PARTE II

GRUPPI DI CONICHE

N.I Premessa

Nella prima parte abbiamo visto come l'insieme delle forme quadratiche omogenee e dei polinomi di grado ≤ 2 di n variabili si possano strutturare come un gruppo di polinomi (secondo Lie) tramite una matrice antisimmetrica di ordine n ed a coefficienti costanti.

Ora, se una conica $\mathfrak{C}$ ha equazione:

$$F(x^{\circ},x^{1},x^{2}) = 0$$

in coordinate proiettive omogenee e:

$$f(x,y) = 0$$

in coordinate proiettive non omogenee, certamente F è una forma quadratica omogenea in 3 variabili ed f è un polinomio di 2° grado; risulta quindi naturale applicare la definizione di gruppo di polinomi alle coniche.

$$(4.2)\quad a_{12}(b^2-c^2) + (a_{22}-a_{11})bc = 0$$

In conclusione: calcolando la P.P.G. definita dalla matrice (2.7) fra una data conica $\mathcal{C}$ ed una conica $\mathcal{C}'$ doppiamente degenere di parametri direttori b,c soddisfacenti la (4.1) o la (4.2) si ottiene una conica degenere di cui una componente è la componente doppia di $\mathcal{C}$ e l'altra è asse di $\mathcal{C}$.

Osserviamo che non dipendendo le (4.1) e (4.2) dal coefficiente a che figura nell'equazione di $\mathcal{C}'$, si può sempre considerare $a = 0$. Inoltre, se $\mathcal{C}$ è circonferenza, cioè se $a_{11} = a_{12}$ e $a_{12} = 0$ le (4.1) e (4.2) sono identicamente soddisfatte, a riprova del fatto che per la circonferenza tutte le rette per il centro sono assi (si ricordi che r' passa per il centro di $\mathcal{C}$).

Se $\mathcal{C}$ è una parabola, perchè r' risulti essere il suo asse deve essere la polare di $\overline{C}\ (0,a_{12},a_{22})^{(*)}$, e quindi, se $\mathcal{C}$ ha equazione:

$$a_{ij}x^i x^j = F(x^0,x^1,x^2) = 0$$

deve essere:

$$\begin{cases} a_{10}c-a_{20}b = \rho\, F_{x^0}(\overline{C}) = 2\rho(a_{01}a_{12}+a_{02}a_{22}) \\ a_{11}c-a_{12}b = \rho\, F_{x^1}(\overline{C}) = 2\rho\ (a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}) \\ a_{12}c-a_{22}b = \rho\, F_{x^2}(\overline{C}) = 2\rho\ (a_{12}^2 + a_{22}^2) \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} a_{10}(c - 2\rho a_{12}) - a_{20}(b+2\rho a_{22}) = 0 \\ a_{11}(c - 2\rho a_{12}) - a_{12}(b+2\rho a_{22}) = 0 \\ a_{12}(c - 2\rho a_{12}) - a_{22}(b+2\rho a_{22}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 2\rho a_{12} \\ b = 2\rho a_{22} \end{cases}$$

Quindi calcolando la P.P.G. di $\mathcal{C}$ con la conica

$$\mathcal{C}' : (- a_{22}x + a_{12}y)^2 = 0$$

si ottiene una conica le cui componenti sono:

$$r : - a_{22}x + a_{12}y = 0$$

r' = asse della parabola.

Qualora si abbia $a_{12} = a_{22} = 0$ ed $a_{11} \neq 0$, per asse si assume la retta:

$$x = -\frac{a_{1o}}{a_{11}}$$

Per determinare l'equazione degli asintoti, si procede analogamente al caso degli assi; in questo caso bisogna imporre che i parametri direttori di r':

$$\ell = (a_{22}b - a_{12}c) \qquad m = (a_{11}c - a_{12}b)$$

verifichino l'equazione

$$(4.3) \quad a_{11}(a_{22}b - a_{12}c)^2 + 2a_{12}(a_{22}b - a_{12}c)(a_{11}c - a_{12}b) + \\ + a_{22}(a_{11}c - a_{12}b)^2 = 0$$

che sviluppata e ridotta ai minimi ternmini diventa :

$$(4.4) \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\left[a_{22}b^2 + a_{11}c - 2_{12}bc\right] = 0$$

Per le coniche a centro è:

$$a_{11}a_{12} - a_{12}^2 \neq 0$$

per cui si ha: calcolando la P.P.G. definita dalla matrice (2.7) fra una assegnata conica $\mathcal{C}$ ed un'altra conica $\mathcal{C}'$ che sia doppiamente degenere ed avente parametri direttori b , c soddisfacenti la:

(*) Il centro di $\mathcal{C}$ è il punto improprio $C(0, a_{22}, - a_{12})$.

$$(4.5) \quad a_{22}b^2 + a_{11}c^2 - 2a_{12}bc = 0$$

si ottiene una conica degenere di cui una componente è la retta doppia di $\mathfrak{C}$ e l'altra è asintoto per $\mathfrak{C}$.

Anche in questo caso, data l'indipendenza di (4.4) e (4.5) dal coefficiente a nell'equazione di $\mathfrak{C}'$, si potrà supporre a = 0.

N. 5 Esempi.

Siano assegnate le seguenti coniche:

$\mathscr{C}^1$: $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$ circonferenza

$\mathscr{C}^2$: $2x^2 + 4y^2 - 2xy - 2x + y + 2 = 0$ ellisse

$\mathscr{C}^3$: $x^2 + 2xy - x + y = 0$ iperbole

$\mathscr{C}^4$: $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4y - 3 = 0$ parabola.

Determiniamo il centro di $\mathscr{C}^1$; per questo consideriamo le tre coniche:

$\mathscr{C}$: $xy = 0$ $\quad\mathscr{C}'$: $x(y-1) = 0$ $\quad\mathscr{C}''$: $y(x-1) = 0$

di centri rispettivamente $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$ e le P.P.G.

$(\mathscr{C}^1,\mathscr{C})$: $(x+1)x - (y-3)y$ cioè $x^2 - y^2 + x + 3y = 0$

$(\mathscr{C}^1,\mathscr{C}')$: $(x+1)x - (y-3)(y-1)$ cioè $x^2 - y^2 + x + 4y - 3 = 0$

$(\mathscr{C}^1,\mathscr{C}'')$: $(x+1)(x-1) - (y-3)y$ cioè $x^2 - y^2 + 3y - 1 = 0$

Si trova che:

$(\mathscr{C}^1,\mathscr{C}) \cap (\mathscr{C}^1,\mathscr{C}') \cap (\mathscr{C}^1,\mathscr{C}'') = C\,(-1,3)$

Determiniamo ora gli assi di $\mathscr{C}^2$; determiniamo b e c in modo che soddisfino l'equazione:

$$-(b^2-c^2) + 2bc = 0$$

da cui si ha:

$$c = b(-1 \pm \sqrt{2}\,)$$

gli assi di $\mathscr{C}^2$ sono dunque le rette:

$$s_1: (2x - y - 1)(-1-\sqrt{2}) - (-x + 4y + \tfrac{1}{2}) = 0$$

$$s_2: (2x - y - 1)(-1+\sqrt{2}) - (-x + 4y + \tfrac{1}{2}) = 0$$

cioè

$$s_1: 2x(-1-2\sqrt{2}) + 2y(-3+\sqrt{2}) + (1+2\sqrt{2}) = 0$$

$$s_2: 2x(-1+2\sqrt{2}) - 2y(3+\sqrt{2}) + (1-2\sqrt{2}) = 0$$

che si possono anche scrivere:

$$s_1: (x-\tfrac{1}{2}) + (-1+\sqrt{2})y = 0$$

$$s_2: (x-\tfrac{1}{2}) - (1+\sqrt{2})y = 0$$

Determiniamo gli asintoti di $\mathcal{C}^3$; b e c debbono soddisfare la (4.5), cioè l'equazione

$$c^2 - 2bc = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0 \qquad c_2 = 2b$$

Gli asintoti cercati hanno dunque equazione:

$$t_1: (x+y-\tfrac{1}{2}) \cdot 0 - (x + \tfrac{1}{2})b = 0$$

$$t_2: (x+y-\tfrac{1}{2})\, 2 - (2x + 1) = 0$$

cioè

$$t_1 : x + \tfrac{1}{2}$$

$$t_2 : 2x + 4y - 3 = 0$$

Determiniamo infine l'equazione dell'asse di $\mathcal{C}^4$; ponendo:

$$c = 2 \quad \text{e} \quad b = 4$$

si ha l'equazione dell'asse :

$$(2x + 4y)(2) - (4x + 8y - 4)(-4) = 0$$

cioè:

$$5x + 10y - 4 = 0$$