .

In [10] Steinfield ha dimostrato che la completa regolarità di un semigruppone quivale alla completa regolarità di ogni suo bi-ideale. Da questo risultato e al Teorema 1 segue immediatamente che la regolarità di un semigruppone non garantisce la regolarità di ogni suo bi-ideale, anzi neppure la regolarità di ogni suo bi-ideale principale.

Il seguente teorema fornisce una proprietà dei bi-ideali di un semigruppone regolare.

TEOREMA 2

Ogni bi-ideale di un semigruppone regolare S è unione delle H -classi dei suoi elementi.

Dim.

Sia B un bi-ideale di un semigruppone regolare S . Evidentemente B è contenuto in $\bigcup_{b \in B} H_b$; inoltre, se x è un elemento di $\bigcup_{b \in B} H_b$, esiste un elemento b' di tale che $x \in H_{b'}$, cioè tale che $xS = b'S$ ed $Sx = Sb'$. Da ciò e dalla regolarità di S segue

$$x = xax = b'sx = b's'b' \quad (\text{con } a, s, s' \text{ opportuni}).$$

Usualmente si denota con $B(S)$ il semigruppone dei bi-ideali di un semigruppone S .

TEOREMA 3

Sia S un semigruppone regolare con H congruenza. Allora i semigruppone $B(S)$ e $B(S/H)$ sono isomorfi.

Dim.

Sia S un semigruppone regolare con H congruenza e sia

$$f : B(S) \rightarrow B(S/H)$$

L'applicazione così definita: $f(B) = H_B$ ove $H_B = \{H_b\}_{b \in B}$. L'applicazione f è ben posta. Infatti, se b_1, b_2 sono due elementi di B ed s è un elemento di S ,

$$H_{b_1} H_s H_{b_2} = H_{b_1 s b_2}$$

con $b_1 s b_2$ elemento di B , per cui $H_{b_1} H_s H_{b_2}$ è un elemento di H_B , che pertanto è un bi-ideale di S/H .

Si dimostra che f è isomorfismo. Siano B e B' due bi-ideali di S tali che $H_B = H_{B'}$; allora, per il teorema 2, $B = B'$, cioè f è iniettiva.

D'altra parte, se T è un sottoinsieme di S tale che $H = \{H_t\}_{t \in T}$ è un bi-ideale di S/H , $\bigcup_{t \in T} H_t$ è un bi-ideale di S . Infatti, se x, y sono due elementi di $\bigcup_{t \in T} H_t$ ed s è un elemento di S , esistono t_1, t_2 elementi di T tali che x sta in H_{t_1} e y sta in H_{t_2} e, poiché H è un bi-ideale di S/H

$$H_{t_1} H_s H_{t_2} = H_{t'}$$

ove t' è un elemento di T . Pertanto

$$x s y \in H_{t_1} H_s H_{t_2} = H_{t'} \subseteq \bigcup_{t \in T} H_t$$

cioè $\bigcup_{t \in T} H_t$ è un bi-ideale di S e quindi f è suriettiva.

Siano infine B e B' due bi-ideali di S e siano b un elemento di B e b' un elemento di B' ; allora $H_b H_{b'} = H_{bb'}$, e quindi $H_B H_{B'} \subseteq H_{BB'}$.

Inoltre sia x un elemento di BB' e siano b un elemento di B e b' un elemento di B' tali che $x = bb'$. Allora, se h è un elemento di H_x

$$hS = bb'S \quad Sh = Sbb'.$$

Da ciò e dalla regolarità di S , segue

$$h = hah = bb'sh = bb's'bb'$$

ove a, s, s' sono opportuni elementi di S . Pertanto h è un elemento di $H_{bb's'b'b'}$. Inoltre se k è un altro elemento di H_x , $k = bb's''bb'$, con s'' opportuno elemento di s , è $bb's''b H_{bb's'b'b}$. Allora

$$H_x = H_{bb's'b'b} H_{b'}$$

e quindi $H_{BB'} \subseteq H_B H_{B'}$.

Pastijn in [6] ha dimostrato che se S è regolare $B(S)$ è una banda normale (cioè per ogni A, B, C in $B(S)$, $ABCA = ACBA$) se e solo se S è intraregolare. Da questa proprietà di $B(S)$ e da una caratterizzazione di Lajos (cioè, S è regolare e intraregolare se e solo se $B(S)$ è una banda) (cfr. [9]) segue immediatamente il seguente teorema.

TEOREMA 4

Un semigruppò S è regolare e intraregolare se e solo se $B(S)$ è una banda normale.

Poiché un ortogruppò è un particolare semigruppò regolare e intraregolare, se S è un ortogruppò $B(S)$ è una banda normale. Per questa classe di semigruppò è interessante ricercare la relazione esistente tra la banda dei bi-ideali e la banda degli idempotenti.

TEOREMA 5

Un semigruppò S è un ortogruppò se e solo se ogni bi-ideale di S è un ortogruppò.

Dim.

Sia S un ortogruppò e sia B un bi-ideale di S , allora è noto che B è comple

tamente regolare (cfr. [10]). Inoltre, se e ed f sono idempotenti di B , e f è un idempotente di B perché l'insieme degli idempotenti di S e B sono sottosemigruppi di S .

Il viceversa è immediato.

COROLLARIO 6

Un semigruppò S è un ortogruppò con la banda degli idempotenti di tipo P , ove P è uno qualsiasi dei tipi di banda classificati in [7], se e solo se ogni bi-ideale di S è un ortogruppò con la banda degli idempotenti di tipo P .

Se S è un ortogruppò con H congruenza, le bande E ed S/H sono isomorfe. Allora dal Teorema 3 segue che le bande $B(S)$ e $B(E)$ sono isomorfe. Però, se S è un ortogruppò, l'isomorfismo tra $B(S)$ e $B(E)$ esiste anche se H non è una congruenza. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA 7

Sia S un ortogruppò con banda degli idempotenti E . Allora le bande $B(S)$ e $B(E)$ sono isomorfe.

Dim.

Sia S un ortogruppò con banda degli idempotenti E e sia

$$Z : B(S) \rightarrow B(E)$$

l'applicazione così definita: $Z(B) = E(B)$, ove $E(B)$ è la banda degli idempotenti di B . L'applicazione Z è ben posta. Infatti, se B è un bi-ideale di S ed e, f sono due elementi di $E(B)$ e g è un elemento di E , efg sta in $E(B)$ perché E è una banda e B è un bi-ideale di S ; pertanto $E(B)$ è un bi-ideale di E .

Si dimostra che Z è un isomorfismo. Siano B e B' due bi-ideali di S tali che $E(B) = E(B')$ e sia b un elemento di B . Per il teorema 5, esiste un elemento x

di B tale che $b = bxb$ e $xb = bx$; allora, essendo bx un idempotente di B e quindi di B',

$$b = bxb = bxbxb$$

è un elemento di B'. Analogamente si prova che, se b' è un elemento di B', b' è un elemento di B. Pertanto $B = B'$, cioè Z è iniettiva.

Sia ora B un bi-ideale di E e sia B' il bi-ideale di S generato da B. Allora ogni elemento di B è un idempotente di B'; inoltre, se e è un idempotente di B', poiché $B' = BSB$, esistono b_1, b_2 elementi di B ed s elemento di S tali che

$$e = b_1 s b_2 = b_1^2 s b_2^2 = b_1 e b_2$$

quindi e è un elemento di B. Pertanto B' è un bi-ideale di S la cui banda degli idempotenti è B, cioè Z è suriettiva.

Siano infine B e B' due bi-ideali di S; allora, evidentemente, $E(B)E(B') \subseteq E(BB')$. Inoltre, se e è un elemento di $E(BB')$, esistono b e b' elementi rispettivamente di B e B' tali che $e = bb'$.

Denotate con \hat{b}' l'unità della H-classe di B' contenente b' e con \hat{b} l'unità della H-classe di B contenente b , si ha

$$\begin{aligned} \hat{e}b &= b\hat{b}'\hat{b} = b\hat{b}'\hat{b} = \hat{b}e\hat{b} \in E(B) \\ \hat{b}'e &= \hat{b}'b\hat{b} = \hat{b}'b\hat{b}'\hat{b}' = \hat{b}'e\hat{b}' \in E(B'). \end{aligned}$$

Allora, se b^{-1} è l'inverso di b nella H-classe di B che lo contiene e se b'^{-1} è l'inverso di b' nella H-classe di B' che lo contiene

$$\begin{aligned} \hat{e}\hat{b}\hat{b}'e &= b\hat{b}'\hat{b}\hat{b}'bb' = b\hat{b}'\hat{b}'\hat{b}\hat{b}'bb' = bb'(\hat{b}'\hat{b})^2bb' = \\ &= b\hat{b}'\hat{b}'\hat{b}bb' = bb'bb' = e^2 = e \end{aligned}$$

quindi e è un elemento di $E(B)E(B')$. Pertanto Z è un omomorfismo.

Una banda E è detta regolare sinistra [risp. destra] se, per ogni coppia (e, f) di elementi di E $ef = efe$ [$fe = efe$]. S. Lajos ([3], [4]) ha caratteriz-

zato gli ortogruppi con la banda degli idempotenti E regolare sinistra [risp. destra]. Ha infatti dimostrato il seguente teorema, del quale, ovviamente, vale il duale.

TEOREMA 8

Un semigruppò S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti E regolare sinistra se e solo se $B(S)$ è un semigruppò regolare di cui S è una unità destra.

Il Teorema 9 che segue (del quale vale anche il duale, Teorema 9') caratterizza la stessa classe di semigruppò, mettendo però in evidenza la relazione che esiste tra le bande B e $B(S)$.

TEOREMA 9

Un semigruppò S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti E regolare sinistra se e solo se $B(S)$ è una banda regolare sinistra.

Dim.

Sia S un ortogruppo con la banda degli idempotenti E regolare sinistra e siano A, X due bi-ideali di E . Allora, se a è un elemento di A ed x , un elemento di X , $ax = axa$, cioè l'elemento ax di AX sta in AXA e quindi $AX \subseteq AXA$. Inoltre, se aa' sono due elementi di A ed x è un elemento di X , $axa' = a(xa'x)$, cioè l'elemento axa' di AXA sta in AX e quindi $AXA \subseteq AX$. Pertanto $B(E)$ è una banda regolare sinistra. Da ciò e dal Teorema 7 segue che $B(S)$ è una banda regolare sinistra.

Viceversa, sia $B(S)$ una banda regolare sinistra; allora $B(S)$ è un semigruppò regolare e $BS = BSB = B$ per ogni bi-ideale B di S . Da ciò e dal Teorema 8, segue che S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti E regolare sinistra.

Diciamo che una banda E è normale sinistra [risp. destra] se $efg = egf$ [gfe = fge] per ogni e, f, g elementi di E .

Evidentemente una banda normale sinistra [risp. destra] è regolare sinistra [risp. destra].

TEOREMA 10 [10']

Se il semigruppone $B(S)$ dei bi-ideali di un semigruppone S è una banda regolare sinistra [destra], allora $B(S)$ è una banda normale sinistra [destra].

Dim.

Sia $B(S)$ una banda regolare sinistra e siano A, X, Y bi-ideali di S . Allora

$$AXY = AXYX = AXAYX \subseteq AYX$$

$$AYX = AYXY = AYAXY \subseteq AXY$$

Pertanto $AXY = AYX$, cioè $B(S)$ è una banda normale sinistra.

Dai Teoremi 9 - 9' e 10 - 10' si ottengono immediatamente il teorema seguente ed il suo duale.

TEOREMA 11

Un semigruppone S è un ortogruppone con la banda degli idempotenti E regolare sinistra se e solo se $B(S)$ è una banda normale sinistra.

Immediata conseguenza dei Teoremi 9 - 9' è la seguente caratterizzazione, dovuta a Kuroki (cfr. [5]), degli ortogruppone nei quali la banda degli idempotenti E è un semireticolo.

TEOREMA 12

Un semigruppone S è un ortogruppone nel quale la banda degli idempotenti E è un semireticolo se e solo se $B(S)$ è un semireticolo.

Poiché, come si è precedentemente osservato, se S è un ortogruppone $B(S)$ è una banda normale, dai Teoremi 9, 10, 11, 12, e loro duali si ottiene infine il seguente teorema.

TEOREMA 12

Se un semigruppò S è un ortogruppò con la banda degli idempòtenti E di tipo P , ove P è uno qualsiasi dei tipi di banda classificati in [7], allora $\mathcal{B}(S)$ è una banda di tipo P . Inoltre se il tipo P è quello di banda regolare sinistra, o regolare destra, o semireticolo, allora e solo allora vale il viceversa

BIBLIOGRAFIA

- [1] CLIFFORD, A.H. - Preston, G.B. *The algebraic theory of semigroups*, vol. I, Amer. Math. Soc., Providence 1961
- [2] HOWIE, J.M. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press - London, New York, 1976.
- [3] LAJOS, S. *On the (1;1)-ideal semigroups of a semigroup* Dep. Math., K. Marx Univ. Economics, Budapest, 9, 12-19 (1978)
- [4] LAJOS, S. *Characterization of certain classes of semigroups* Math. Semin. Notes, Kibe Univ. 7, 605 - 608 (1979)
- [5] NOBUAKI KUROKI, F. *On normal semigroups* Czechoslovak Math. J. 27 (102) 1977 Praha 43-59.
- [6] PASTIJN, F. *Regular locally testable semigroups as semigroup of quasi-ideals* Acta Math. Acad. Sci. Hung. 36, 161-166 (1980).
- [7] PETRICH, M. *A construction and a classification of bands* Math. Nachr. 48 (1971) 263-274.
- [8] PETRICH, M. *The structure of completely regular semigroups* Trans. Am. Math. Soc. 189, (1974), 211-236.
- [9] STEINFELD, O. *Quasi-ideals in rings and semigroups* Akadémiai Kiadó, Budapest (1978)
- [10] STEINFELD, O. *On completely regular semigroups* Semig. Forum, 21, 93-94 (1980).