9. UNITA' DI MISURA DEGLI INTERVALLI TEMPORALI.

Si considerino i soliti segmenti $AB \in K$ e $A'B' \in K'$.
Il tempo di scorrimento di A' su AB è dato

nel riferimento K da: $t(E_1)\ t(E_3)$

nel riferimento K' da: $t'(E_1)\ t'(E_3)$.

Il tempo di scorrimento di A su A'B' è dato

nel riferimento K da: $t(E_1)\,t(E_2)$

nel riferimento K' da: $t'(E_1)\ t'(E_2)$.

Va notato che gli intervalli temporali $t(E_1)\ t(E_2)$ e $t'(E_1)\ t'(E_3)$ sono intervalli di tempo proprio rispettivamente in K e in K' (gli eventi E_1 ed E_2 avvengono entrambi in A e K, gli eventi E_1 ed E_3 avvengono entrambi in A' e K'). Come nel caso delle lunghezze si sono confrontati due segmenti spaziali in quiete, uno rispetto a K l'altro rispetto a K', così ora si confrontano "segmenti" temporali propri uno in K l'altro in K'.

Naturalmente se risulta ad es. $AB_{|K} = A'B'_{|K}$ si ha:

$$\frac{t(E_1)\ t(E_3)}{t(E_1)\ t(E_2)} = 1, \tag{8}$$

poiché il tempo impiegato da A' per scorrere su AB, per l'osservatore K è uguale al tempo impiegato da A per scorrere su A'B' (in altri termini

$$t(E_2) = t(E_3)).$$

In questo caso è per la (4): $A'B'_{|K'} > AB_{|K'}$ e quindi nel riferimento K' il tempo impiegato da A per scorrere sù A'B' è maggiore del tempo impiegato da A' per scorrere su AB:

$$(9) \qquad \frac{t'(E_1)t'(E_2)}{t'(E_1)t'(E_3)} < 1$$

Si considerino ora tre eventi E_1, E_2, E_3 tali che il segmento temporale fra E_1 ed E_2 sia segmento proprio in K e quello fra E_1 e E_3 sia proprio K'.

In analogia a quanto si è fatto per i segmenti spaziali si dirà che hanno la stessa lunghezza propria i due segmenti temporali fra gli eventi E_1,E_2 ed E_1, E_3 se:

$$(10) \qquad \frac{t(E_1)\ t(E_3)}{t(E_1)\ t(E_2)} = \frac{t'(E_1)\ t'(E_2)}{t'(E_1)\ t'(E_3)}$$

cioé se ognuno dei due osservatori trova lo stesso rapporto fra il segmento temporale non proprio e il segmento temporale proprio.

E' evidente che anche in questa definizione i due riferimenti entrano simmetricamente.

E' ovvio che è sempre possibile scegliere due segmenti spaziali, AB $\in$ K, A'B' $\in$ K' tali che gli eventi E_1,E_2,E_3 consistano nelle sovrapposizioni di A e A', A e B', A' e B rispettivamente.

Allora la dimostrazione dell'esistenza di segmenti temporali aventi lunghezze proprie uguali è del tutto analoga a quella fatta per provare l'esistenza di segmenti spaziali aventi lunghezze di riposo uguali.

Si parta dal caso (8)-(9). Assunto A'B' di lunghezza fissa si prendano segmenti AB via via decrescenti: allora il rapporto (8) decresce da 1 verso 0, mentre il rapporto (9) cresce verso 1.

Per continuità si troveranno quindi istanti $t(E_2)$,$t(E_3)$,$t(E_2)$, $t'(E_3)$ per i quali sussiste la (10).

Come nel caso dei segmenti spaziali, ogni segmento temporale in K ammette un segmento temporale in K' avente la stessa lunghezza propria e viceversa.

Ancora in analogia col caso dei segmenti spaziali, se in K e in K' si assumono come rispettive unità di misura dei tempi due segmenti temporali propri aventi la stessa lunghezza propria, è possibile poi effettuare un confronto fra le misure di segmenti temporali che connettano coppie di eventi arbitrari.

Naturalmente fra le misure di due segmenti temporali uno appartenente a K l'altro appartenente a K' aventi la stessa lunghezza propria, sussiste la relazione (cfr. (7)):

$$t(E_1)\ t(E_2) = t'(E_1)\ t'(E_3) \ . \tag{11}$$

Per calcolare la relazione fra le misure degli intervalli di tempo proprio e non proprio, si osservi che la velocità v di K' rispetto a K è espressa, tanto dal rapporto:

$$\frac{AB|K}{t(E_1)\ t(E_3)} = v$$

(legge oraria di A' in K).

quanto dal rapporto:

$$\frac{A'B'|K}{t(E_1)\ t(E_2)} = v$$

(velocità di passaggio di A su A'B', sempre per l'osservatore K).

Analogamente, indicando con v' il modulo della velocità di K vista da K', si ha:

$$\frac{A'B'|K'}{t'(E_1)\ t'(E_2)} = v'$$

$$\frac{AB|K'}{t'(E_1)\ t'(E_3)} = v'$$

risulta perciò:

$$\frac{A\ B\ |K}{A'B'|K} = \frac{t(E_1)\ t(E_3)}{t(E_1)\ t(E_2)}$$

e

$$\frac{A'B'|K'}{AB|K'} = \frac{t'(E_1)\ t'(E_2)}{t'(E_1)\ t'(E_3)} .$$

Se i segmenti AB e A'B' hanno la stessa lunghezza di quiete, risulta:

$$\frac{AB|K}{A'B'|K} = \frac{A'B'|K'}{A\ B|K'} = \gamma$$

e quindi:

$$\frac{t(E_1)\ t(E_3)}{t(E_1)\ t(E_2)} = \frac{t'(E_1)\ t'(E_2)}{t'(E_1)\ t'(E_3)} = \gamma .$$

Si trova allora che due segmenti temporali con la stessa lunghezza propria sono i tempi di scorrimento relativi a segmenti spaziali aventi la stessa lunghezza propria.

Le precedenti relazioni si possono scrivere

$$t(E_1)\ t(E_3) = \gamma t(E_1)\ t(E_2)$$

$$t'(E_1)t'(E_2) = \gamma t'(E_1)t'(E_3).$$

In altri termini: per ognuno dei due osservatori, di due segmenti temporali aventi lunghezze proprie uguali, il segmento proprio è minore dell'altro di un fattore $1/\gamma$.

Se l'osservatore K assume come unità di misura dei tempi il segmento temporale (proprio) $t(E_1)\ t(E_2)$ e K' assume come unità di misura dei tempi il segmento temporale (proprio) $t'(E_1)\ t'(E_3)$, ogni intervallo temporale fra eventi che avvengono nello stesso luogo per l'osservatore K, apparirà dilatato di un fattore γ per l'osservatore K' e viceversa.

Come conseguenza dei risultati ottenuti si trova che $v = v'$.
Infatti dalle relazioni:

$$v = \frac{AB|K}{t(E_1)\ t(E_3)} \quad ; \quad v' = \frac{A'B'|K'}{t'(E_1)\ t'(E_2)}$$

se A B e A'B' hanno la stessa lunghezza di quiete, poiché i segmenti temporali $t(E_1)\ t(E_3)$ e $t'(E_1)\ t'(E_2)$ hanno pure, come si è visto, la stessa lunghezza di quiete, in virtù delle (7) e (11) si ha appunto:

(12) $$v = v'.$$

Nel numero successivo si dimostrerà che, come consequenza della (11) e del postulato 2), la velocità della luce ha lo stesso valore in tutti i riferimenti inerziali. Si può dire fin d'ora che questo fatto è evidente per la (11) e per motivi di simmetria, stante il significato fisico della velocità della luce.

10. INDIPENDENZA DELLA VELOCITA' DELLA LUCE DAL RIFERIMENTO. CALCOLO DI γ.

Si consideri il segmento A'B' c K'. In A' sia collocata una sorgente luminosa; in B' sia collocato uno specchio che possa riflettere la luce verso A'.

Sia $\ell' = A'B'|_{K'}$. Il tempo $\Delta t'$ impiegato da un raggio luminoso per effetturare il percorso A'B'A' (nell'ipotesi che la riflessione sia istantanea) è:

$$\Delta t' = \frac{2\ell'}{c'}$$