E_3: sovrapposizione di A' e B .

Si indichino con t (E_1), t (E_2), t (E_3) gli istanti in cui questi eventi hanno luogo. Allora le convenzioni precedenti si possono esprimere nel modo seguente:

$|A'B| > |AB| \longleftrightarrow t(E_3)$ precede $t(E_2)$

$|A'B'| = |AB| \longleftrightarrow t(E_3)$ coincide con $t(E_2)$

$|A'B'| < |AB| \longleftrightarrow t(E_3)$ segue $t(E_2)$

6. POSTULATI DELLA TEORIA DELLA RELATIVITA'.

1) I riferimenti inerziali sono tutti fra loro equivalenti dal punto di vista fisico, nel senso che qualunque esperienza fisica può essere realizzata in modo identico in ognuno di tali riferimenti.

2) Ogni riferimento inerziale è otticamente isotropo, cioé la luce nel vuoto ha la stessa velocità in tutte le direzioni.

Il primo postulato coincide nella forma col postulato di relatività galileiana e, a parte l'inclusione di tutti i fenomeni fisici, in luogo dei soli fenomeni meccanici, non fa prevedere innovazioni clamorose.

Al contrario, il secondo postulato attribuisce al moto della luce proprietà ben diverse da quelle del moto di un qualunque sistema classico. Per riconoscerlo sarà opportuno confrontare i moti di un sistema classico costituito, per es. da due elementi, rispetto a due terne inerziali, col moto di un raggio luminoso, sempre rispetto a due terne inerziali, otticamente isotrope.

Siano A e B due punti di una terna inerziale K, M il punto di mezzo del segmento AB. Dai punti A e B partano simultaneamente due elementi P_A, P_B con velocità rispettive $\vec{u}$ e $-\vec{u}$ e sia vers $\vec{u}$ = vers AB. Naturalmente i due elementi arrivano contemporaneamente in M.

Sia K' un riferimento inerziale in moto rispetto a K con velocità $\vec{v}$ e sia vers $\vec{v}$ = vers AB. Poiché K ha velocità $-\vec{v}$ rispetto a K', in K' l'elemento P_A ha velocità $\vec{u}'_{P_A} = \vec{u} - \vec{v}$, mentre l'elemento P_B ha velocità $\vec{u}'_{P_B} = -\vec{u} - \vec{v}$. Nel tempo Δt_A impiegato dall'elemento P_A ad andare da A ad M il punto M si sposta, rispetto a K', di un tratto $-\vec{v}\Delta t_A$. L'elemento P_A percorre quindi una strada che è data, sia dall'espressione $(\vec{u}-\vec{v})\Delta t_A$, sia dall'espressione $AM - \vec{v}\,\Delta t_A$.

Dall'uguaglianza

$$(\vec{u} - \vec{v})\Delta t_A = AM - \vec{v}\,\Delta t_A$$

si ricava

$$\vec{u}\,\Delta t_A = AM\ .$$

Analogamente l'elemento P_B per andare da B ad M percorre in K' una strada che è data sia dall'espressione $(-\vec{u} - \vec{v})\Delta t_B$ sia dall' espressione $BM - v\Delta t_B$.

Dall'uguaglianza:

$$(-\vec{u} - \vec{v})\Delta t_B = BM - \vec{v}\Delta t_B$$

poiché è $BM = -AM$ si ricava, confrontando con la relazione contenente Δt_A

$$\Delta t_A = \Delta t_B\ .$$

Ora i due elementi giungono in M contemporaneamente per l'osservatore K e quindi giungono contemporaneamente in M per ogni osservatore: l'uguaglianza di Δt_A e Δt_B mostra allora che essi anche per l'osservatore K' partono simultaneamente da A e da B. Questa affermazione è tautologica; nella definizione delle velocità (assoluta, relativa, di trascinamento) gli osservatori K e K' si servono dello stesso tempo.

Si passi ora all'esame del moto di raggi luminosi nell'ipotesi che sia vero il postulato 2).

Le quantità geometriche e fisiche saranno espresse nei due riferimenti in unità differenti. Questa scelta, che per ora può sembrare una inutile complicazione, si rivelerà poi concettualmente necessaria alla luce dei risultati che si trarranno dall'esempio trattato.

Si supponga che in A e in B siano poste due sorgenti luminose e si assuma la validità del postulato 2); in altri termini K e K' siano entrambi otticamente isotropi.

Nel riferimento K le due sorgenti vengano accese simultaneamente. I raggi luminosi procedendo in K entrambi con velocità c (postulato 2)) giungono contemporaneamente nel punto di mezzo M di AB. Poiché gli eventi di arrivo in M dei due raggi luminosi sono coincidenti per K (arrivo simultaneo nello stesso punto) essi sono coincidenti per ogni osservatore: anche per K', quindi, i due raggi giungono simultaneamente in M.

Si indichino ora con ℓ' la lunghezza di AB misurata nelle unità di K' e con $\Delta t'_A$ e $\Delta t'_B$ i tempi, sempre misurati nelle unità di K', impiegati dai raggi AM e BM per percorrere i rispettivi cammini. Poiché K' è inerziale e quindi otticamente isotropo, entrambi i raggi si muovono con la stessa velocità c': le strade che essi percorrono fra le rispettive sorgenti e il punto M sono $c'\Delta t'_A$ e $c'\Delta t'_B$.

In K' il punto M si muove con una velocità $\vec{v}'$ che ha verso opposto a quello di $\vec{v}$ (ricordare anche che è vers AB = vers $\vec{v}$) e quindi va incontro al raggio uscente da A, mentre si muove nello stesso verso uscente da B, Nel riferimento K' quindi per ottenere la strada $c'\Delta t'_A$ percorsa dal raggio AM bisogna sottrarre da $\ell'/2$ la strada $v'\Delta t'_A$ percorsa dal punto M nel tempo $\Delta t'_A$. Dall'uguaglianza:

$$c'\Delta t'_A = \ell'/2 - v'\Delta t'_A$$

si ha:

$$\Delta t'_A = \frac{\ell'}{2(c'+v')}$$

Per ottenere la strada $c'\Delta t'_B$, percorsa in K' dal raggio BM, occorre invece sommare ad $\ell'/2$ la strada $v'\Delta t'_B$ percorsa da M nel tempo $\Delta t'_B$.

Dall'uguaglianza

$$c'\Delta t'_B = \frac{\ell'}{2} + v'\Delta t'_B$$

si ha:

$$\Delta t'_B = \frac{\ell'}{2(c' - v')}$$

Si conclude che in K' i raggi giungono contemporaneamente in M ma impiegando tempi diversi. Poiché $\Delta t'_B > \Delta t'_A$, in K' il raggio che lascia B parte prima di quello che lascia A, a differenza di quanto accade in K. Si ha così la prima conseguenza del postulato 2): la relatività della contemporaneità.

Sicché, se si vuole che i riferimento K e K' siano entrambi otticamente isotropi, si deve abbandonare il carattere assoluto del tempo.

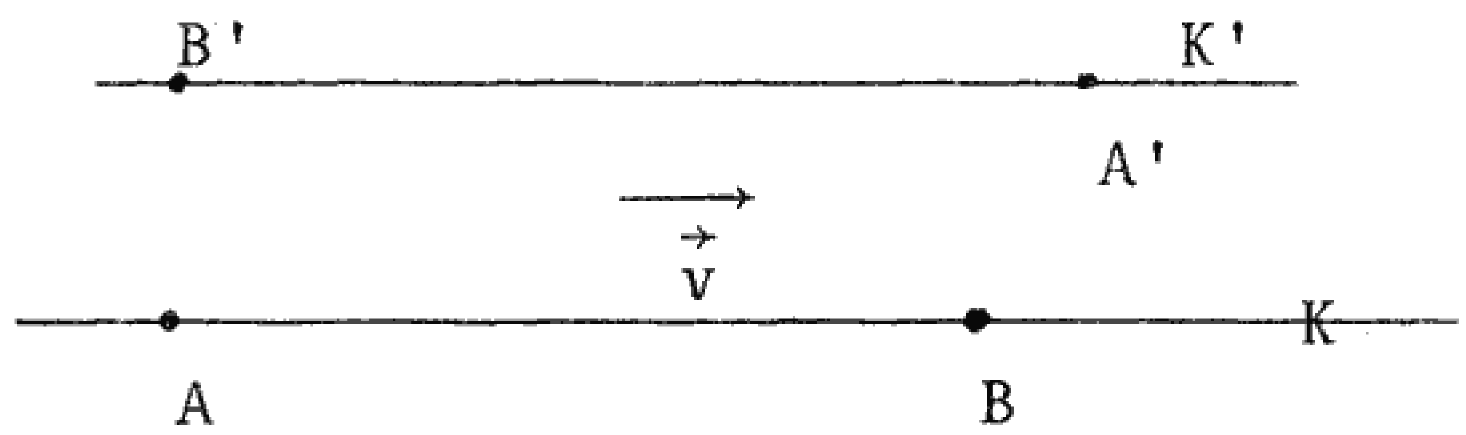
Va osservato che questa discrepanza non dipende dalle unità di misura usate dai due osservatori.

b) Relatività della uguaglianza di intervalli spaziali e di intervalli temporali.

Si considerino ora due punti in K' tali che l'osservatore K veda passare simultaneamente A' su B e B' su A (l'ordine dei punti A,B e A',B' è quello convenuto al n.5).

Per l'osservatore K i segmenti AB e A'B' in base alle convenzioni stipulate al n.5 hanno la stessa lunghezza.

Si supponga che le sorgenti luminose in A e in B vengano accese per l'osservatore K, nell'istante in cui i due segmenti risultano sovrapposti



Si considerino ora i seguenti eventi: 1) partenza del raggio da B, 2) sovrapposizione di A' e B. Questi due eventi avvengono simultaneamente e nello stesso punto per K. Essi sono quindi coincidenti per tutti gli osservatori.

Analogamente sono eventi coincidenti la partenza del raggio da A e la sovrapposizione di A e B'.

D'altra parte nel riferimento K' il raggio uscente da B parte prima di quello uscente da A. Di conseguenza in K' il punto A' passa su B prima che il punto B' passi su A. Nella convenzione fatta al n.5, in K' il segmento A'B' è quindi più lungo del segmento AB, a differenza di quanto avviene per l'osservatore K, per il quale i due segmenti sono uguali. Si ha dunque la seconda conseguenza del postulato di isotropia ottica: la relatività dell'uguaglianza di segmenti in moto relativo.

Poiché in K è $|AB| = |A'B'|$, i tempi di scorrimento di A' su AB e di A su A'B' sono uguali, cioé:

$$(t(E_1),\ t(E_3)) = (t(E_1),\ t(E_2)).$$

In K', essendo $|A'B'| > |AB|$ il tempo di scorrimento di A' su AB è minore del tempo di scorrimento di A su A'B', cioé

$$(t'(E_1),\ t'(E_3)) < (t'(E_1),\ t'(E_2)).$$

Si ha così la terza conseguenza del postulato di isotropia ottica: la relatività dell'uguaglianza di due intervalli temporali fra due coppie di eventi.

Va sottolineato che i risultati illustrati sono conseguenze solamente del postulato che afferma che tutti i riferimenti inerziali sono otticamente isotropi.

Classicamente esiste un solo riferimento otticamente isotropo e quindi le divergenze sopra viste fra le misure effettuate da osservatori in moto relativo non sussistono.

7. Difficoltà poste dall'esempio precedente.

Le differenze trovate dai due osservatori K e K' pongono un nuovo problema. I due osservatori trovano differenze qualitative nelle loro misure, ma non sono in grado di tradurre queste differenze in termini quantitativi. Essi vivono per così dire in due mondi differenti e se ognuno di loro costruisce una teoria fisica nel proprio riferimento, le due teorie non possono essere messe a confronto, perché per i due osservatori già i concetti di estensione spaziale e di durata sono diversi: fintanto che la situazione è questa, i due osservatori non possono fare confronti fra i risultati delle loro misure. Per es. fintanto che l'osservatore K non sa "di quanto" il suo segmento AB è visto da K' più corto del segmento A'B' o "di quanto" sono diversi per K' due intervalli temporali che nel suo riferimento appaiono uguali, non è possibile porre in relazione misure di lunghezza, né misure di tempo. Di conseguenza non è possibile neanche mettere a confronto misure di velocità. In particolare non ha senso dire che la velocità della luce ha lo stesso valore per tutti gli osservatori, o che la velocità di K vista da K' è $-\vec{v}$ (6).

L'uso di "orologi atomici" al quale si è accennato a pag. 13 va perciò limitato *in assensa di altre considerazioni*, ad un unico riferimento inerziale. Le considerazioni presenti indicano infatti che, per gli osservatori inerziali in effettivo moto relativo, le unità di misura "universali" di tempi e di lunghezze, desunte dalle frequenze e dalle lunghezze d'onda delle radiazioni atomiche possono essere accettare come universali soltanto se (a differenza di quanto si fa di solito) la loro universalità viene *postulata*.

Queste semplici considerazioni sono sufficienti per far capire come, pregiudiziale per il confronto fra le teorie fisiche costruite da K e K', sia lo stabilire una relazione, eventualmente puramente convenzionale, fra le misure di lunghezze e di tempi nei due riferimenti.

E' ovvio che per stabilire una relazione fra le misure è sufficiente stabilire una relazione fra le unità di misura.

Per concludere questo numero è conveniente introdurre ancora una definizione.

Per misurare un segmento, un osservatore determina le posizioni *simultanee* degli estremi.

---

(6) Naturalmente nessuno vieta ai due osservatori di scegliere unità di misura tali che la velocità della luce sia numericamente la stessa, ma in mancanza di un confronto fra le unità di misura delle lunghezze e dei tempi la coincidenza dei valori numerici non ha alcun valore in relazione al confronto delle misure.

Nel piano xt, scelto un istante t, la lunghezza del segmento coincide con la differenza fra le ascisse degli estremi (figura 3).

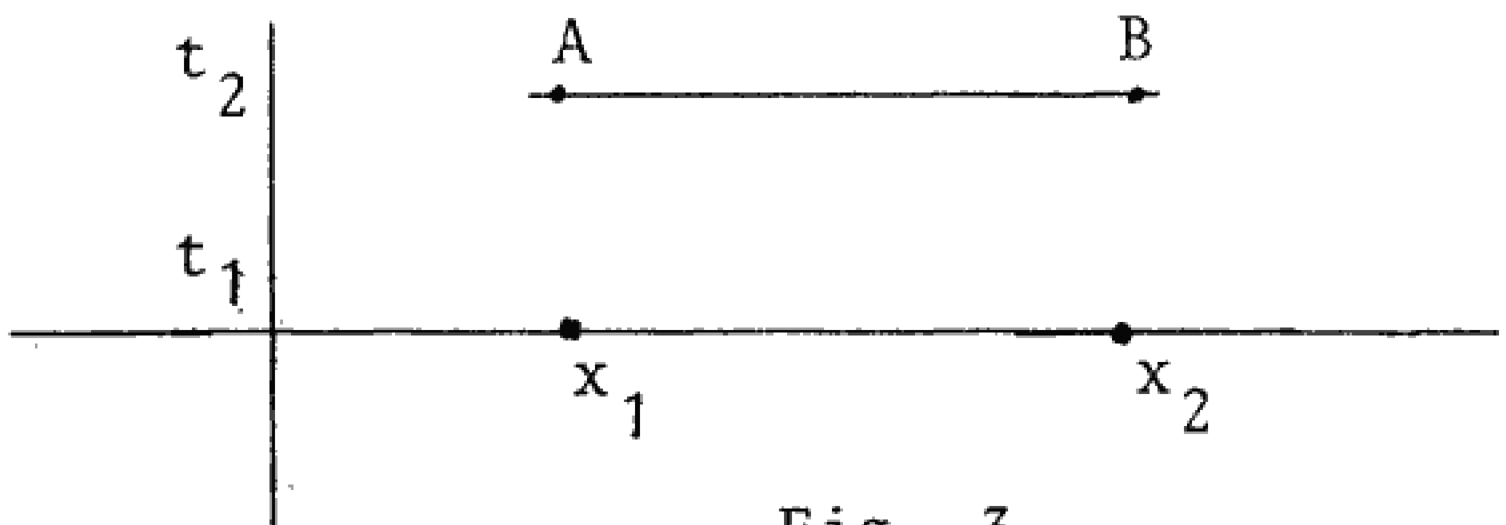


Fig. 3

La misura di un intervallo temporale è la differenza fra le ascisse temporali di due eventi che avvengono *nello stesso punto* dello spazio. Un intervallo temporale fra due eventi che avvengono nello stesso punto viene detto *intervallo di tempo proprio o di riposo.*

Così l'intervallo temporale che intercorre fra la sovrapposizione di A' e A e di B' e A è un intervallo di tempo proprio per l'osservatore K (entrambi gli eventi avvengono nel punto A ∈ K [7]. Analogamente l'intervallo temporaleche intercorre fra la sovrapposizione di A' ed A e di A' e B, è proprio in K'.

Conviene usare la stessa terminologia anche per i segmenti. La lunghezza propria o di riposo (o di quiete) di un segmento è la lunghezza vista dall'osservatore per il quale il segmento è in quiete.

8. UNITA' DI MISURA DELLE LUNGHEZZE.

Siano ancora K e K' due riferimenti inerziali e si scelgano, come nei numeri precedenti,[7] AB ∈ K, A'B' ∈ K' con vers AB = - vers A'B' (fig.2).

<u>Definizione</u>. I segmenti AB∈K e A'B'∈K' hanno lunghezze di riposo uguali se (indicando con $AB_{|K}$ la misura di AB fatta dall'osservatore K ecc.) risulta

$$\frac{AB_{|K}}{A'B'_{|K}} = \frac{A'B'_{|K'}}{AB_{|K'}}$$

(7) Nel seguito per indicare che un punto A, un segmento AB,ecc. sono in quiete rispetto a un riferimento K, si useranno talora le notazioni: A∈K, AB∈K ecc. .