PARTE I
GRUPPI DI POLINOMI

N.1 Introduzione

La teoria classica dei gruppi di Lie e soprattutto delle algebre di Lie trova ampia applicazione nello studio dei sistemi canonici, nel senso che gli integrali primi di un sistema canonico costituiscono un'algebra di Lie che con terminologia classica è detta "Gruppo di funzioni"[2].

La nozione di gruppo di funzioni è stata generalizzata nell'ambito della teoria delle trasformazioni canoniche [1], per poi essere da me riguardata ed ulteriormente generalizzata da un punto di vista algebrico [4] e [5].

In questa prima parte del lavoro vengono definiti i gruppi di polinomi algebrici, i quali non sono dei gruppi di funzioni nel senso classico del termine, ma che, come tutti i gruppi di funzioni (generalizzati o no, singolari o no) sono algebre di Lie, di cui è stato in qualche caso determinato il gruppo di Lie.

N.2 Gruppi di Polinomi

Consideriamo una matrice ad n righe e ad n colonne, antisimmetrica, i cui coefficienti siano dei polinomi algebrici

$$\mathbf{q}^{\alpha\beta}(\omega) = \mathbf{q}^{\alpha\beta}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$

di n variabili reali $\omega_1, \ldots, \omega_n$; ciascuno di grado arbitrario e soddisfacenti la relazione:

$$(2.1) \qquad \mathbf{q}^{\lambda\mu} \frac{\partial \mathbf{q}^{\nu\rho}}{\partial \omega^{\mu}} + \mathbf{q}^{\nu\mu} \frac{\partial \mathbf{q}^{\rho\lambda}}{\partial \omega^{\nu}} + \mathbf{q}^{\rho\mu} \frac{\partial \mathbf{q}^{\lambda\nu}}{\partial \omega^{\mu}} = 0 .$$

Presi ad arbitrio due polinomi $P_1(\omega)$ e $P_2(\omega)$, si può allora definire la Parentesi di Poisson Generalizzata (P.P.G.) al modo usuale [6] :

$$(2.2) \qquad (P_1, P_2)^{*}(\omega) = \mathbf{q}^{\alpha\beta}(\omega) \frac{\partial P_1(\omega)}{\partial \omega^{\alpha}} \quad \frac{\partial P_2(\omega)}{\partial \omega^{\rho}} ;$$

com'è noto detta operazione fra polinomi è anticommutativa, bilineare e soddisfa l'identità di Jacobi:

$$= a_{rs}+b_{rs}+\frac{1}{2}\left[\eta^{j\ell}a_{rj}b_{s\ell}+ \qquad \eta^{ik}a_{ir}b_{ks}+\eta^{jk}a_{rj}b_{ks}+\eta^{i\ell}a_{ir}b_{s\ell}+\right.$$

$$\left.+\eta^{j\ell}a_{sj}b_{r\ell}+\eta^{ik}a_{is}b_{kr}+\eta^{jk}a_{sj}b_{kr}+\eta^{i\ell}a_{is}b_{r\ell}\right]+\ldots=$$

$$= a_{rs}+b_{rs}+\frac{1}{2}\left[\eta^{j\ell}(a_{rj}b_{s\ell}+a_{sj}b_{r\ell})+\eta^{ik}(a_{ir}b_{ks}+a_{is}b_{kr})+\eta^{jk}(a_{rj}b_{ks}+a_{rj}b_{kr})+\right.$$

$$\left.+\eta^{i\ell}(a_{ir}b_{s\ell}+a_{is}b_{r\ell})\right]+\ldots$$

N.5 Il gruppo $\left[P_2(\omega)\right]$ dei polinomi di grado ≤ 2.

Consideriamo l'insieme $\left[P_2(\omega)\right]$ dei polinomi di $\omega^1,\dots,\omega^n$ aventi grado minore o uguale a 2, ed una matrice $\eta=(\eta^{\alpha\beta})$ dello stesso tipo considerato al N.4, cioè a coefficienti costanti.

Presi ad arbutrio due elementi di $\left[P_2(\omega)\right]$

$$P^1(\omega) = a^1{}_{ij}\omega^i\omega^j+b^1{}_k\omega^k+c^1$$

$$P^2(\omega) = a^2{}_{ij}\omega^i\omega^j+b^2{}_k\omega^k+c^2$$

allora la P.P.G. definita dalla matrice η è della forma:

$$(5.1)\quad (P^1,P^2)^*(\omega) = \eta^{\alpha\beta}(2a^1{}_{\alpha j}\omega^j+b^1{}_\alpha)(2a^2{}_{\beta\ell}\omega^\ell+b^2{}_\beta) =$$

$$= 4\eta^{\alpha\beta}a^1{}_{\alpha j}\omega^j a^2{}_{\beta\ell}\omega^\ell+ 2\eta^{\alpha\beta}a^1{}_{\alpha j}\omega^j+ 2\eta^{\alpha\beta}a^2{}_{\alpha\ell}\omega^\ell+\eta^{\alpha\beta}b^1{}_\alpha b^2{}_\beta=$$

$$= 4\eta^{\alpha\beta}a^1{}_{\alpha j}a^2{}_{\beta\ell}\omega^j\omega^\ell+2\eta^{\alpha\beta}(a^1{}_{\alpha j}+a^2{}_{\alpha j})\,\omega^j+\eta^{\alpha\beta}b^1{}_\alpha b^2{}_\beta$$

Lo spazio vettoriale $P_2(\omega)$, munito della legge di composizione interna definita da (5.1) risulta essere un gruppo di polinomi, quindi un'algebra di Lie su $\mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n+1)}{c}} = \mathbb{R}^q$ per cui, identificando i polinomi:

$$1,\omega^1,\dots,\omega^n,\omega^{11},\dots,\omega^{nn}$$

con i campi vettoriali

$$\frac{\partial}{\partial\omega^o},\ \frac{\partial}{\partial\omega^1},\ \dots,\ \frac{\partial}{\partial\omega^n},\ \frac{\partial}{\partial\omega^{11}},\ \dots,\ \frac{\partial}{\partial\omega^{nn}}$$

ogni polinomio

$$P(\omega) = a_{ij}\omega^i\omega^j + b_k\omega^k+ c$$

si può identificare col campo vettoriale su $\mathbb{R}^q$:

$$(5.2)\quad Z(\omega) = a_{ij}\frac{\partial}{\partial\omega^{ij}} + b_k\frac{\partial}{\partial\omega^k} + c\frac{\partial}{\partial\omega^0}$$

di conseguenza gli elementi del gruppo di Lie associato a $\left[P_2(\omega)\right]$ ed avente elemento neutro $Z_0(\omega_0{}^0, \omega_0{}^1, \ldots, \omega_0{}^{nn})$ è l'insieme delle q - uple del tipo:

(5.3) $(c+\omega_0{}^0, b_1+\omega_0{}^1, \ldots, b_n+\omega_0{}^n, a_{11}+\omega_0{}^{11}, \ldots, a_{nn}+\omega_0{}^{nn})$

Ricaviamo ora le costanti di strutture; si ha:

$$(\omega^0, \omega^0)^* = 0 \Longrightarrow C^{00}{}_i = 0 \ \forall_i = 1, \ldots, n$$

$$(\omega^0, \omega^i)^* = 0 \forall i = 1, \ldots, n \Longrightarrow C^{0i}{}_j = 0 \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

$$(\omega^0, \omega^{jk})^* = 0 \forall j, k \in \{1, \ldots, n\} \Longrightarrow C^0{}_\ell{}^{,[jk]} = 0 \ \forall i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$$

$$(\omega^i, \omega^j)^* = \eta^{\alpha\beta}\delta^j{}_\alpha\delta^j{}_\beta = \eta^{ij} \Longrightarrow C^{ij}{}_0 = \eta^{ij}; \ C^{ij}{}_k = 0 \ \forall \ k \in \{1, \ldots, n\}$$

$$(\omega^i, \omega^\kappa\omega^\ell)^* = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\omega^i}{\partial\omega^\alpha}\ \frac{\partial(\omega^\kappa\omega^\ell)}{\partial\omega^\beta} = \eta^{\alpha\beta}\delta^i{}_\alpha(\delta^\kappa{}_\beta\omega^\ell + \omega^\kappa\delta^\ell{}_\beta) =$$

$$= \eta^{i\beta}\delta^\kappa{}_\beta\omega^\ell + \eta^{i\beta}\delta^\ell{}_\beta\omega^\kappa = \eta^{i\kappa}\omega^\ell + \eta^{i\ell}\omega^\kappa$$

per cui si ha:

$$C_0^{i,[k\ell]} = 0; \ C_k^{i,[k\ell]} = \eta^{i\ell}; \ C_e^{i,[k\ell]} = \eta^{ik}; \ C_r^{i;[k,\ell]} = 0 \ \forall r \in \{k, \ell\}$$

infine, in base alla (4.5), si ha:

$$C^{[ij],[k\ell]}_{ik} = \eta^{j\ell}$$

Esplicitiamo ora la legge di gruppo per le q - uple del tipo (5.3) assumendo $Z_0 = (0, \ldots, 0)$ per comodità di notazione; intanto risulta, se $P^1(\omega)$ e $P^2(\omega)$ sono due elementi di $\left[P_2(\omega)\right]$,:

$$g^1 = \exp\left[P^1(\omega)\right] = (c^1, b_1{}^1, \ldots, b^1{}_n, a^1{}_{11}, \ldots, a^1{}_{nn})$$

$$g^2 = \exp\left[P^2(\omega)\right] = (c^2, b^2{}_1, \ldots, b^2{}_n, a^2{}_{11}, \ldots, a^2{}_{nn})$$

Inoltre è:

(5.5) $(g^1 \cdot g^2)_0 = c^1 + c^2 + \frac{1}{2} c_0^{ij} a^1{}_i b^2{}_j + \ldots = c^1 + c^2 + \frac{1}{2} \eta^{ij} a^1{}_i b^2{}_j;$

5.6) $$(g^1 \cdot g^2)_r = b^1{}_r + b^2{}_r + \frac{1}{2}\left[c^{i,[r\ell]}_r b^1{}_i a^2{}_{r\ell} + c^{i,[kr]}_r b^1{}_i a^2{}_{kr}\right] + \dots =$$

$$= b^1{}_r + b^2{}_r + \frac{1}{2}\left[\eta^{i\ell} b^1{}_i a^2{}_{r\ell} + \eta^{ik} b^1{}_i a^2{}_{kr}\right] + \dots ;$$

5.7) $$(g^1 \cdot g^2)_{rs} = a^1{}_{rs} + a^2{}_{rs} + \frac{1}{2}\Big[\eta^{j\ell}(a^1{}_{rj} a^2{}_{s\ell} + a^1{}_{sj} a^2{}_{r\ell}) +$$

$$+ \eta^{ik}(a^1{}_{ir} a^2{}_{ks} + a^1{}_{is} a^2{}_{kr}) + \eta^{jk}(a^1{}_{rj} a^2{}_{ks} + a^1{}_{sj} a^2{}_{kr}) + \eta^{j\ell}(a^1{}_{ir} a^2{}_{s\ell} + a^1{}_{is} a^2{}_{rs})\Big] + .$$