PARTE I
GRUPPI DI POLINOMI

N.1 Introduzione

La teoria classica dei gruppi di Lie e soprattutto delle algebre di Lie trova ampia applicazione nello studio dei sistemi canonici, nel senso che gli integrali primi di un sistema canonico costituiscono un'algebra di Lie che con terminologia classica è detta "Gruppo di funzioni"[2].

La nozione di gruppo di funzioni è stata generalizzata nell'ambito della teoria delle trasformazioni canoniche [1], per poi essere da me riguardata ed ulteriormente generalizzata da un punto di vista algebrico [4] e [5].

In questa prima parte del lavoro vengono definiti i gruppi di polinomi algebrici, i quali non sono dei gruppi di funzioni nel senso classico del termine, ma che, come tutti i gruppi di funzioni (generalizzati o no, singolari o no) sono algebre di Lie, di cui è stato in qualche caso determinato il gruppo di Lie.

N.2 Gruppi di Polinomi

Consideriamo una matrice ad n righe e ad n colonne, antisimmetrica, i cui coefficienti siano dei polinomi algebrici

$$\mathbf{q}^{\alpha\beta}(\omega) = \mathbf{q}^{\alpha\beta}(\omega_1,\omega_2, \dots,\omega_n)$$

di n variabili reali $\omega_1, \dots, \omega_n$; ciascuno di grado arbitrario e soddisfacenti la relazione:

$$(2.1) \qquad \mathbf{q}^{\lambda\mu} \frac{\partial \mathbf{q}^{\nu\rho}}{\partial\omega^{\mu}} + \mathbf{q}^{\nu\mu} \frac{\partial \mathbf{q}^{\rho\lambda}}{\partial\omega^{\nu}} + \mathbf{q}^{\rho\mu} \frac{\partial \mathbf{q}^{\lambda\nu}}{\partial\omega^{\mu}} = 0 .$$

Presi ad arbitrio due polinomi $P_1(\omega)$ e $P_2(\omega)$,
si può allora definire la Parentesi di Poisson Generalizzata (P.P.G.) al modo usuale [6] :

$$(2.2) \qquad (P_1, P_2)^{*}(\omega) = \mathbf{q}^{\alpha\beta}(\omega) \frac{\partial P_1(\omega)}{\partial\omega^{\alpha}} \quad \frac{\partial P_2(\omega)}{\partial\omega^{\rho}} ;$$

com'è noto detta operazione fra polinomi è anticommutativa, bilineare e soddisfa l'identità di Jacobi:

(2.3) $\quad ((P_1, P_2)^*, P_3)^*(\omega) + ((P_2, P_3)^*, P_1)^*(\omega) + ((P_3, P_1)^*, P_3)^*(\omega) = 0$

Consideriamo ora r polinomi $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$, ..., $P_r(\omega)$;a partire da essi costruiamo un insieme di polinomi $\Phi(\omega)$ ottenuto aggiungendo ad essi le $r(r-1)/2$ P.P.G. che si possono formare con essi e continuando il procedimento all'infinito; considerando poi lo spazio vettoriale $G(\omega)$ generato da $\Phi(\omega)$, esso risulterà senz'altro chiuso rispetto alla P.P.G.; $G(\omega)$ lo chiamiamo gruppo di polinomi generato da $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$, ..., $P_r(\omega)$.
E' evidente che, se invece di partire dai polinomi $P_1(\omega)$, ..., $P_r(\omega)$, noi partiamo direttamente dall'insieme $P(\omega)$ di tutti i polinomi di ω_1, ..., ω_n e lo muniamo dell'operazione interna P.P.G. definita dalla matrice

$(q^{\alpha\beta}(\omega))$ di cui sopra, otteniamo ancora un gruppo di polinomi. Ora, sia nel primo caso sia nel secondo ci si trova di fronte ad algebre di Lie, ed ha senso quindi cercare di determinare il relativo gruppo di Lie; purtroppo ciò non è affatto agevole, almeno in generale.

Infatti, se $P_1(\omega)$ e $P_2(\omega)$ sono due polinomi di grado m e t rispettivamente e se il grado massimo assunto dalle $q^{\alpha\beta}(\omega)$ è p allora il grado di $(P_1,P_2)^*(\omega)$ può arrivare ad essere

(2.4) $\quad (m - 1)+(t - 1) + p = m + t + p - 2;$

ciò mostra che in generale un gruppo di polinomi ha dimensione infinita.

Se invece supponiamo che:

$m = t = p = 1 \quad$ oppure $\quad m = t = 2, p = 0$

allora accade che il polinomio $(P_1,P_2)^*(\omega)$ ha lo stesso grado di $P_1(\omega)$ e di $P_2(\omega)$, com'è facile dedurre dalla (2.4).

In altri termini se consideriamo l'insieme $\Phi^1(\omega)$ dei polinomi delle ω_1, ...,ω_n omogenei di primo grado con la P.P.G. definita da una matrice

$(q^{\alpha\beta}(\omega))$ i cui elementi siano ancora elementi di$\Phi^1(\omega)$, oppure se consideria̲mo l'insieme $\Phi^2(\omega)$ delle forme quadratiche omogenee di ω_1, ..., ω_n con la P.P.G. definita da una matrice $(q^{\alpha\beta}(\omega))$ i cui elementi siano dei polinomi costanti, allora otteniamo due gruppi di polinomi di grado 1 e 2, rispettivamente.

Nel caso di$\Phi^1(\omega)$ abbiamo a che fare con un'algebra di Lie n - dimensionale, nel caso di $\Phi^2(\omega)$ con un algebra di dimensione $n(n+1)/2$.

Strettamente legato ai due gruppi $\Phi^1(\omega)$ e $\Phi^2(\omega)$ è poi il gruppo $\left[P_2(\omega)\right]$ dei polinomi di ω_1, ...,ω_n di grado minore o uguale a 2, e con la P.P.G.

definita da una matrice ($q^{\alpha\beta}(\omega)$) costante; in tal caso si ha un'algebra

$\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right]$ – dimensionale.

N.3 Il gruppo $\Phi^1(\omega)$ dei polinomi lineari omogenei.

Consideriamo l'insieme $\Phi^1(\omega)$ dei polinomi di $\omega^1, \ldots, \omega^n$ della forma:

$$P(\omega) = a_1\omega^1 + \ldots + a_n\omega^n = a_i\omega^i, \text{ con } a_i \in \mathbb{R}^n \forall i = 1 \ldots n$$

ed una matrice $(q^{\alpha\beta}(\omega))$ antisimmetrica di ordine n i cui elementi $q^{\alpha\beta}$ siano anche degli elementi di $\Phi^1(\omega)$, cioè nella forma:

$$q^{\alpha\beta}(\omega) = a^{\alpha\beta}_i \omega^i$$

e tali da verificare la (2.1), che in questo caso si può scrivere:

$$(3.1) \qquad q^{\alpha\kappa}(\omega)\, a^{ij}_{\alpha} + q^{\alpha i}(\omega)\, a^{j\kappa}_{\alpha} + q^{\alpha j}(\omega)\, a^{\kappa i}_{\alpha} = 0$$

tenuto conto del fatto che:

$$\frac{\partial q^{ij}(\omega)}{\partial \omega^\kappa} = a^{ij}_{\kappa}$$

Presi ad arbitrio due elementi di $\Phi^1(\omega)$, siano

$$P^1(\omega) = a^1_i\omega^i, \quad P^2(\omega) = a^2_i\omega^i$$

risulta:

$$(3.2) \quad (P^1, P^2)^*(\omega) = q^{\alpha\beta}(\omega) \frac{\partial P^1}{\partial \omega^\alpha} \frac{\partial P^2}{\partial \omega^\beta} = q^{\alpha\beta}(\omega)\, a^1_{\alpha} a^2_{\beta} \; ;$$

con la P.P.G. definita da (3.2) l'insieme $\Phi^1(\omega)$, che è uno spazio vettoriale reale di dimensione n, e la cui base canonica è senz'altro la n - upla di polinomi $\omega^1, \ldots, \omega^n$, è anche un'algebra di Lie. Osserviamo ora che ad ogni elemento di $\Phi^1(\omega)$, avente per componenti $(a_1, \ldots, a_n)$ nella base $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$, si può associare biunivocamente il seguente campo di vettori $\mathbb{R}^n$, munito dell' usuale struttura di varietà differenziabile:

$$(3.3) \qquad X(\omega) = a_1 \frac{\partial}{\partial \omega^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial \omega^2} + \ldots a_n \frac{\partial}{\partial \omega^n}$$

le cui curve integrali sono le soluzioni del sistema differenziale:

$$(3.4)\begin{cases} \dot{\omega}^1 = a_1 \\ \dot{\omega}^2 = a_2 \\ \dot{\omega}^n = a_n \end{cases}$$

che sono delle rette in quanto hanno come curve coordinate le seguenti funzioni di primo grado in t:

$$(3.5)\begin{cases} \omega^1 \doteq a_1 t + \omega^1{}_o \\ \omega^2 = a_2 t + \omega^2{}_o \\ \omega^n = a_n t + \omega^n{}_o \end{cases}$$

ciò comporta che generando i vettori $\frac{\partial}{\partial\omega^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\omega^n}$ dei gruppi globali ad un parametro di diffeomorfismi su $\mathbb{R}^n$, essi sono completi; inoltre, se consideriamo le seguenti P.P.G.:

$$(3.6)\quad (\omega^j,\omega^\kappa)^* = q^{\alpha\beta}(\omega)\cdot\delta^j{}_\alpha\ \delta^\kappa{}_\beta = q^{j\kappa}(\omega) = a^{j\kappa}{}_\ell\ \omega^\ell$$

si vede che i coefficienti di tale polinomio lineare sono costanti. Tutto ciò comporta che [7], per ogni punto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ esiste su $\mathbb{R}^n$ un'unica struttura di gruppo di Lie rispetto alla quale P_0 è elemento neutro ed il sistema

$\left(\frac{\partial}{\partial\omega^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\omega^n} \right)$ è base per l'algebra di Lie associata e munita della P.P.G. definita da (3.2).

Ricaviamo ora (in modo approssimato) la legge di gruppo; a tale scopo ricordiamo che, dato un gruppo di Lie, se x ed y sono due suoi elementi, nell'intorno del suo elemento neutro e risulta [3]:

$$(3.8)\quad (x\cdot y)_i = x_i + y_i + \frac{1}{2} C_i^{j\kappa}\ x_j\ y_\kappa + 0(x,y) + \ldots$$

in questo caso risulta, come abbiamo già visto, che le $C_i^{j\kappa}$ sono proprio le quantità $a_i^{j\kappa}$ per cui, ponendo $P_0 = (0,0,\ldots,0) = (\omega^1_o, \omega^2_o, \ldots, \omega^n_o)$ e considerando due elementi di $\Phi^1(\omega)$:

$$P^1(\omega) = a^1{}_i\ \omega^i \qquad\qquad P^2(\omega) = a^2{}_i\ \omega^i$$

si ha:

$$\exp\left[P^1(\omega)\right] = (a^1{}_1, \ldots, a^1{}_n) \; ; \; \exp\left[P^2(\omega)\right] = (a^2{}_1,\ldots,a^2{}_n)$$

e quindi, per la (3.8), indicando con g^1 e g^2 gli elementi del gruppo:

$$(g^1\cdot g^2)_r = (\exp\left[P^1(\omega)\right] \cdot \exp\left[P_2(\omega)\right])_r = a^1{}_r+a^2{}_r+\frac{1}{2}\, a^{jk}{}_r\, a^1{}_j a^2{}_k +0(g^1,g^2)+\ldots$$

N.4 Il gruppo $\Phi^2(\omega)$ delle forme quadratiche omogenee.

Sia $\Phi^2(\omega)$ l'insieme dei polinomi della forma:

$$(4.1)\qquad Q(\omega) = a_{ij}\omega^i\omega^j \ ; \quad (a_{ij}\in \mathbb{R} \forall^i{}_j = 1, \dots, n);$$

sia inoltre $\eta = (\eta^{\alpha\beta})$ una matrice antisimmetrica di ordine n ed a coefficienti costanti(*).

Considerati due polinomi di $\Phi^2(\omega)$,

$$Q_1(\omega) = a_{ij}\omega^i\omega^j \qquad Q_2(\omega) = b_{ij}\omega^i\omega^j$$

la P.P.G. di $Q_1(\omega)$ e $Q_2(\omega)$ definita dalla matrice η è della forma:

$$(4.2)\qquad (Q_1,Q_2)^*(\omega) = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial Q_1}{\partial\omega^\alpha}\frac{\partial Q_2}{\partial\omega^\beta} = \eta^{\alpha\beta}(2a_{\alpha j}\omega^j)(2b_{\beta\kappa}\omega^\kappa) =$$

$$= 4\eta^{\alpha\beta}a_{\alpha j}b_{\beta\kappa}\omega^j\omega^\kappa.$$

Lo spazio vettoriale reale $\Phi^2(\omega)$, munito dell'operazione interna P.P.G. definita da (4.2) risulta essere un'algebra di Lie su $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} = \mathbb{R}^p$

e quindi, ragionando come al N.3, ogni elemento di $\Phi^2(\omega)$ del tipo

$$Q(\omega) = a_{ij}\omega^i\omega^j$$

si può identificare con un opportuno campo vettoriale su $\mathbb{R}^p$

$$(4.3)\qquad Y(\omega) = a_{ij}\frac{\partial}{\partial\omega^{ij}}$$

le cui curve integrali sono delle rette aventi come curve coordinate le funzioni di primo grado in t :

$$(4.4)\qquad \omega^{ij} = a_{ij}t + \omega_0^{ij}$$

(*) La (2.1) in questo caso è banalmente verificata.

per cui gli elementi del gruppo di Lie associato a $\Phi^2(\omega)$ e con elemento neutro

$P_0(\omega_0^{11}, \ldots, \omega_0^{nm})$ sono le p - uple del tipo:

$(a_{11}+\omega_0^{11}, \ldots, a_{nn}+\omega_0^{nn})$.

Assumendo poi al solito $P_0 = (0,\ldots,0)$ e ricavando le costanti di struttura tramite le P.P.G. si ha:

$$(4.5) \quad (\omega^i\omega^j, \omega^k\omega^\ell) = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial(\omega^i\omega^j)}{\partial\omega^\alpha}\ \frac{\partial(\omega^\kappa\omega^\ell)}{\partial\omega^\beta} = \eta^{\alpha\beta}(\delta^i{}_\alpha\omega^j+\omega^i\delta^j{}_\alpha)(\delta^\kappa{}_\beta\omega^\ell+\omega^\kappa\delta^\ell{}_\beta) =$$

$$= \eta^{i\kappa}\omega^j\omega^\ell+\eta^{i\ell}\omega^i\omega^\kappa+\eta^{j\kappa}\omega^i\omega^\ell+\eta^{j\ell}\omega^i\omega^\kappa$$

cioè:

$$C_{ik}^{[ij],[k\ell]} = \eta^{j\ell}; \qquad C_{rs}^{[ij],[k\ell]} = 0 \begin{smallmatrix}\forall r\notin\{i,j\}\\ \forall s\notin\{k,\ell\}\end{smallmatrix}$$

si ricava la legge di gruppo.

Presi: $Q_1(\omega) = a_{ij}\omega^i\omega^j$

$Q_2(\omega) = b_{ij}\omega^i\omega^j$

risulta:

$$g^1 = \exp\left[Q_1(\omega)\right] = (a_{11},\ldots,a_{nm})$$
$$g^2 = \exp\left[Q_2(\omega)\right] = (b_{11},\ldots,b_{nn})$$

e quindi

$$(4.7) \quad (g^1\cdot g^2)_{rs} = a_{rs}+b_{rs}+\frac{1}{2}\Big[C_{rs}^{[rj],[s\ell]}a_{rj}b_{s\ell} + C_{rs}^{[ir],[ks]}a_{ir}b_{ks}+$$

$$+ C_{rs}^{[rj],[ks]}a_{rj}b_{ks}+ C_{rs}^{[ir],[s\ell]}a_{ir}b_{s\ell}+ C_{rs}^{[sj][r\ell]}a_{sj}b_{r\ell}+$$

$$+ C_{rs}^{[is],[kr]}a_{is}b_{kr} + C_{rs}^{[sj],[kr]}a_{sj}b_{kr} + C_{rs}^{[is],[r\ell]}a_{is}b_{r\ell}\Big] + \ldots =$$

$$= a_{rs}+b_{rs}+\frac{1}{2}\Big[\eta^{j\ell}a_{rj}b_{s\ell}+ \quad \eta^{ik}a_{ir}b_{ks}+\eta^{jk}a_{rj}b_{ks}+\eta^{i\ell}a_{ir}b_{s\ell}+$$

$$+\eta^{j\ell}a_{sj}b_{r\ell}+\eta^{ik}a_{is}b_{kr}+\eta^{jk}a_{sj}b_{kr}+\eta^{i\ell}a_{is}b_{r\ell}\Big]+\dots=$$

$$= a_{rs}+b_{rs}+\frac{1}{2}\Big[\eta^{j\ell}(a_{rj}b_{s\ell}+a_{sj}b_{r\ell})+\eta^{ik}(a_{ir}b_{ks}+a_{is}b_{kr})+\eta^{jk}(a_{rj}b_{ks}+a_{rj}b_{kr})+$$

$$+\eta^{i\ell}(a_{ir}b_{s\ell}+a_{is}b_{r\ell})\Big]+\dots$$

N.5 Il gruppo $\left[P_2(\omega)\right]$ dei polinomi di grado ≤ 2.

Consideriamo l'insieme $\left[P_2(\omega)\right]$ dei polinomi di $\omega^1,\ldots,\omega^n$ aventi grado minore o uguale a 2, ed una matrice $\eta=(\eta^{\alpha\beta})$ dello stesso tipo considerato al N.4, cioè a coefficienti costanti.

Presi ad arbutrio due elementi di $\left[P_2(\omega)\right]$

$$P^1(\omega) = a^1{}_{ij}\omega^i\omega^j+b^1{}_k\omega^k+c^1$$

$$P^2(\omega) = a^2{}_{ij}\omega^i\omega^j+b^2{}_k\omega^k+c^2$$

allora la P.P.G. definita dalla matrice η è della forma:

$$(5.1)\quad (P^1,P^2)^*(\omega) = \eta^{\alpha\beta}(2a^1{}_{\alpha j}\omega^j+b^1{}_\alpha)(2a^2{}_{\beta\ell}\omega^\ell+b^2{}_\beta) =$$

$$= 4\eta^{\alpha\beta}a^1{}_{\alpha j}\omega^j a^2{}_{\beta\ell}\omega^\ell+ 2\eta^{\alpha\beta}a^1{}_{\alpha j}\omega^j+ 2\eta^{\alpha\beta}a^2{}_{\alpha\ell}\omega^\ell+\eta^{\alpha\beta}b^1{}_\alpha b^2{}_\beta=$$

$$= 4\eta^{\alpha\beta}a^1{}_{\alpha j}a^2{}_{\beta\ell}\omega^j\omega^\ell+2\eta^{\alpha\beta}(a^1{}_{\alpha j}+a^2{}_{\alpha j})\,\omega^j+\eta^{\alpha\beta}b^1{}_\alpha b^2{}_\beta$$

Lo spazio vettoriale $P_2(\omega)$, munito della legge di composizione interna definita da (5.1) risulta essere un gruppo di polinomi, quindi un'algebra di Lie su $\mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n+1)}{c}} = \mathbb{R}^q$ per cui, identificando i polinomi:

$$1,\omega^1,\ldots,\omega^n,\omega^{11},\ldots,\omega^{nn}$$

con i campi vettoriali

$$\frac{\partial}{\partial\omega^o},\ \frac{\partial}{\partial\omega^1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial\omega^n},\ \frac{\partial}{\partial\omega^{11}},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial\omega^{nn}}$$

ogni polinomio

$$P(\omega) = a_{ij}\omega^i\omega^j + b_k\omega^k+ c$$

si può identificare col campo vettoriale su $\mathbb{R}^q$:

$$(5.2)\quad Z(\omega) = a_{ij}\frac{\partial}{\partial\omega^{ij}} + b_k\frac{\partial}{\partial\omega^k} + c\frac{\partial}{\partial\omega^0}$$

di conseguenza gli elementi del gruppo di Lie associato a $\left[P_2(\omega)\right]$ ed avente elemento neutro $Z_{\wedge}(\omega_0{}^o,\omega_0{}^1,\ldots,\omega_0{}^{nn})$ è l'insieme delle q - uple del tipo:

(5.3) $(c+\omega_0{}^o, b_1+\omega_0{}^1, \ldots, b_n+\omega_0{}^n, a_{11}+\omega_0{}^{11}, \ldots, a_{nn}+\omega_0{}^{nn})$

Ricaviamo ora le costanti di strutture; si ha:

$$(\omega^o,\omega^o)^* = 0 \Longrightarrow C^{oo}{}_i = 0 \ \forall_i = 1,\ldots,n$$

$$(\omega^o,\omega^i)^* = 0 \forall i = 1,\ldots,n \Longrightarrow C^{oi}{}_j = 0 \ \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$$

$$(\omega^o,\omega^{jk})^* = 0 \forall j,k \in \{1,\ldots,n\} \Longrightarrow C^{o}_{\ell}{}^{,[jk]} = 0 \ \forall i,j,k \in \{1,\ldots,n\}$$

$$(\omega^i,\omega^j)^* = \eta^{\alpha\beta}\delta^j{}_\alpha\delta^j{}_\beta = \eta^{ij} \Longrightarrow C^{ij}{}_o = \eta^{ij};\ C^{ij}{}_k = 0 \ \forall\ k \in \{1,\ldots,n\}$$

$$(\omega^i,\omega^\kappa\omega^\ell)^* = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\omega^i}{\partial\omega^\alpha}\ \frac{\partial(\omega^\kappa\omega^\ell)}{\partial\omega^\beta} = \eta^{\alpha\beta}\delta^i{}_\alpha(\delta^\kappa{}_\beta\omega^\ell+\omega^\kappa\delta^\ell{}_\beta) =$$

$$= \eta^{i\beta}\delta^\kappa{}_\beta\omega^\ell+\eta^{i\beta}\delta^\ell{}_\beta\omega^\kappa = \eta^{i\kappa}\omega^\ell+\eta^{i\ell}\omega^\kappa$$

per cui si ha:

$$C_o^{i[k\ell]} = 0;\ C_k^{i,[k\ell]} = \eta^{i\ell};\ C_e^{i,[k\ell]} = \eta^{ik};\ C_r^{i;[k,\ell]} = 0 \ \forall r \in \{k,\ell\}$$

infine, in base alla (4.5), si ha:

$$C^{[ij],[k\ell]}_{ik} = \eta^{j\ell}$$

Esplicitiamo ora la legge di gruppo per le q - uple del tipo (5.3) assumendo $Z_0 = (0,\ldots,0)$ per comodità di notazione; intanto risulta, se $P^1(\omega)$ e $P^2(\omega)$ sono due elementi di $\left[P_2(\omega)\right]$,:

$$g^1 = \exp\left[P^1(\omega)\right] = (c^1,b_1{}^1,\ldots,b^1{}_n,a^1{}_{11},\ldots,a^1{}_{nn})$$
$$g^2 = \exp\left[P^2(\omega)\right] = (c^2,b^2{}_1,\ldots,b^2{}_n,a^2{}_{11},\ldots,a^2{}_{nn})$$

Inoltre è:

(5.5) $(g^1\cdot g^2)_o = c^1+c^2+\frac{1}{2}C_o^{ij}a^1{}_ib^2{}_j+\ldots = c^1+c^2+\frac{1}{2}\eta^{ij}a^1{}_ib^2{}_j;$

$$5.6)\quad (g^1\cdot g^2)_r = b^1{}_r + b^2{}_r + \frac{1}{2}\left[c^{i,[r\ell]}_{r}b^1{}_i a^2{}_{r\ell} + c^{i,[kr]}_{r}b^1{}_i a^2{}_{kr}\right] + \dots =$$

$$= b^1{}_r + b^2{}_r + \frac{1}{2}\left[\eta^{i\ell}b^1{}_i a^2{}_{r\ell} + \eta^{ik}\, b^1{}_i a^2{}_{kr}\right] + \dots;$$

$$5.7)\quad (g^1\cdot g^2)_{rs} = a^1{}_{rs} + a^2{}_{rs} + \frac{1}{2}\Big[\ \eta^{j\ell}(a^1{}_{rj}a^2{}_{s\ell} + a^1{}_{sj}a^2{}_{r\ell}) +$$

$$+ \eta^{ik}(a^1{}_{ir}a^2{}_{ks} + a^1{}_{is}a^2{}_{kr}) + \eta^{jk}(a^1{}_{rj}a^2{}_{ks} + a^1{}_{sj}a^2{}_{kr}) + \eta^{j\ell}(a^1{}_{ir}a^2{}_{s\ell} + a^1{}_{is}a^2{}_{rs})\Big] + .$$

PARTE II

GRUPPI DI CONICHE

N.I Premessa

Nella prima parte abbiamo visto come l'insieme delle forme quadratiche omogenee e dei polinomi di grado ≤ 2 di n variabili si possano strutturare come un gruppo di polinomi (secondo Lie) tramite una matrice antisimmetrica di ordine n ed a coefficienti costanti.

Ora, se una conica $\mathcal{C}$ ha equazione:

$$F(x^{\circ},x^{1},x^{2}) = 0$$

in coordinate proiettive omogenee e:

$$f(x,y) = 0$$

in coordinate proiettive non omogenee, certamente F è una forma quadratica omogenea in 3 variabili ed f è un polinomio di 2° grado; risulta quindi naturale applicare la definizione di gruppo di polinomi alle coniche.

N.2 Gruppi di coniche.

Siano $\mathfrak{C}^1$ e $\mathfrak{C}^2$ due coniche di equazione, in coordinate proiettive omogenee $(x^o,x^1,x^2,)$:

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{C}^1&: a_{ij}x^ix^j = F^1(x^o,x^1,x^2) = 0 \\ \mathfrak{C}^2&: b_{ij}x^ix^j = F^2(x^o,x^1,x^2) = 0 \end{aligned}$$

Se

$$\eta = (\eta^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta} = 0,1,2 = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{01} & \eta^{02} \\ \eta^{10} & 0 & \eta^{12} \\ \eta^{20} & \eta^{21} & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice a coefficienti costanti ed antisimmetrica, si può definire tramite essa la P.P.G. di $\mathfrak{C}^1$e$\mathfrak{C}^2$ al modo seguente: $(\mathfrak{C}^1, \mathfrak{C}^2)^*$ è la conica di equazione:

$$(2.3)\qquad (a_{ij}x^ix^j,b_{ij}x^ix^j)^* = 0$$

cioè:

$$(2.4)\qquad (F^1,F^2)^*(x^o,x^1,x^2) = 0$$

che, com'è noto ha la forma esplicita:

$$(2.5)\qquad \eta^{\alpha\beta}a_{\alpha j}b_{\beta k}x^jx^k = 0$$

Risulta chiaro a questo punto come, partendo dalla definizione di gruppo di polinomi, è naturale definire il gruppo di coniche come l'insieme delle coniche aventi equazione in cui il primo membro è un elemento del gruppo di polinomi costruito tramite la matrice η e partendo dai polinomi $F^1(x^o,x^1,x^2)$ ed $F^2(x^o,x^1,x^2)$.

Ovviamente si ottiene ancora un gruppo di coniche se, invece di partire da due coniche, si parte da un numero finito o infinito di coniche; considerando infine l'insieme di tutte le coniche ed introducendo in esso l'operazione P.P.G. definita da η, si ha direttamente un gruppo di coniche.

Se le equazioni delle coniche sono espresse in coordinate proiettive non omogenee, considerando due coniche $\mathfrak{C}^1$e $\mathfrak{C}^2$ di equazioni rispettivamente:

$$\mathscr{C}^1 : f^1(x,y) = 0 \qquad ; \qquad \mathscr{C}^2 : f^2(x,y) = 0$$

dove

$$f^1(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}$$

$$f^2(x,y) = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{12}xy + 2b_{01}x + 2b_{02y} + b_{00}$$

la loro P.P.G. si definisce tramite una matrice non singolare del tipo:

$$\eta = \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

esplicitando si ha:

$$(\mathscr{C}^1, \mathscr{C}^2)^*(x,y) = (f^1, f^2)^*(x,y) = 0$$

cioè

$$\alpha(2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{01})(2b_{12}x + 2b_{22}y + 2b_{20}) -$$

$$- \alpha\ (2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{02})(2b_{11}x + 2b_{12}y + 2b_{01}) = 0$$

Si può osservare quindi in primo luogo che la P.P.G. di due coniche in coordinate proiettive non omogenee è indipendente dalla matrice η ; in secondo luogo la conica di equazione

$$(f^1, f^2)^*(x,y) = 0$$

ha in coordinate proiettive omogenee equazione:

$$(F^1,F^2)^*(x^0,x^1,x^2) = 0$$

ottenuta con la P.P.G. definita dalla matrice:

$$(2.6) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

e cioè con la matrice:

$$(2.7) \qquad \Upsilon = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

per il seguito noi faremo uso di coordinate proiettive omogenee, ma perchè quanto detto sia valido anche in coordinate non omogenee, considereremo P.P.G. definite dalla matrice (2.7).

N.3 <u>Centro</u> <u>di</u> <u>una</u> <u>conica</u> .

Consideriamo l'insieme delle coniche reali con una struttura di gruppo di coniche definita da una matrice $\eta = (\eta^{\alpha\beta})$ anch'essa reale.

Se consideriamo due coniche $\mathcal{C}^1$ e $\mathcal{C}^2$ aventi equazioni (2.1), esplicitando la (2.3) si ha:

$$\eta^{\alpha\beta}(2a_{\alpha j}x^j)(2b_{\beta k}x^k) = 0$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
&\eta^{01}(a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2)(b_{10}x^0 + b_{11}x^1 + b_{12}x^2) + \\
&+ \eta^{02}(a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2)(b_{20}x^0 + b_{21}x^1 + b_{22}x^2) + \\
&+ \eta^{12}(a_{10}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2)(b_{20}x^0 + b_{21}x^1 + b_{22}x^2) + \\
&+ \eta^{10}(a_{10}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2)(b_{00}x^0 + b_{01}x^1 + b_{02}x^2) + \\
&+ \eta^{20}(a_{20}x^0 + a_{21}x^1 + a_{22}x^2)(b_{00}x^0 + b_{01}x^1 + b_{02}x^2) + \\
&+ \eta^{21}(a_{20}x^0 + a_{21}x^1 + a_{22}x^2)(b_{10}x^0 + b_{11}x^1 + b_{12}x^2) = 0
\end{aligned}$$

che si può scrivere anche, tenendo conto dell'antisimmetria dei coefficienti $\eta^{\alpha\beta}$ e dalle (2.1):

$$(3.1) \quad \eta^{01}(F^1_{x^0} F^2_{x^1} - F^1_{x^1} F^2_{x^0}) + \eta^{02}(F^1_{x^0} F^2_{x^2} - F^1_{x^2} F^2_{x^0}) + \eta^{12}(F^1_{x^1}F^2_{x^2} - F^1_{x^2}F^2_{x^1}) = 0$$

considerando poi $\eta = \tilde{I}$, la (3.1) diviene

$$(3.2) \qquad F^1_{x^1} F^2_{x^2} - F^1_{x^2} F^2_{x^1} = 0$$

Ora, tenendo presente che le coordinate del centro di $\mathcal{C}^1$ sono tali da verificare il sistema:

$$\begin{cases} F^1_{x^1}(x^0, x^1, x^2) = 0 \\ F^1_{x^2}(x^0, x^1, x^2) = 0 \end{cases}$$

e che le coordinate del centro di $\mathcal{C}^2$ sono tali da verificare il sistema:

$$\begin{cases} F^2_{x^1}\,(x^o,x^1,x^2) = 0 \\ \\ F^2_{x^2}\,(x^o,x^1,x^2) = 0 \end{cases}$$

risulta evidente che la conica di equazione (3.2) passa per il centro di $\mathcal{C}^1$ e per quello di $\mathcal{C}^2$.

Ciò dimostra che:

In un gruppo di coniche con la P.P.G. definita dalla matrice Υ, la P.P.G. di due coniche $\mathcal{C}^1$ e $\mathcal{C}^2$ passa per il centro di entrambe.

Inoltre, come conseguenza si ha che, assegnata una conica $\mathcal{C}$ di centro C (proprio o improprio) e tre coniche $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \mathcal{C}^3$ risulta:

$$C \in (\mathcal{C}^1,\mathcal{C})^* \cap (\mathcal{C}^2,\mathcal{C})^* \cap (\mathcal{C}^3,\mathcal{C})^* .$$

In virtù di questo fatto, considerata una conica $\mathcal{C}$ di equazione:

$$F(x^o,x^1,x^2) = 0$$

e le tre coniche:

$$\mathcal{C}^1:\ x^1x^2 = 0; \qquad \mathcal{C}^2:\ x^1(x^2 - x^o) = 0; \qquad \mathcal{C}^3:\ (x^1 - x^o)\cdot x^2 = 0$$

risulta che il centro C è un punto le cui coordinate soddisfano il sistema:

$$(5.3)\quad \begin{cases} (\mathcal{C}^1,\mathcal{C})^*:\ x^2F_{x^2} - x^1F_{x^1} = 0 \\ (\mathcal{C}^2,\mathcal{C})^*:\ (x^2-x^o)F_{x^2} - x^1F_{x^1} = 0 \\ (\mathcal{C}^3,\mathcal{C})^*:\ x^2F_{x^2} - (x^1-x^o)F_{x^1} = 0 \end{cases}$$

che si può anche scrivere:

$$(3.4)\quad \begin{cases} x^oF_{x^2} = 0 \\ x^oF_{x^1} = 0 \\ x^o(F_{x^1} + F_{x^2}) = 0 \end{cases}$$

le soluzioni proprie di tale sistema sono le stesse del sistema lineare:

$$(3.5)\quad \begin{cases} F_{x^1} = 0 \\ F_{x^2} = 0 \end{cases}$$

e quindi, nel caso in cui $\mathscr{C}$ è a centro (proprio), il sistema (3.3) ha un'unica soluzione propria che fornisce le coordinate di C.

Se $\mathscr{C}$ è una parabola, la ricerca della soluzione impropria del sistema (3.3) porta a risolvere il sistema:

$$(3.6)\quad \begin{cases} x^o = 0 \\ x^2(a_{12}x^1 + a_{22}x^2) - x^1(a_{11}x^1 + a_{12}x^2) = 0; \end{cases}$$

la soluzione $(0,a_{12}, -a_{11}) = (0,a_{22}, -a_{12})$ del sistema (3.6), poichè soddisfa anche l'equazione della parabola $\mathscr{C}$, fornisce le coordinate del centro.

Osserviamo ancora che, se di due coniche $\mathscr{C}^1$ e $\mathscr{C}^2$ una è una parabola, allora $(\mathscr{C}^1, \mathscr{C}^2)^*$, dovendo passare per un punto improprio, è parabola o iperbole; se $\mathscr{C}^1$ e $\mathscr{C}^2$ sono parabole aventi centri distinti, allora $(\mathscr{C}^1,\mathscr{C}^2)^*$è iperbole; infine, se

$$\mathscr{C}^1 : a_{ij}x^ix^j = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathscr{C}^2 : b_{ij}x^ix^j = 0$$

sono due circonferenze, allora la conica $(\mathscr{C}^1,\mathscr{C}^2)^*$ risulta avere equazione :

$$x^o \left[x^1(b_{2o} - a_{2o}) + x^2(a_{1o} - b_{1o}) + (a_{1o}b_{2o} - a_{2o}b_{1o})\right] = 0$$

che è una conica semplicemente degenere con una componente coincidente con la retta impropria, e l'altra componente coincidente con la retta che congiunge i centri di $\mathscr{C}^1$e $\mathscr{C}^2$.

N.4 Assi ed asintoti di una conica.

La possibilità di strutturare l'insieme delle coniche di un piano come gruppo di coniche nel senso del precedente N.2, consente di ritrovare alcuni enti geometrici legati appunto alle curve del secondo ordine.

Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro proprio e $\mathcal{C}^1$ una conica doppiamente degenere rispettivamente di equazioni:

$$\mathcal{C}: a_{ij}x^i x^j = 0 \qquad \mathcal{C}': (ax^0 + bx^1 + cx^2)^2 = 0;$$

risulta:

$$(\mathcal{C},\mathcal{C}')^* = (2a_{11}x^1+2a_{12}x^2+2a_{10}x^0)(2ax^0+2bx^1+2cx^2)c -$$

$$(2a_{12}x^1+2a_{22}x^2+2a_{20}x^0)(2ax^0+2bx^1+2cx^2)b = 0$$

cioè:

$$(ax^0+bx^1+cx^2)\left[(a_{11}x^1+a_{12}x^2+a_{10}x^0)c - (a_{12}x^1+a_{22}x^2+a_{20}x^0)\,b\right] = 0$$

La conica $(\mathcal{C},\mathcal{C}')^*$ è dunque degenere e composta dalle rette

$$r: ax^0+bx^1+cx^2 = 0$$

che è componente doppia di $\mathcal{C}'$,

$$r': (a_{11}c-a_{12}b)x^1+(a_{12}c-a_{22}b)x^2+(a_{10}c-a_{20}b)x^0 = 0;$$

imponendo ora che r' sia asse per C, risulta che una coppia di suoi parametri direttori:

$$\ell = (a_{22}b - a_{12}c) \qquad m = (a_{11}c-a_{12}b)$$

deve soddisfare l'equazione:

$$(4.1)\quad a_{12}\left[(a_{22}b-a_{12}c)^2-(a_{11}c- a_{12}b)^2\right] + (a_{22}-a_{11})(a_{22}b-a_{12}c)(a_{11}c-a_{12}b) = 0$$

che si può anche scrivere:

$$(4.2)\quad a_{12}(b^2-c^2) + (a_{22}-a_{11})bc = 0$$

In conclusione: calcolando la P.P.G. definita dalla matrice (2.7) fra una data conica $\mathcal{C}$ ed una conica $\mathcal{C}'$doppiamente degenere di parametri direttori b,c soddisfacenti la (4.1) o la (4.2) si ottiene una conica degenere di cui una componente è la componente doppia di $\mathcal{C}$ e l'altra è asse di $\mathcal{C}$.

Osserviamo che non dipendendo le (4.1) e (4.2) dal coefficiente a che figura nell'equazione di $\mathcal{C}'$, si può sempre considerare $a = 0$. Inoltre, se $\mathcal{C}$ è circonferenza, cioè se $a_{11} = a_{12}$ e $a_{12} = 0$ le (4.1) e (4.2) sono identicamente soddisfatte, a riprova del fatto che per la circonferenza tutte le rette per il centro sono assi (si ricordi che r' passa per il centro di $\mathcal{C}$).

Se $\mathcal{C}$ è una parabola, perchè r' risulti essere il suo asse deve essere la polare di $\overline{C}\ (0,a_{12},a_{22})$(*), e quindi, se $\mathcal{C}$ ha equazione:

$$a_{ij}x^i x^j = F(x^o,x^1,x^2) = 0$$

deve essere:

$$\begin{cases} a_{1o}c-a_{2o}b = \rho\, F_{x^o}(\overline{C}) = 2\rho(a_{o1}a_{12}+a_{o2}a_{22}) \\ a_{11}c-a_{12}b = \rho\, F_{x^1}(\overline{C}) = 2\rho\ (a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}) \\ a_{12}c-a_{22}b = \rho\, F_{x^2}(\overline{C}) = 2\rho\ (a_{12}^2 + a_{22}^2) \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} a_{1o}(c - 2\rho a_{12}) - a_{2o}(b+2\rho a_{22}) = 0 \\ a_{11}(c - 2\rho a_{12}) - a_{12}(b+2\rho a_{22}) = 0 \\ a_{12}(c - 2\rho a_{12}) - a_{22}(b+2\rho a_{22}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c= 2\rho a_{12} \\ b= 2\rho a_{22} \end{cases}$$

Quindi calcolando la P.P.G. di $\mathcal{C}$ con la conica

$$\mathcal{C}' : (- a_{22}x + a_{12}y)^2 = 0$$

si ottiene una conica le cui componenti sono:

$$r : - a_{22}x + a_{12}y = 0$$

r' = asse della parabola.

Qualora si abbia $a_{12} = a_{22} = 0$ ed $a_{11} \neq 0$, per asse si assume la retta:

$$x = -\frac{a_{1o}}{a_{11}}$$

Per determinare l'equazione degli asintoti, si procede analogamente al caso degli assi; in questo caso bisogna imporre che i parametri direttori di r':

$$\ell = (a_{22}b - a_{12}c) \qquad m = (a_{11}c - a_{12}b)$$

verifichino l'equazione

$$(4.3) \quad a_{11}(a_{22}b - a_{12}c)^2 + 2a_{12}(a_{22}b - a_{12}c)(a_{11}c - a_{12}b) + $$
$$+ a_{22}(a_{11}c - a_{12}b)^2 = 0$$

che sviluppata e ridotta ai minimi ternmini diventa :

$$(4.4) \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\left[a_{22}b^2 + a_{11}c - 2_{12}bc\right] = 0$$

Per le coniche a centro è:

$$a_{11}a_{12} - a_{12}^2 \neq 0$$

per cui si ha: calcolando la P.P.G. definita dalla matrice (2.7) fra una assegnata conica $\mathcal{C}$ ed un'altra conica $\mathcal{C}'$ che sia doppiamente degenere ed avente parametri direttori b , c soddisfacenti la:

(*) Il centro di $\mathcal{C}$ è il punto improprio $C(0, a_{22}, - a_{12})$.

(4.5) $a_{22}b^2 + a_{11}c^2 - 2a_{12}bc = 0$

si ottiene una conica degenere di cui una componente è la retta doppia di $\mathfrak{C}$ e l'altra è asintoto per $\mathfrak{C}$.

Anche in questo caso, data l'indipendenza di (4.4) e (4.5) dal coefficiente a nell'equazione di $\mathfrak{C}'$, si potrà supporre $a = 0$.

N. 5 Esempi.

Siano assegnate le seguenti coniche:

$\mathcal{C}^1: x^2 + y^2 +2x - 6y - 1 = 0$ circonferenza

$\mathcal{C}^2: 2x^2 +4y^2 - 2xy -2x +y +2 = 0$ ellisse

$\mathcal{C}^3: x^2 +2xy - x + y = 0$ iperbole

$\mathcal{C}^4: x^2+4xy + 4y^2- 4y - 3 = 0$ parabola.

Determiniamo il centro di $\mathcal{C}^1$; per questo consideriamo le tre coniche:

$\mathcal{C}: xy = 0$ $\mathcal{C}' : x(y-1) = 0$ $\mathcal{C}'' : y(x - 1) = 0$

di centri rispettivamente $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$ e le P.P.G.

$(\mathcal{C}^1,\mathcal{C}) : (x+1)x - (y - 3)y$ cioè $x^2 - y^2+x + 3y = 0$

$(\mathcal{C}^1,\mathcal{C}') : (x+1)x - (y-3)(y-1)$ cioè $x^2 - y^2+x + 4y -3 = 0$

$(\mathcal{C}^1,\mathcal{C}'') : (x+1)(x-1) - (y-3)y$ cioè $x^2 -y^2 +3y - 1 = 0$

Si trova che:

$(\mathcal{C}^1,\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}^1,\mathcal{C}') \cap (\mathcal{C}^2,\mathcal{C}'') = C\ (-1,3)$

Determiniamo ora gli assi di $\mathcal{C}^2$; determiniamo b e c in modo che soddisfino l'equazione:

$$-(b^2-c^2) + 2bc = 0$$

da cui si ha:

$$c = b(-1 \pm \sqrt{2}\ )$$

gli assi di $\mathcal{C}^2$ sono dunque le rette:

s_1: $(2x - y -1)(-1- \sqrt{2}) -(-x + 4y +\frac{1}{2}) = 0$

s_2: $(2x- y -1)(-1+ \sqrt{2}) -(-x +4y + \frac{1}{2}) = 0$

cioè

s_1: $2x(-1-2\sqrt{2}) + 2y(-3+ \sqrt{2}) + (1+2 \sqrt{2}) = 0$

s_2: $2x(-1+2 \sqrt{2}) -2y(3+ \sqrt{2}) + (1-2 \sqrt{2}) = 0$

che si possono anche scrivere:

s_1: $(x- \frac{1}{2}) + (-1+ \sqrt{2})y = 0$

s_2: $(x- \frac{1}{2}) - (1,+ \sqrt{2})y = 0$

Determiniamo gli asintoti di $\mathcal{C}^3$; b e c debbono soddisfare la (4.5), cioè l'equazione

$c^2 - 2bc = 0 \implies c_1 = 0 \qquad c_2 = 2b$

Gli asintoti cercati hanno dunque equazione:

t_1: $(x+y- \frac{1}{2}) \cdot 0 -(x + \frac{1}{2})b = 0$

t_2: $(x+y- \frac{1}{2})\, 2 - (2x + 1) = 0$

cioè

t_1 : $x + \frac{1}{2}$

t_2 : $2x + 4y - 3 = 0$

Determiniamo infine l'equazione dell'asse di $\mathcal{C}^4$; ponendo:

$$C = 2 \quad e \quad b = 4$$

si ha l'equazione dell'asse :

$$(2x + 4y)(2) - (4x + 8y - 4)(-4) = 0$$

cioè:

$$5x + 10y - 4 = 0$$

B I B L I O G R A F I A

[1] G. ANDREASSI, *Gruppi di funzioni generalizzati*, Rend. Mat. (2) – 11 – (1978) serie VI, 187 – 206.

[2] G. ANDREASSI, *Meccanica Hamiltoniana classica*. Quad. n. 14 – 1978, Ist. Mat. Univ. Lecce.

[3] J. G. F. BELIFANTE and B. KOLMAN, *A survey of Lie groups and Lie algebras with applications and computational methods*, 1972

[4] A. MANIGLIA, *Gruppi di funzioni generalizzati singolari*, Riv. Mat. Univ. Parma, (4) – 5 – (1979). 115 – 123

[5] A. MANIGLIA, *Generazione di gruppi di funzioni generalizzati* Riv. Mat. Univ. Parma, (4) – 6 – (1980). 379 – 385

[6] N. MUCUNDA and E. C. G. SUDARSHAN, *Structure of the Dirac Bracket in Classical Mechanics*, Departiment of Physics, Syracuse University, Syracuse, N.Y. April 1967

[7] R. S. PALAIS, *A global formulation of the Lie theory of transformati groups*, Memoirs on the American Math. Soc. N.22.1857