PARTE I
GRUPPI DI POLINOMI

N.1 Introduzione

La teoria classica dei gruppi di Lie e soprattutto delle algebre di Lie trova ampia applicazione nello studio dei sistemi canonici, nel senso che gli integrali primi di un sistema canonico costituiscono un'algebra di Lie che con terminologia classica è detta "Gruppo di funzioni"[2].

La nozione di gruppo di funzioni è stata generalizzata nell'ambito della teoria delle trasformazioni canoniche [1], per poi essere da me riguardata ed ulteriormente generalizzata da un punto di vista algebrico [4] e [5].

In questa prima parte del lavoro vengono definiti i gruppi di polinomi algebrici, i quali non sono dei gruppi di funzioni nel senso classico del termine, ma che, come tutti i gruppi di funzioni (generalizzati o no, singolari o no) sono algebre di Lie, di cui è stato in qualche caso determinato il gruppo di Lie.

N.2 Gruppi di Polinomi

Consideriamo una matrice ad n righe e ad n colonne, antisimmetrica, i cui coefficienti siano dei polinomi algebrici

$$\mathbf{q}^{\alpha\beta}(\omega) = \mathbf{q}^{\alpha\beta}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

di n variabili reali $\omega_1, \dots, \omega_n$; ciascuno di grado arbitrario e soddisfacenti la relazione:

$$(2.1) \qquad \mathbf{q}^{\lambda\mu} \frac{\partial \mathbf{q}^{\nu\rho}}{\partial \omega^{\mu}} + \mathbf{q}^{\nu\mu} \frac{\partial \mathbf{q}^{\rho\lambda}}{\partial \omega^{\nu}} + \mathbf{q}^{\rho\mu} \frac{\partial \mathbf{q}^{\lambda\nu}}{\partial \omega^{\mu}} = 0 .$$

Presi ad arbitrio due polinomi $P_1(\omega)$ e $P_2(\omega)$, si può allora definire la Parentesi di Poisson Generalizzata (P.P.G.) al modo usuale [6] :

$$(2.2) \qquad (P_1, P_2)^{*}(\omega) = \mathbf{q}^{\alpha\beta}(\omega) \frac{\partial P_1(\omega)}{\partial \omega^{\alpha}} \quad \frac{\partial P_2(\omega)}{\partial \omega^{\rho}} ;$$

com'è noto detta operazione fra polinomi è anticommutativa, bilineare e soddisfa l'identità di Jacobi:

(2.3) $((P_1, P_2)^*, P_3)^*(\omega) + ((P_2, P_3)^*, P_1)^*(\omega) + ((P_3, P_1)^*, P_3)^*(\omega) = 0$

Consideriamo ora r polinomi $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$, ..., $P_r(\omega)$;a partire da essi costruiamo un insieme di polinomi $\Phi(\omega)$ ottenuto aggiungendo ad essi le $r(r-1)/2$ P.P.G. che si possono formare con essi e continuando il procedimento all'infinito; considerando poi lo spazio vettoriale $G(\omega)$ generato da $\Phi(\omega)$, esso risulterà senz'altro chiuso rispetto alla P.P.G.; $G(\omega)$ lo chiamiamo gruppo di polinomi generato da $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$, ..., $P_r(\omega)$.
E' evidente che, se invece di partire dai polinomi $P_1(\omega)$, ..., $P_r(\omega)$, noi partiamo direttamente dall'insieme $P(\omega)$ di tutti i polinomi di ω_1, ..., ω_n e lo muniamo dell'operazione interna P.P.G. definita dalla matrice

$(q^{\alpha\beta}(\omega))$ di cui sopra, otteniamo ancora un gruppo di polinomi. Ora, sia nel primo caso sia nel secondo ci si trova di fronte ad algebre di Lie, ed ha senso quindi cercare di determinare il relativo gruppo di Lie; purtroppo ciò non è affatto agevole, almeno in generale.

Infatti, se $P_1(\omega)$ e $P_2(\omega)$ sono due polinomi di grado m e t rispettivamente e se il grado massimo assunto dalle $q^{\alpha\beta}(\omega)$ è p allora il grado di $(P_1,P_2)^*(\omega)$ può arrivare ad essere

(2.4) $(m - 1)+(t - 1) + p = m + t + p - 2;$

ciò mostra che in generale un gruppo di polinomi ha dimensione infinita.

Se invece supponiamo che:

$m = t = p = 1$ oppure $m = t = 2,\ p = 0$

allora accade che il polinomio $(P_1,P_2)^*(\omega)$ ha lo stesso grado di $P_1(\omega)$ e di $P_2(\omega)$, com'è facile dedurre dalla (2.4).

In altri termini se consideriamo l'insieme $\Phi^1(\omega)$ dei polinomi delle ω_1, ...,ω_n omogenei di primo grado con la P.P.G. definita da una matrice

$(q^{\alpha\beta}(\omega))$ i cui elementi siano ancora elementi di$\Phi^1(\omega)$, oppure se consideriamo l'insieme $\Phi^2(\omega)$ delle forme quadratiche omogenee di ω_1, ..., ω_n con la P.P.G. definita da una matrice $(q^{\alpha\beta}(\omega))$ i cui elementi siano dei polinomi costanti, allora otteniamo due gruppi di polinomi di grado 1 e 2, rispettivamente.

Nel caso di$\Phi^1(\omega)$ abbiamo a che fare con un'algebra di Lie n - dimensionale, nel caso di $\Phi^2(\omega)$ con un algebra di dimensione $n(n+1)/2$.

Strettamente legato ai due gruppi $\Phi^1(\omega)$ e $\Phi^2(\omega)$ è poi il gruppo $[P_2(\omega)]$ dei polinomi di ω_1, ...,ω_n di grado minore o uguale a 2, e con la P.P.G.

definita da una matrice ($q^{\alpha\beta}(\omega)$) costante; in tal caso si ha un'algebra

$\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right]$ – dimensionale.

N.3 <u>Il gruppo $\Phi^1(\omega)$ dei polinomi lineari omogenei</u>.

Consideriamo l'insieme $\Phi^1(\omega)$ dei polinomi di $\omega^1, \dots, \omega^n$ della forma:

$$P(\omega) = a_1\omega^1 + \dots + a_n\omega^n = a_i\omega^i, \text{ con } a_i \in \mathbb{R}^n \forall i = 1\dots n$$

ed una matrice $(q^{\alpha\beta}(\omega))$ antisimmetrica di ordine n i cui elementi $q^{\alpha\beta}$ siano anche degli elementi di $\Phi^1(\omega)$, cioè nella forma:

$$q^{\alpha\beta}(\omega) = a^{\alpha\beta}_i\omega^i$$

e tali da verificare la (2.1), che in questo caso si può scrivere:

$$(3.1) \qquad q^{\alpha\kappa}(\omega)\, a^{ij}_\alpha + q^{\alpha i}(\omega)\, a^{j\kappa}_\alpha + q^{\alpha j}(\omega)\, a^{\kappa i}_\alpha = 0$$

tenuto conto del fatto che:

$$\frac{\partial q^{ij}(\omega)}{\partial\omega^\kappa} = a^{ij}_\kappa$$

Presi ad arbitrio due elementi di $\Phi^1(\omega)$, siano

$$P^1(\omega) = a^1_i\omega^i, \; P^2(\omega) = a^2_i\omega^i$$

risulta:

$$(3.2) \quad (P^1,P^2)^*(\omega) = q^{\alpha\beta}(\omega)\frac{\partial P^1}{\partial\omega^\alpha}\frac{\partial P^2}{\partial\omega^\beta} = q^{\alpha\beta}(\omega)\, a^1_\alpha a^2_\beta \;;$$

con la P.P.G. definita da (3.2) l'insieme $\Phi^1(\omega)$, che è uno spazio vettoriale reale di dimensione n, e la cui base canonica è senz'altro la n - upla di polinomi $\omega^1, \dots, \omega^n$, è anche un'algebra di Lie. Osserviamo ora che ad ogni elemento di $\Phi^1(\omega)$, avente per componenti $(a_1, \dots, a_n)$ nella base $(\omega^1, \dots, \omega^n)$, si può associare biunivocamente il seguente campo di vettori $\mathbb{R}^n$, munito dell'usuale struttura di varietà differenziabile:

$$(3.3) \qquad X(\omega) = a_1\frac{\partial}{\partial\omega^1} + a_2\frac{\partial}{\partial\omega^2} + \dots a_n\frac{\partial}{\partial\omega^n}$$

le cui curve integrali sono le soluzioni del sistema differenziale:

$$(3.4)\begin{cases} \dot{\omega}^1 = a_1 \\ \dot{\omega}^2 = a_2 \\ \dot{\omega}^n = a_n \end{cases}$$

che sono delle rette in quanto hanno come curve coordinate le seguenti funzioni di primo grado in t:

$$(3.5)\begin{cases} \omega^1 \doteq a_1 t + \omega^1{}_o \\ \omega^2 = a_2 t + \omega^2{}_o \\ \omega^n = a_n t + \omega^n{}_o \end{cases}$$

ciò comporta che generando i vettori $\frac{\partial}{\partial\omega^1}$, ..., $\frac{\partial}{\partial\omega^n}$ dei gruppi globali ad un parametro di diffeomorfismi su $\mathbb{R}^n$, essi sono completi; inoltre, se consideriamo le seguenti P.P.G.:

$$(3.6)\quad (\omega^j,\omega^\kappa)^* = q^{\alpha\beta}(\omega)\delta^j{}_\alpha\ \delta^\kappa{}_\beta = q^{j\kappa}(\omega) = a^{j\kappa}{}_\ell\ \omega^\ell$$

si vede che i coefficienti di tale polinomio lineare sono costanti. Tutto ciò comporta che [7], per ogni punto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ esiste su $\mathbb{R}^n$ un'unica struttura di gruppo di Lie rispetto alla quale P_0 è elemento neutro ed il sistema

($\frac{\partial}{\partial\omega^1}$, ..., $\frac{\partial}{\partial\omega^n}$) è base per l'algebra di Lie associata e munita della P.P.G. definita da (3.2).

Ricaviamo ora (in modo approssimato) la legge di gruppo; a tale scopo ricordiamo che, dato un gruppo di Lie, se x ed y sono due suoi elementi, nell'intorno del suo elemento neutro e risulta [3]:

$$(3.8)\quad (x\cdot y)_i = x_i+y_i + \frac{1}{2}\, C_i^{j\kappa}\quad x_j\ y_\kappa + 0(x,y)+ \dots$$

in questo caso risulta, come abbiamo già visto, che le $C_i^{j\kappa}$ sono proprio le quantità $a_i^{j\kappa}$ per cui, ponendo $P_0 = (0,0,\dots,0) = (\omega^1_o , \omega^2_o , \dots , \omega^n_o)$ e considerando due elementi di $\Phi^1(\omega)$:

$$P^1(\omega) = a^1{}_i\ \omega^i \qquad\qquad P^2(\omega) = a^2{}_i\ \omega^i$$

si ha:

$$\exp\left[P^1(\omega)\right] = (a^1{}_1, \ldots, a^1{}_n) \;;\; \exp\left[P^2(\omega)\right] = (a^2{}_1, \ldots, a^2{}_n)$$

e quindi, per la (3.8), indicando con g^1 e g^2 gli elementi del gruppo:

$$(g^1 \cdot g^2)_r = \left(\exp\left[P^1(\omega)\right] \cdot \exp\left[P_2(\omega)\right]\right)_r = a^1{}_r + a^2{}_r + \frac{1}{2}\, a^{jk}{}_r\, a^1{}_j a^2{}_k + 0(g^1, g^2) + \ldots$$

N.4 Il gruppo $\Phi^2(\omega)$ delle forme quadratiche omogenee.

Sia $\Phi^2(\omega)$ l'insieme dei polinomi della forma:

$$(4.1)\qquad Q(\omega) = a_{ij}\omega^i\omega^j \;; \quad (a_{ij}\in \mathbb{R}\,\forall^i{}_j = 1, \dots, n);$$

sia inoltre $\eta = (\eta^{\alpha\beta})$ una matrice antisimmetrica di ordine n ed a coefficienti costanti(*).

Considerati due polinomi di $\Phi^2(\omega)$,

$$Q_1(\omega) = a_{ij}\omega^i\omega^j \qquad Q_2(\omega) = b_{ij}\omega^i\omega^j$$

la P.P.G. di $Q_1(\omega)$ e $Q_2(\omega)$ definita dalla matrice η è della forma:

$$(4.2)\qquad (Q_1,Q_2)^*(\omega) = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial Q_1}{\partial\omega^\alpha}\frac{\partial Q_2}{\partial\omega^\beta} = \eta^{\alpha\beta}(2a_{\alpha j}\omega^j)(2b_{\beta\kappa}\omega^\kappa) =$$

$$= 4\eta^{\alpha\beta}a_{\alpha j}b_{\beta\kappa}\omega^j\omega^\kappa.$$

Lo spazio vettoriale reale $\Phi^2(\omega)$, munito dell'operazione interna P.P.G. definita da (4.2) risulta essere un'algebra di Lie su $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} = \mathbb{R}^p$

e quindi, ragionando come al N.3, ogni elemento di $\Phi^2(\omega)$ del tipo

$$Q(\omega) = a_{ij}\omega^i\omega^j$$

si può identificare con un opportuno campo vettoriale su $\mathbb{R}^p$

$$(4.3)\qquad Y(\omega) = a_{ij}\frac{\partial}{\partial\omega^{ij}}$$

le cui curve integrali sono delle rette aventi come curve coordinate le funzioni di primo grado in t :

$$(4.4)\qquad \omega^{ij} = a_{ij}t + \omega_0^{ij}$$

(*) La (2.1) in questo caso è banalmente verificata.

per cui gli elementi del gruppo di Lie associato a $\Phi^2(\omega)$ e con elemento neutro $P_0(\omega_0^{11}, \ldots, \omega_0^{nm})$ sono le p - uple del tipo:

$(a_{11}+\omega_0^{11}, \ldots, a_{nn}+\omega_0^{nn})$.

Assumendo poi al solito $P_0 = (0,\ldots,0)$ e ricavando le costanti di struttura tramite le P.P.G. si ha:

$$(4.5)\quad (\omega^i\omega^j, \omega^k\omega^\ell) = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial(\omega^i\omega^j)}{\partial\omega^\alpha}\frac{\partial(\omega^\kappa\omega^\ell)}{\partial\omega^\beta} = \eta^{\alpha\beta}(\delta^i{}_\alpha\omega^j+\omega^i\delta^j{}_\alpha)(\delta^\kappa{}_\beta\omega^\ell+\omega^\kappa\delta^\ell{}_\beta) =$$

$$= \eta^{i\kappa}\omega^j\omega^\ell+\eta^{i\ell}\omega^i\omega^\kappa+\eta^{j\kappa}\omega^i\omega^\ell+\eta^{j\ell}\omega^i\omega^\kappa$$

cioè:

$$C_{ik}^{[ij],[k\ell]} = \eta^{j\ell}; \qquad C_{rs}^{[ij],[k\ell]} = 0_{\substack{\forall r\notin\{i,j\}\\ \forall s\notin\{k,\ell\}}}$$

si ricava la legge di gruppo.

Presi: $Q_1(\omega) = a_{ij}\omega^i\omega^j$

$Q_2(\omega) = b_{ij}\omega^i\omega^j$

risulta:

$$g^1 = \exp\left[Q_1(\omega)\right] = (a_{11},\ldots,a_{nm})$$
$$g^2 = \exp\left[Q_2(\omega)\right] = (b_{11},\ldots,b_{nn})$$

e quindi

$$(4.7)\quad (g^1\cdot g^2)_{rs} = a_{rs}+b_{rs}+\frac{1}{2}\Big[C_{rs}^{[rj],[s\ell]}a_{rj}b_{s\ell} + C_{rs}^{[ir],[ks]}a_{ir}b_{ks}+$$

$$+ C_{rs}^{[rj],[ks]}a_{rj}b_{ks}+ C_{rs}^{[ir],[s\ell]}a_{ir}b_{s\ell}+ C_{rs}^{[sj],[r\ell]}a_{sj}b_{r\ell}+$$

$$+ C_{rs}^{[is],[kr]}a_{is}b_{kr} + C_{rs}^{[sj],[kr]}a_{sj}b_{kr} + C_{rs}^{[is],[r\ell]}a_{is}b_{r\ell}\Big] + \ldots =$$

$$= a_{rs}+b_{rs}+\frac{1}{2}\Big[\eta^{j\ell}a_{rj}b_{s\ell}+\eta^{ik}a_{ir}b_{ks}+\eta^{jk}a_{rj}b_{ks}+\eta^{i\ell}a_{ir}b_{s\ell}+$$

$$+\eta^{j\ell}a_{sj}b_{r\ell}+\eta^{ik}a_{is}b_{kr}+\eta^{jk}a_{sj}b_{kr}+\eta^{i\ell}a_{is}b_{r\ell}\Big]+\ldots=$$

$$= a_{rs}+b_{rs}+\frac{1}{2}\Big[\eta^{j\ell}(a_{rj}b_{s\ell}+a_{sj}b_{r\ell})+\eta^{ik}(a_{ir}b_{ks}+a_{is}b_{kr})+\eta^{jk}(a_{rj}b_{ks}+a_{rj}b_{kr})+$$

$$+\eta^{i\ell}(a_{ir}b_{s\ell}+a_{is}b_{r\ell})\Big]+\ldots$$

N.5 Il gruppo $\left[P_2(\omega)\right]$ dei polinomi di grado ≤ 2.

Consideriamo l'insieme $\left[P_2(\omega)\right]$ dei polinomi di $\omega^1,\dots,\omega^n$ aventi grado minore o uguale a 2, ed una matrice $\eta = (\eta^{\alpha\beta})$ dello stesso tipo considerato al N.4, cioè a coefficienti costanti.

Presi ad arbutrio due elementi di $\left[P_2(\omega)\right]$

$$P^1(\omega) = a^1{}_{ij}\omega^i\omega^j + b^1{}_k\omega^k + c^1$$

$$P^2(\omega) = a^2{}_{ij}\omega^i\omega^j + b^2{}_k\omega^k + c^2$$

allora la P.P.G. definita dalla matrice η è della forma:

$$(5.1)\quad (P^1,P^2)^*(\omega) = \eta^{\alpha\beta}(2a^1{}_{\alpha j}\omega^j + b^1{}_\alpha)(2a^2{}_{\beta\ell}\omega^\ell + b^2{}_\beta) =$$

$$= 4\eta^{\alpha\beta}a^1{}_{\alpha j}\omega^j a^2{}_{\beta\ell}\omega^\ell + 2\eta^{\alpha\beta}a^1{}_{\alpha j}\omega^j + 2\eta^{\alpha\beta}a^2{}_{\alpha\ell}\omega^\ell + \eta^{\alpha\beta}b^1{}_\alpha b^2{}_\beta =$$

$$= 4\eta^{\alpha\beta}a^1{}_{\alpha j}a^2{}_{\beta\ell}\omega^j\omega^\ell + 2\eta^{\alpha\beta}(a^1{}_{\alpha j} + a^2{}_{\alpha j})\,\omega^j + \eta^{\alpha\beta}b^1{}_\alpha b^2{}_\beta$$

Lo spazio vettoriale $P_2(\omega)$, munito della legge di composizione interna definita da (5.1) risulta essere un gruppo di polinomi, quindi un'algebra di Lie su $\mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n+1)}{c}} = \mathbb{R}^q$ per cui, identificando i polinomi:

$$1, \omega^1, \dots, \omega^n, \omega^{11}, \dots, \omega^{nn}$$

con i campi vettoriali

$$\frac{\partial}{\partial\omega^o}, \frac{\partial}{\partial\omega^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\omega^n}, \frac{\partial}{\partial\omega^{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial\omega^{nn}}$$

ogni polinomio

$$P(\omega) = a_{ij}\omega^i\omega^j + b_k\omega^k + c$$

si può identificare col campo vettoriale su $\mathbb{R}^q$:

$$(5.2)\quad Z(\omega) = a_{ij}\frac{\partial}{\partial\omega^{ij}} + b_k\frac{\partial}{\partial\omega^k} + c\frac{\partial}{\partial\omega^0}$$

di conseguenza gli elementi del gruppo di Lie associato a $\left[P_2(\omega)\right]$ ed avente elemento neutro $Z_\wedge(\omega_0{}^0, \omega_0{}^1, \dots \omega_0{}^{nn})$ è l'insieme delle q - uple del tipo:

(5.3) $(c+\omega_0{}^0, b_1+\omega_0{}^1, \dots, b_n+\omega_0{}^n, a_{11}+\omega_0{}^{11}, \dots, a_{nn}+\omega_0{}^{nn})$

Ricaviamo ora le costanti di strutture; si ha:

$$(\omega^0,\omega^0)^* = 0 \Longrightarrow C^{00}{}_i = 0 \ \forall_i = 1,\dots,n$$

$$(\omega^0,\omega^i)^* = 0 \forall i = 1,\dots,n \Longrightarrow C^{0i}{}_j = 0 \ \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$$

$$(\omega^0,\omega^{jk})^* = 0 \forall j,k \in \{1,\dots,n\} \Longrightarrow C^0_\ell{}^{,[jk]} = 0 \ \forall i,j,k \in \{1,\dots,n\}$$

$$(\omega^i,\omega^j)^* = \eta^{\alpha\beta}\delta^j{}_\alpha\delta^j{}_\beta = \eta^{ij} \Longrightarrow C^{ij}{}_0 = \eta^{ij};\ C^{ij}{}_k = 0 \ \forall\ k \in \{1,\dots,n\}$$

$$(\omega^i,\omega^\kappa\omega^\ell)^* = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\omega^i}{\partial\omega^\alpha}\ \frac{\partial(\omega^\kappa\omega^\ell)}{\partial\omega^\beta} = \eta^{\alpha\beta}\delta^i{}_\alpha(\delta^\kappa{}_\beta\omega^\ell+\omega^\kappa\delta^\ell{}_\beta) =$$

$$= \eta^{i\beta}\delta^\kappa{}_\beta\omega^\ell+\eta^{i\beta}\delta^\ell{}_\beta\omega^\kappa = \eta^{i\kappa}\omega^\ell+\eta^{i\ell}\omega^\kappa$$

per cui si ha:

$$C^i_0{}^{[k\ell]} = 0;\ C^{i}_k{}^{,[k\ell]} = \eta^{i\ell};\ C^{i}_e{}^{,[k\ell]} = \eta^{ik};\ C^{i}_r{}^{;[k,\ell]} = 0\ \forall r \in \{k,\ell\}$$

infine, in base alla (4.5), si ha:

$$C^{[ij],[k\ell]}_{ik} = \eta^{j\ell}$$

Esplicitiamo ora la legge di gruppo per le q - uple del tipo (5.3) assumendo $Z_0 = (0,\dots,0)$ per comodità di notazione; intanto risulta, se $P^1(\omega)$ e $P^2(\omega)$ sono due elementi di $\left[P_2(\omega)\right]$,:

$$g^1 = \exp\left[P^1(\omega)\right] = (c^1, b_1{}^1, \dots, b^1{}_n, a^1{}_{11}, \dots, a^1{}_{nn})$$

$$g^2 = \exp\left[P^2(\omega)\right] = (c^2, b^2{}_1, \dots, b^2{}_n, a^2{}_{11}, \dots, a^2{}_{nn})$$

Inoltre è:

(5.5) $(g^1\cdot g^2)_0 = c^1+c^2+\frac{1}{2}\,c^{ij}_0\,a^1{}_ib^2{}_j+\dots = c^1+c^2+\frac{1}{2}\,\eta^{ij}a^1{}_ib^2{}_j;$

5.6) $$(g^1 \cdot g^2)_r = b^1{}_r + b^2{}_r + \frac{1}{2}\left[c^{i,[r\ell]}_{r} b^1{}_i a^2{}_{r\ell} + c^{i,[kr]}_{r} b^1{}_i a^2{}_{kr}\right] + \ldots =$$

$$= b^1{}_r + b^2{}_r + \frac{1}{2}\left[\eta^{i\ell} b^1{}_i a^2{}_{r\ell} + \eta^{ik}\, b^1{}_i a^2{}_{kr}\right] + \ldots ;$$

5.7) $$(g^1 \cdot g^2)_{rs} = a^1{}_{rs} + a^2{}_{rs} + \frac{1}{2}\Big[\eta^{j\ell}(a^1{}_{rj} a^2{}_{s\ell} + a^1{}_{sj} a^2{}_{r\ell}) +$$

$$+ \eta^{ik}(a^1{}_{ir} a^2{}_{ks} + a^1{}_{is} a^2{}_{kr}) + \eta^{jk}(a^1{}_{rj} a^2{}_{ks} + a^1{}_{sj} a^2{}_{kr}) + \eta^{j\ell}(a^1{}_{ir} a^2{}_{s\ell} + a^1{}_{is} a^2{}_{rs})\Big] + .$$